553. **17.** *Compton R.G., Coles B.A., Gooding J.j., Fisher A.C. and Cox T.I.* J. Phys. Chem., 98 (1994) 2446. **18.** *Faulkner L.R., Tachikawa H., Bard A.J.,* J. Amer. Chem. Soc., no.3, 94 (1972) 691. **19.** *Tachikawa H., Bard A.J.,* J. Chem. Phys. Lett., no.2, 26 (1974) 246. **20.** *Бых А.И., Васильев Р.Ф., Рожицкий Н.Н.*// Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Радиац. химия. Фотохимия. 1979. №2.135 с. **21.** *Levich G.* Physicochemical Hydrodynamics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962. **22.** *Lйvкque M.*, Ann. Mines. Mem. Ser. 1928, 12/13, 201. **23.** *Pastore L., Magno F., Amatore C.A.* J. Electroanal. Chem., 301, (1991), 1. **24.** *Feldberg S.W.* J. Electroanal. Chem., 127, (1981),1. **25.** *Heinze J. and Stцrzbach M.* Ber. Bunsenges. Phys. Chem., 90 (1986) 1043. **26.** *Heinze J.* Electroanalysis, 124 (1981) 73. **27.** *Thomas L.H.* Elliptic problems in linear difference equations over a network, Watson Sci. Comput. Lab. Rept., Columbia University, New York, 1949. **28.** *Bruce G.H., Peaceman D.W., Rachford H.H., Rice J.D.* Trans. Am. Inst. Min. Engrs (Petrol Div.), 198 (1953) 79. **29.** *Свирь И.Б., Клименко А.В., Комптон Р.Г.* / Радиоэлектроника и информатика. 2000. № 2. С. 24.

Поступила в редколлегию 12.08.2000

Свирь Ирина Борисовна, канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией математического и компьютерного моделирования, докторант кафедры биомедицинской электроники ХТУРЭ. Научные интересы: численное моделирование электрохимических процессов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-64.

Клименко Алексей Викторович, студент гр.ПМ-96-1 ф-та прикладной математики и менеджмента ХТУРЭ, инженер лаборатории математического и компьютерного моделирования. Научные интересы: аналитическое и численное решение уравнений математической физики. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-64.

УДК 681.324

В.П. АВРАМЕНКО, АЛЬ САЛАЙМЕХ САФВАН, С.В. ШТАНГЕЙ

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ ПЛОХОЙ СОВМЕСТИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Разработана методология оптимального распределения различного рода ресурсов, включающая математическое описание задачи в классе моделей линейного программирования, модифицированный симплекс-метод поиска решений и алгоритм постоптимального анализа. Приводится конкретный пример,иллюстрирующий реализацию разработанной методологии.

Проблема распределения ресурсов

Если под ресурсами понимать все то, что используется в процессе производства и коммерческой деятельности (люди, финансы, время, товары, энергетика), то можно утверждать, что важнейшей задачей планирования и управления является распределение ресурсов. Классическая задача об их распределении сводится к тому, чтобы имеющиеся в наличии ресурсы распределить по работам, которые необходимо выполнить. Если бы ресурсов было достаточно для эффективного (качественного, своевременного, дешевого) выполнения всех работ, то подобная задача не возникла бы. В реальной ситуации всегда существуют дефициты тех или иных ресурсов. Их перемещение от механизма выполнения одной работы к другой приводит к изменению общей эффективности выполнения всех вместе взятых работ. Отсюда вытекает, что имеющиеся ресурсы желательно распределить таким образом, чтобы обеспечить максимальный общий доход (прибыль) предприятия или минимальные общие издержки (затраты).

Эффективное планирование предприятий исходит из предпосылки о закономерной ограниченности имеющихся в распоряжении ресурсов, без чего потеряло бы смысл сравнение различных вариантов плановых решений. При оптимальном планировании всякий дефицитный ресурс в отличие от недефицитного используется полностью; если же его количество изменяется, то меняется и оптимальное значение целевой функции. При изменении дефицитного ресурса меняется и оптимальное значение целевой функции. Изменение ресурса может иметь детерминированный характер (однозначно зависеть от времени), иметь стохастический характер (наступление эпидемии в том или ином сезоне можно предсказать с заданной вероятностью) или носить неопределенный характер, зависящий от различных факторов.

