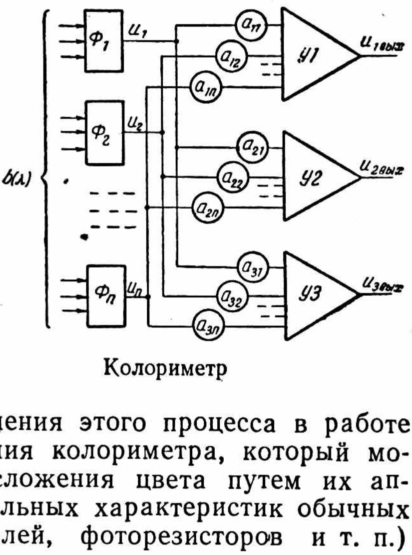
УДК 510. 62

В. П. ПЧЕЛИНОВ, канд. техн. наук, *В. В. ШЛЯХОВ*, *А. В. ЗЕЛИНСКИЙ*

ВОПРОСЫ АППРОКСИМАЦИИ КРИВЫХ СЛОЖЕНИЯ ЦВЕТА С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ФОТОПРИЕМНИКОВ

Во многих отраслях промышленности, особенно при построении автоматизированных систем управления, часто возникает необходимость в измерении координат цвета, выраженных в единицах общепринятых колориметрических систем. При этом фотоприемники колориметров должны обладать спектральными характеристиками, аналогичными кривым сложения цвета $e_j(\lambda)$ $(j=1, 2, 3)$ [1].



Колориметр

Однако промышленность не выпускает таких фотоприемников, а получение требуемой спектральной характеристики с помощью корректирующих светофильтров представляет известные трудности. Для облегчения этого процесса в работе [2] предложен принцип построения колориметра, который может настраиваться на кривые сложения цвета путем их аппроксимации с помощью спектральных характеристик обычных фотоприемников (фотоумножителей, фоторезисторов и т. п.) (рисунок), перед которыми устанавливаются узкополосные светофильтры, в совокупности охватывающие весь участок видимого спектра.

Из рисунка видно, что описываемое устройство представляет собой систему фотоприемников $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$, сигналы с которых подаются на решающие усилители $У1$, $У2$, $У3$, причем на входе каждого из них этот сигнал может быть подан с различным коэффициентом передачи, определяемым из выражения

$$u_{i\,\text{вых}} = a_{ij}u_i = \frac{R_{0j}}{R_{ji}}\, u_i, \qquad (1)$$

где u_i — сигнал на выходе i-го фотоприемника ($i = 1, 2, \ldots, n$) $u_{j\,\text{вых}}$ — сигнал на выходе j-го решающего усилителя ($j = 1, 2, 3$) R_{ji} — сопротивление i-го резистора на входе j-го решающего усилителя; R_{0j} — сопротивление резистора обратной связи j-го решающего усилителя.

Электрический ток, возникающий в цепи каждого фотоэлемент под действием излучения $b(\lambda)$, может быть определен из выражения [3]

$$I_i = q \int_{\lambda_{i1}}^{\lambda_{i2}} b(\lambda) f_i(\lambda) d\lambda. \quad (2$$

Здесь $f_i(\lambda)$ — результирующая спектральная характеристика i-г фотоприемника и светофильтра; λ_{i1}, λ_{i2} — длины волн излучений соответствующие началу и концу диапазона пропускания i-г светофильтра; q — коэффициент пропорциональности.

Тогда напряжение на выходе каждого фотоприемника равн

$$u_i = I_i R_{Hi} = q R_{Hi} \int_{\lambda_{i1}}^{\lambda_{i2}} b(\lambda) f_i(\lambda) d\lambda, \quad (3$$

где R_{Hi} — сопротивление нагрузки в цепи i-го фотоприемника

Поскольку на вход решающего усилителя подаются одновременно сигналы со всех фотоприемников, то его выходное напряжение будет определяться согласно формуле

$$u_{j\,\text{вых}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} u_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} q R_{Hi} \int_{\lambda_{i1}}^{\lambda_{i2}} b(\lambda) f_i(\lambda) d\lambda =$$

$$= q R_{Hi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda) \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} f_i(\lambda) \right) d\lambda, \quad (4$$

λ_1, λ_2 — длины волн нижней и верхней границ светового диапазона.

Из этого выражения следует, что спектральная характеристика каждого из трех каналов прохождения сигналов определяется из соотношения

$$\varphi_j(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} f_i(\lambda). \quad (5$$

Поскольку на входе колориметра, приведенного на рисунке имеется система, состоящая из n фотоприемников, то можно сказать, что на некотором множестве A задана система функций $\{f_i(\lambda)\}^n$.

Так как для каждого из установленных фотоприемников известна его спектральная характеристика, то задача аппроксимации кривых сложения сводится к отысканию величин коэффициентов a_j ($i = 1, 2, \ldots, n$) в выражении (5), определяющих такие установки резисторов, изображенных на рисунке, чтобы различия между кривыми $e_j(\lambda)$ и $\varphi_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, 3)$ были минимальными.

