—

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГНОЗНОЙ МОДЕЛИ БРАУНА

Романенков Ю.А.

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Р. Браун в конце 50-ых годов прошлого столетия предложил использовать для краткосрочного прогнозирования экспоненциальное среднее значение стационарного временного ряда:

$$F_t = \alpha A_{t-1} + \alpha\left(1-\alpha\right) A_{t-2} + \ldots + \alpha\left(1-\alpha\right)^{n-1} A_{t-n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha\left(1-\alpha\right)^{i-1} A_{t-i}, \tag{1}$$

где F_t – прогноз на момент времени t (экспоненциальное среднее), A_{t-1}, A_{t-2}, ..., A_{t-n} – значения ряда в соответствующие моменты времени, n – длина временного ряда, α – параметр (константа сглаживания).

Классическим диапазоном для выбора параметра сглаживания α является интервал $[0,\ 1]$. Этот диапазон логически обусловлен необходимостью обеспечить сходимость последовательности весовых коэффициентов в формуле (1) к единице:

$$\{a_k\}_{k=1}^{n} = \alpha,\ \alpha(1-\alpha),\ ...,\ \alpha(1-\alpha)^{n-1}. \quad (2)$$

Проанализируем, как ведет себя $S_k = 1-(1-\alpha)^k$ – сумма первых k элементов последовательности (2) с ростом α (рис. 1).

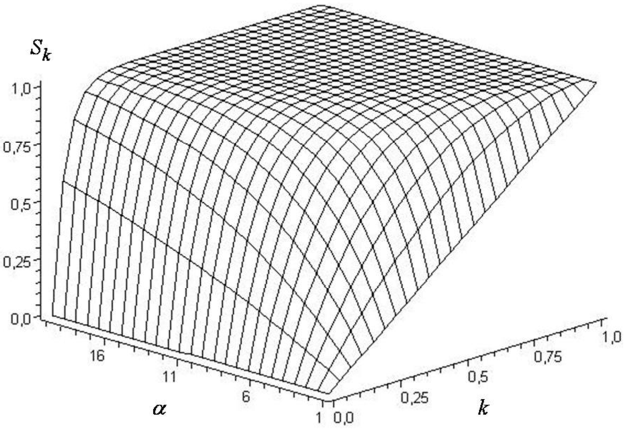

Рис. 1. Зависимость суммы k первых элементов S_k последовательности весовых коэффициентов модели Брауна от параметра сглаживания α и количества элементов k

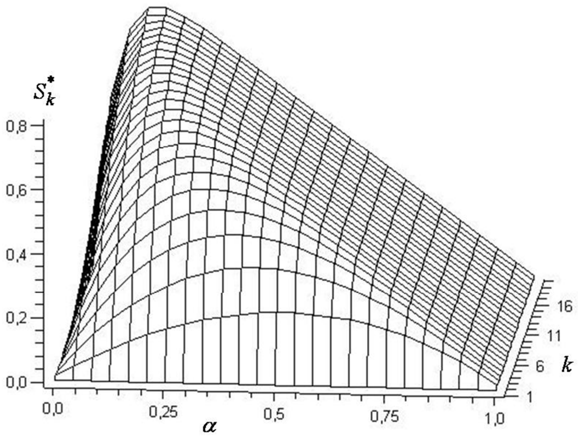

Рис. 2. Зависимость суммы k первых элементов S_k^* последовательности весовых коэффициентов модели Брауна от параметра сглаживания α и количества элементов k (за вычетом первого элемента)

Из рис. 1 видно, что S_k монотонно возрастает с увеличением α, причем темп роста тем выше, чем больше количество элементов в сумме S_k. Это объясняется тем, что первый элемент последовательности (2) растет линейно и «тянет» за собой всю сумму, хотя второй и все последующие элементы ведут себя немонотонно (рис. 2). Это становится очевидным, если из выражения для S_k вычесть первый элемент последовательности

$$S_k^* = 1-(1-\alpha)^k - \alpha. \quad (3)$$

Очевидно, что сумма k первых элементов последовательности за вычетом первого элемента вовсе не возрастает с ростом α, а ведет себя более сложным образом. Покажем, какому закону подчиняется распределение максимумов сечений по α.

$$f(\alpha,\ k) = 1-(1-\alpha)^k - \alpha,\ k \geq 2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial f(\alpha,\, k)}{\partial \alpha} = -k(1-\alpha)^{k-1} \cdot (-1) - 1 = 0 \qquad (5)$$

Откуда

$$(1-\alpha)^{k-1} = k^{-1} \qquad (6)$$

Очевидно, что корнем уравнения (6) является значение

$$\alpha^{**} = 1 - k^{\frac{1}{1-k}} \qquad (7)$$

Изобразим на рис. 3 зависимость $\alpha^{**}(k)$ в соответствии с (7) в диапазоне $k \geq 2$.

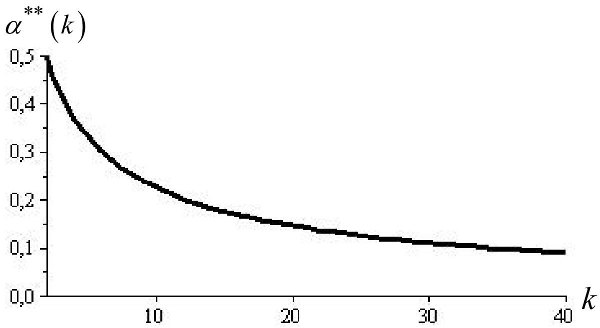

Рис. 3. Зависимость $\alpha^{**}(k)$ от количества наблюдений k

Зависимость (7) можно рассматривать как характеристику фильтра (экспоненциальное сглаживание по сути своей является фильтром), только не частотную, а параметрическую.

Другими словами, зависимость (7) аналитически связывает значение внутреннего настроечного параметра фильтра α с количеством наблюдений k, которые суммарно (с точки зрения суммы их весовых коэффициентов) будут максимальным образом учтены в прогнозе. В определенном смысле k можно рассматривать как длину памяти модели Брауна, поскольку именно k последних наблюдений максимальным образом учитываются при формировании прогноза.