Задачи распределения ресурсов

Проблема распределения ресурсов возникает всякий раз при планировании выполняемых операций, когда имеющихся в наличии ресурсов для выполнения всех работ наилучшим образом не хватает. По функциональному назначению задачи распределения ресурсов можно разделить на три группы: 1) распределить заданные ресурсы между запланированными к выполнению работами таким образом, чтобы максимизировать прибыль или минимизировать ожидаемые затраты; 2) определить, какие ресурсы необходимы для выполнения заданных работ, чтобы минимизировать суммарные издержки производства; 3) определить состав работ, который можно выполнить заданными ресурсами.

При оптимальном распределении ресурсов используются различные модификации классических задач линейного, нелинейного и целочисленного математического программирования в условиях плохо и хорошо совместимых систем функциональных ограничений при детерминированной, нечеткой и стохастической постановках. Задача оптимального распределения ресурсов сводится к тому, чтобы наиболее рациональным образом распределить заданные дефицитные ресурсы, обеспечив выпуск максимально возможного количества товаров, оптимизируя при этом выбранный критерий эффективности (объем выпускаемой продукции, прибыль, себестоимость, капитальные затраты, уровень рентабельности и др.).

Если в качестве критерия оптимальности выбрать суммарную прибыль предприятия $F(x)$, то целевую функцию в линейном приближении можно представить выражением вида [1-3]:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max . \tag{1}$$

Ограничения на переменные модели накладываются выделенными ресурсами по фонду времени работы оборудования или имеющимися в наличии финансовыми возможностями в виде соотношений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,m}) . \tag{2}$$

Неотрицательность переменных записывается в виде ограничений:

$$x_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}) . \tag{3}$$

Математическая модель (1)-(3) относится к простейшему типу моделей распределения ресурсов в классе задач линейного программирования. В общем случае в модель (1)-(3) могут входить ограничения по ресурсам оборудования b_i в виде фонда времени работы i-й группы оборудования $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,m})$; ограничения на переменные по ассортименту выпускаемой продукции x_j в виде диапазона значений каждой из переменных $d_l^- \le x_j \le d_j^+ \quad (j=\overline{1,n})$; ограничения по расходу материалов, затратам труда и фонду заработной платы.

Реальные задачи распределения ресурсов сводятся к тому, чтобы найти такое значение вектора переменных $x^* \in \Omega_x \subseteq R^n$, которое доставляет экстремум (для определенности максимум) одному или нескольким частным критериям $y_i = \varphi_i(x), \ i=\overline{1,k}$, удерживая остальные $y_i, \ i=\overline{k+1,m}$ на некотором уровне $B_i, \ i=\overline{k+1,m}$:

$$Q(x)=\{\varphi_1(x), K, \varphi_k(x)\} \to \max_{x\in R^n} , \tag{4}$$

$$R_i(x)=\varphi_i(x) \ge B_i, \quad i=\overline{k+1,m}, \tag{5}$$

$$a_j(x_\lambda) \le x_j \le b_j(x_\lambda), \quad x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n} . \tag{6}$$

Решение задачи (4)-(6) производится с учетом совокупности ограничений. Функциональные ограничения (5) отражают аналитические зависимости типа балансовых уравнений и статистические зависимости типа производственных функций. Часть функциональных ограничений играет роль критериальных ограничений

$$\varphi_j(x) \ge B_j, \quad \varphi_\lambda \le B_\lambda, \tag{7}$$

при выполнении которых реализуется квазиоптимальный вариант плана.

Параметры функциональных ограничений определяются по результатам наблюдений, поэтому они содержат различного рода неопределенности. Основными причинами их появления являются жестко стабилизированные режимы функционирования технологических процессов, изменяющиеся неслучайным образом условия работы и проявления внешней среды, непредсказуемые волевые решения организационных вопросов, изменение параметров в силу старения и износа оборудования. В моделях оптимального распределения ресурсов неопределенность проявляется в недостоверности и неполноте исходных данных, плохой совместимости системы функциональных ограничений, неадекватности используемых соотношений и противоречивости системы ограничений. В многокритериальных задачах она определяется исходными данными, регуляризацией при оценивании параметров функциональных ограничений, аппроксимацией некорректно поставленной задачи с натяжкой и сверткой частных критериев.