Если рассматривать эти функции как элементы множества A, являющегося подмножеством пространства $L_2[\lambda_1, \lambda_2]$ [4], то в качестве меры отклонения полинома (5) от заданной функции $e_j(\lambda)$, в смысле метрики этого пространства, необходимо брать среднеквадратичное отклонение [5]:

$$\delta = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\varphi_j(\lambda) - e_j(\lambda))^2 d\lambda. \tag{6}$$

Наилучшее среднеквадратичное приближение будем искать следующим образом.

Рассмотрим линейную комбинацию $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} f_i(\lambda)$, для которой

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (e_j(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} f_i(\lambda)) f_m(\lambda) d\lambda = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Ее существование следует из того, что коэффициенты a_{ji} однозначно определяются из системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_i(\lambda) f_m(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e_j(\lambda) f_m(\lambda) d\lambda, \tag{8}$$

матрица которой является матрицей Грама для набора $\{f_i(\lambda)\}^n$ — линейно независимых функций, а значит ее определитель не равен нулю. Можно показать, что выражение (6) достигает своего минимума на этой линейной комбинации. Для этого возьмем какую-нибудь другую линейную комбинацию $\sum_{i=1}^{n} a'_{ji} f_i(\lambda)$ и рассмотрим для нее условие (6) с учетом (7):

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(e_j(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} a'_{ji} f_i(\lambda)\right)^2 d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(e_j(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} f_i(\lambda) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - a'_{ji}) f_i(\lambda)\right)^2 d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(e_j(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} f_i(\lambda)\right)^2 d\lambda +$$

$$+ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{ji} - a'_{ji}) f_i(\lambda)\right)^2 d\lambda \geqslant \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(e_j(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} f_i(\lambda)\right)^2 d\lambda. \tag{9}$$

Из полученной зависимости следует наше утверждение.

Аппроксимируем интегралы системы (8) на произвольном множестве точек $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Тогда

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_i(\lambda) f_m(\lambda) d\lambda = \sum_{k=1}^{p} f_i(\lambda_k) f_m(\lambda_k). \tag{10}$$

Обозначим

$$\sum_{k=1}^{p} f_i(\lambda_k) f_m(\lambda_k) = (f_i, f_m). \tag{11}$$

Тогда систему (8) можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
&a_{j1}(f_1, f_1) + a_{j2}(f_2, f_1) + \ldots + a_{jn}(f_n, f_1) = (e_j, f_1);\\
&a_{j1}(f_1, f_2) + a_{j2}(f_2, f_2) + \ldots + a_{jn}(f_n, f_2) = (e_j, f_2);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{j1}(f_1, f_n) + a_{j2}(f_2, f_n) + \ldots + a_{jn}(f_n, f_n) = (e_j, f_n).
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

В таком случае минимальное значение δ в выражении (6 будет определяться из равенства

$$
\delta = \sum_{k=1}^{p} (\varphi_i(\lambda_k) - e_j(\lambda_k))^2 = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} f_i(\lambda_k) - e_j(\lambda_k) \right)^2 =
$$

$$
= \sum_{k=1}^{p} e_j^2(\lambda_k) - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \sum_{k=1}^{p} f_i(\lambda_k) e_j(\lambda_k). \qquad (13)
$$

Учитывая, что a_{ji} — решение системы (12), окончательно по-лучим

$$
\delta = \frac{\begin{vmatrix}
(f_1, f_1) & (f_2, f_1) & \ldots & (f_n, f_1) & (e_j, f_1)\\
(f_1, f_2) & (f_2, f_2) & \ldots & (f_n, f_2) & (e_j, f_2)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
(f_1, f_n) & (f_2, f_n) & \ldots & (f_n, f_n) & (e_j, f_n)\\
(e_j, f_1) & (e_j, f_2) & \ldots & (e_j, f_n) & (e_j, e_j)
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
(f_1, f_1) & (f_2, f_1) & \ldots & (f_n, f_1)\\
(f_1, f_2) & (f_2, f_2) & \ldots & (f_n, f_2)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
(f_1, f_n) & (f_2, f_n) & \ldots & (f_n, f_n)
\end{vmatrix}}. \qquad (14)
$$

Решение системы (12) может быть легко реализовано с по-мощью ЭВМ. Если для этого использовать современные вычис-лительные машины серии ЕС, то можно воспользоваться одно из имеющихся в матобеспечении этих машин подпрограммо на языке Фортран, которая предназначена для решения систе линейных алгебраических уравнений.

Используя описанную методику расчета коэффициентов ап-проксимации функций сложения цвета, можно существенно у-ростить задачу построения объективных колориметров, работа-ющих в заданной системе координат цвета.

Список литературы: 1. *Гуревич М. М.* Цвет и его измерение.— М.; Л.: Изд-АН СССР, 1950.— 268 с. 2. *Путятин Е. П., Пчелинов В. П., Какурин Н. Я.* Некоторые вопросы построения датчиков ввода цветовой информации в ЭВМ — АСУ и приборы автоматики, 1968, вып. 7, с. 88—92. 3. *Соболева Н. А., Меламед А. Е.* Фотоэлектронные приборы.— М.: Высш. шк., 1974.— 367 с. 4. *Пчелинов В. П.* Дедуктивный вывод математической модели спектрально чувствительности органа зрения человека.— Пробл. бионики, 1978, вып. 2 с. 23—42. 5. *Демидович Б. П., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа.— М.: Наука, 1967.— 368 с.

Поступила в редколлегию 02.04.8