При варьировании параметров модели в некотором диапазоне задача распределения ресурсов в классе линейного программирования

$$\min_{x\in X} \left\{ (c, x), \ Ax \ge b, \quad x \in E_+^n \right\} \tag{8}$$

заменяется некоторой задачей параметрического программирования, близкой к исходной:

$$\min_{x\in X} \left\{ (c_\delta, x), \ A_\delta x \ge b_\delta, \quad x \in E_+^n \right\}, \tag{9}$$

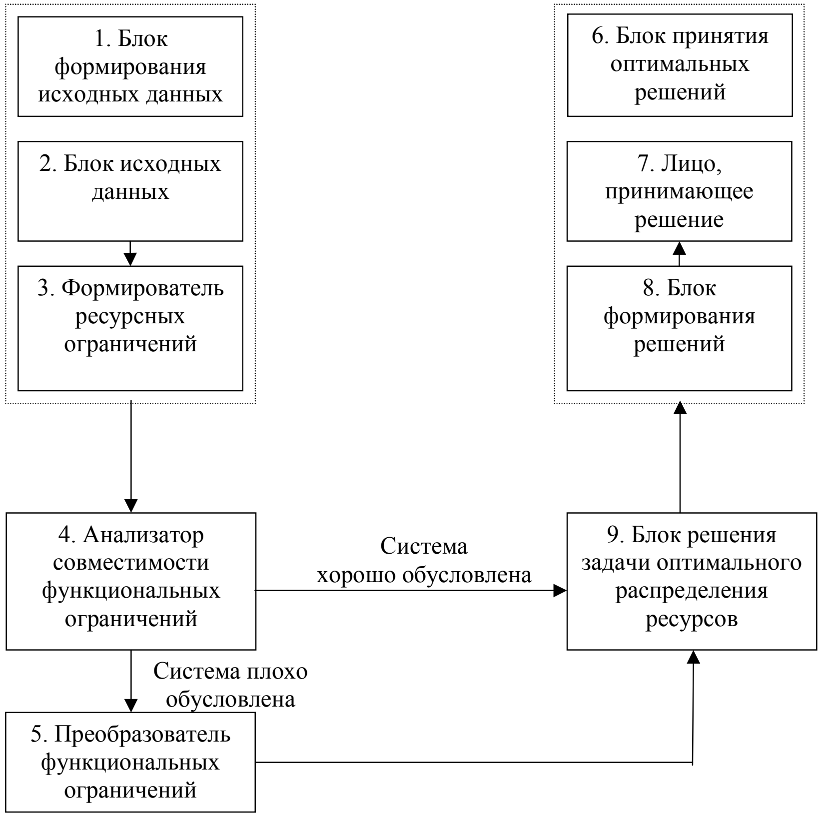
где $c_\delta, A_\delta, b_\delta$ – возмущенные значения параметров c, A, b в некоторой метрике, например, евклидовой:

$$\|c_\delta - c\| < \delta, \quad \|A_\delta - A\| < \delta, \quad \|b_\delta - b\| < \delta \qquad (10)$$

(ниже исследуются изменения параметров δ относительно отклонения конкретных видов ресурсов от их номинальных значений).

Выявление области устойчивых решений

Универсальным приемом решения любых задач линейного программирования считается симплекс-метод, идея которого состоит в последовательном улучшении планов задачи до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение. Разработано достаточное количество модификаций симплекс-метода применительно к конкретным особенностям задач, совместимости систем функциональных ограничений, необходимости проведения анализа чувствительности принимаемых решений и иных факторов.



Вычислительная схема выделения области решений, устойчивых к отклонению исходных параметров

Ниже приводится метод выделения области оптимальных решений задачи распределения ресурсов, устойчивых к отклонению исходных параметров, созданный на основе классического табличного и двойственного симплекс-метода, метода анализа совместимости системы функциональных ограничений и метода регуляризации плохо обусловленных систем функциональных ограничений. Вычислительная схема метода, приведенная на рисунке, содержит пять основных блоков: 1, 4, 5, 8, 9. Назначение блоков вычислительной схемы поясняется в процессе решения задачи распределения ресурсов на конкретном примере.

Предположим [4], что некоторое предприятие выпускает продукцию четырех типов ТП1 – ТП4 с использованием трех видов ресурсов, нормы расхода которых и уровень получаемой от их реализации прибыли приведены в табл. 1. Требуется определить вариант оптимального плана производства по критерию максимума прибыли и проанализировать полученное решение на чувствительность к возможным отклонениям ресурсов.

Таблица 1

Исходные данные задачи распределения ресурсов

Виды используемых ресурсов	Вид продукции				Располагаемый ресурс
	ТП1	ТП2	ТП3	ТП4	
Финансовые	1	1	1	1	16
Трудовые	6	5	4	3	110
Сырьевые	4	6	10	13	100
Прибыль с единицы продукции плана	60	70	120	130	---
План	x_1	x_2	x_3	x_4	---

При построении математической модели распределения ресурсов объем производимой продукции обозначим через x_j, а прибыль с единицы продукции через c_j. Производственные расходы определяются следующими ресурсами: финансовыми a_{1j}, j = 1, 2, …, n, трудовыми a_{2j}, j = 1, 2, …, n и сырьевыми a_{3j}, j = 1, 2, …, n. Всего в наличии имеется: финансовых ресурсов b_1, трудовых ресурсов b_2, материально-сырьевых ресурсов b_3. Линейная математическая модель распределения ресурсов формально записывается в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to \max; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110; \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100; \\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1,4}. \end{array}\right\}$$

При решении этой системы табличным симплекс-методом получен оптимальный план производства по видам продукции: $x_1^* = 10$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 4$, $x_4^* = 0$, при этом величина прибыли составила F = 1320, а резерв ресурсов сырья составил 26 единиц, что свидетельствует об его излишках. Возникает ряд естественных вопросов: останется ли решение оптимальным, если уменьшится удельный вклад в прибыль одной из переменных модели; к каким последствиям приведет сокращение объема ресурсов; что произойдет с оптимумом, если ввести в модель новую управляемую переменную. Названные задачи решаются методами анализа устойчивости области принимаемых решений при отклонении распределяемых ресурсов. При этом интерес представляют ситуации: что произойдет на предприятии, если: а) 6 человек из 16 работающих отвлечь на выполнение других работ; б) поставку ресурсов снизить на 20%; в) производительность оборудования увеличить на 50%, и как это отразится на выпуске продукции. Иными словами, желательно знать область оптимальных решений, устойчивых к отклонениям ресурсных ограничений.

Как известно, каждой исходной задаче линейного программирования соответствует определенная двойственная задача. Ее переменная, называемая двойственной переменной, позволяет оценить влияние изменения каждого вида ресурса на целевую функцию (в связи с этим двойственные переменные часто называют двойственными оценками, при этом существенно, что для нахождения двойственных оценок не требуется решать двойственную задачу). Значения двойственных оценок уже получены в симплекс-таблице оптимального решения исходной задачи. Узнать значение двойственных оценок можно следующим образом. Если некоторый i-й ресурс используется не полностью, то дополнительная переменная в ограничении для данного ресурса больше нуля. В анализируемом примере таким ресурсом выступает сырье b_2 = 110 и его резерв y_2 = 26 (если бы сырья было не 110, а 112, то резерв равнялся бы не 26, а 28, при этом увеличения целевой функции не произошло бы).

Таким образом, если по определенному ресурсу имеется резерв, то дополнительная переменная является базисной, а ее двойственная оценка равняется нулю. В рассматриваемом примере трудовые ресурсы и оборудование использованы полностью, поэтому их дополнительные переменные равны нулю. Если ресурс используется полностью, то его изменение (увеличение или уменьшение) повлияет на объем выпускаемой продукции и в конечном счете на целевую функцию: она увеличится или уменьшится на размер собственной оценки. Значения дополнительных переменных и двойственных оценок показывают, что при росте трудовых ресурсов на единицу целевая функция возрастает на 20 единиц, достигнув значения F = 1340, а при их уменьшении на единицу получим F = 1300. Рост оборудования на единицу вызовет увеличение целевой функции на 10 единиц, т. е. получим F = 1330, а при его снижении на единицу F = 1310.

Анализ чувствительности принимаемых решений

При управлении производством важно уметь принимать решения в условиях отклонения ресурсов от первоначально запланированных. Пусть математическая модель задачи распределения ресурсов задана критерием оптимальности

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 60.00x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4, \quad (11)$$

системой функциональных ограничений

$$\begin{aligned} 1,00x_1 + 1,00x_2 + 1,00x_3 + 1,00x_4 &\le 16 + \Delta B_1 = B_1, \\ 6,00x_1 + 5,00x_2 + 4,00x_3 + 3,00x_4 &\le 110 + \Delta B_2 = B_2, \quad (12) \\ 4,00x_1 + 6,00x_2 + 10,00x_3 + 13,00x_4 &\le 100 + \Delta B_3 = B_3 \end{aligned}$$

и ограничениями неотрицательности переменных

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0. \quad (13)$$

Блок формирования исходных данных задачи распределения ресурсов (11)-(13) задает начальное и конечное значение изменяемого параметра, а также шаг изменения параметра каждого функционального ограничения. Разности между начальными и конечными значениями изменяемых параметров определяют суммарные отклонения соответствующих ресурсных ограничений, которые обозначены для трудовых ресурсов через ΔB_1, для поставляемых сырьевых ресурсов – через ΔB_2, для используемого оборудования – через ΔB_3.

В результате деления отклонения ресурсного ограничения ΔB_j на некоторое число [4], равное порядка 3 ÷ 5, получим величину шага изменения параметра Δb_j. Например, для изменяемого параметра трудовых ресурсов можно выбрать начальное значение B_1 = 16, конечное значение – 10.00, шаг изменения параметра Δb_1 = 2.00. Тогда расчетные значения трудовых ресурсов будут: B_{11} = 16, B_{12} = 14, B_{13} = 12, B_{14}=10.

Для изменяемого параметра сырьевых ресурсов можно выбрать начальное значение B_2 = 110, конечное значение – 70,00, шаг изменения параметра Δb_2 = 20,00, расчетные значения трудовых ресурсов B_{21}=110, B_{22} = 90, B_{23} = 70. При изменении количества используемого оборудования можно выбрать начальное значение B_3 = 100, конечное значение – 80,00, шаг изменения параметра Δb_3 = 10,00, расчетные значения трудовых ресурсов B_{31} = 100, B_{32} = 90, B_{33} = 80.

Вычисленные значения целевой функции при варьировании трудовых и сырьевых ресурсов, а также количество используемого оборудования в указанном диапазоне значений занесены в табл. 2. Основное назначение блока 8 (рисунок) состоит в том, чтобы результаты вычислений, поступающие с блока 9, расположить в соответствии со структурой табл. 2. Блок 4 решает задачу о том, является ли система функциональных ограничений хорошо или плохо обусловленной. Плохо обусловленные системы функциональных ограничений корректируются блоком 5.

Таблица 2

Чувствительность плана к отклонению ресурсных ограничений

Ресурсы	x_1	x_2	x_3	x_4	F(x)
B_{11} = 16, B_2 = 110, B_3 = 100	10,00	0,00	6,00	0,00	1320,00
B_{12} = 14, B_2 = 110, B_3 = 100	6,67	0,00	7,33	0,00	1280,00
B_{13} = 12, B_2 = 110, B_3 = 100	3,33	0,00	8,67	0,00	1240,00
B_{14} = 10, B_2 = 110, B_3 = 100	0,00	0,00	10,00	0,00	1200,00
B_{21} = 110, B_1 = 16, B_3 = 100	10,00	0,00	6,00	0,00	1320,00
B_{22} = 90, B_1 = 16, B_3 = 100	10,00	0,00	6,00	0,00	1320,00
B_{23} = 70, B_1 = 16, B_3 = 100	6,82	0,00	7,27	0,00	1282,00
B_{31} = 100, B_1 = 16, B_2 = 110	10,00	0,00	6,00	0,00	1320,00
B_{32} = 90, B_1 = 16, B_2 = 110	11,67	0,00	4,33	0,00	1220,00
B_{33} = 80, B_1 = 16, B_2 = 110	13,33	0,00	2,67	0,00	1120,00

Заключение

Таким образом, уменьшение объема трудовых ресурсов на шесть человек, или на 37,5% ((6/16)·100 = 37,5), приведет к ухудшению целевой функции только на 9,09% ((1320-1200) × 100 /1320 = 9,9), а на пять человек, или на 31% ((5/16)˝ 100 = 31,2), ухудшит значение целевой функции на 7,6% ((1320 -1220) ·100 · 1320 = 7,575), что совсем не очевидно для любого субъекта управления. При увеличении количества используемого оборудования с целью повысить прибыль выпуск продукции x_1 целесообразно уменьшить, а продукции x_3 —увеличить. Этот факт объясняется тем, что согласно исходным данным прибыль с единицы продукции c_1 = 70, c_3 = 120, т. е. единица продукции вида П3 в 1,7 раза (120/ 70 = 1,7) дает большую прибыль по сравнению с единицей продукции вида П1. Поэтому целесообразно предусмотреть перераспределение выпуска продукции.

Список литературы: 1. *Авраменко В.П.* Управление производством в условиях неопределенности. К: УМК ВО, 1992. 48 с. 2. *Авраменко В.П., Тимофеев В.А., Панасенко В.А., Татанов И.И.* Моделирование организационно-технологических систем. Рязань: Русское слово, 1996. 224 с. 3. *Аль Салаймех Сафван, Калачева В.В.* Моделирование оптимального распределения ресурсов в логистических системах. В кн. Вестник ХГПУ. Вып. 93. Харьков: Изд-во ХГПУ, 2000. С. 199-204; 4 *Шелобаев С.И.* Математические методы и модели в экономике, финансах и бизнесе. М.: ЮНИТИ, 2000. 367 с.

Поступила в редколлегию 26.05.2000

Авраменко Валерий Павлович, д-р техн. наук, профессор кафедры ИУС ХТУРЭ. Научные интересы: исследование операций. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-51.

Аль Салаймех Сафван, аспирант кафедры ИУС ХТУРЭ. Научные интересы: компьютеризированные системы управления. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-51.

Штангей Светлана Викторовна, соискатель кафедры ИУС ХТУРЭ. Научные интересы: компьютерные системы и сети. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-51, 41-23-11.

УДК 681.325:519.713

И.В. ХАХАНОВА, В.А. ПУДОВ, А.Л.ЧАМЯН

МЕТОД АНАЛИЗА ДОПОЛНЕНИЙ ТЕСТА ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЕГО КАЧЕСТВА

Предлагается метод анализа дополнений к состояниям координат тест-векторов, верифицирующих цифровые устройства, в целях диагностирования их неисправностей. Модель устройства представлена структурой взаимосвязанных примитивных элементов вентильного и функционального уровня, описанных кубическими покрытиями в троичном алфавите.

1. Введение

Для поиска дефектов в устройствах, реализованных на основе программируемых логических интегральных схем – Field Programable Gate Array (FPGA), Complex Programable Logic Device (CPLD), необходимо иметь средства моделирования искажений сигналов, в качестве которых могут выступать дополнения к исправным состояниям линий цифрового устройства при подаче на него теста.

Предлагаемый кубический метод моделирования дополнений обладает свойствами:

– за одну итерацию выполняется анализ влияния дополнений всех линий на исправное состояние проекта при подаче очередного входного набора, так же как в дедуктивном и совместном методах [1-5];

– метод инвариантен по отношению к вентильному, функциональному и алгоритмическому уровням описания устройства;

– моделирование осуществляется в троичном алфавите, что повышает адекватность результатов анализа в целях диагностирования цифрового устройства;

– технологичность метода делает возможным его аппаратурную реализацию в виде IP-core.

2. Математический аппарат анализа примитива

Автоматная модель функционального примитива представляется в виде:

M=<X, Y, Z, f, g>,

где $X=(X_1,X_2,...,X_i,...,X_m)$, $Y=(Y_1,Y_2,...,Y_i,...,X_h)$, $Z=(Z_1,Z_2,...,Z_i,...,Z_k)$ – множества входных, внутренних и выходных автоматных переменных, отношения между которыми описываются уравнениями:

$$Y(t)=f[X(t-1), X(t), Y(t-1), Z(t-1)];$$