

УДК 515.2

## МЕТОДИ ПОБУДОВИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОРНАМЕНТІВ З МЕТОЮ ЗАХИСТУ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

**Челомбiтько В.Ф.**

к.т.н., доцент, кафедра Медіасистем та технологій,  
Харківський національний університет радіоелектроніки

**Ткаченко В.П.**

к.т.н., професор, кафедра «Медіасистеми та технології», Харківського  
національного університету радіоелектроніки

***Анотація.** Наведено методи побудови геометричних орнаментів захисту цінних паперів: побудови візерункових розеток за допомогою ліній з керованими кривинами; побудови візерунків як еквідистант кривих, описаних параметричними рівняннями; побудови візерунків за допомогою функцій комплексної змінної та їх реалізації у середовищі математичного пакету Maple.*

***Ключові слова:** ЛІНІЇ З КЕРОВАНИМИ КРИВИНАМИ, ЕКВІДИСТАНТА, ВІЗЕРУНОК, ГЕОМЕТРИЧНІ ОРНАМЕНТИ, РЕКУРСИВНІ ПОБУДОВИ, MAPLE.*

### Вступ

Орнаменти є надбанням світової культури, адже вони відображають особливості характеру цілих народів. Орнамент – це візерунок, що складається з ритмічно впорядкованих елементів. Орнамент будується за особливими законами, за допомогою певних засобів. Головний засіб – це геометричне перетворення. Орнаменти бувають спокійні і виважені, але бувають імпульсивні і різкі для сприйняття [1]. Для України орнаменти займають особливе місце, адже вони визначають прояви знакових систем трипільської культури, і є відомими ще з стародавніх часів [2-4]. Навряд чи можливо переоцінити глибину геометричної уяви й винахідливість, віддзеркалених у візерунках орнаментів. Їхня побудова не тривіальна в математичному відношенні. Математик Г. Вейль зазначає, що мистецтво орнаменту містить у неявному вигляді найдавнішу частину відомої нам вищої математики.

У процесі історичного та культурного розвитку у місцевостях України утворились характерні орнаментальні мотиви і композиції, найбільш улюблена і поширена колірна гама, специфічні техніки виконання. Майстри розвивали і вдосконалювали кращі досягнення своїх попередників. Геометричні орнаменти складались з різноманітних геометричних фігур: трикутників, ромбів, квадратів, кружечків, тощо. У назвах орнаментальних мотивів вражає образна спостережливість, тонке поетичне почуття. Це «барвінок», «хмелик», «курчаний брід», «гарбузове листя», «зозулька», тощо [1]. Здавна елементи орнаменту символізували певні явища природи та природні істоти. Наприклад, «вужики»

або «кривульки» – то знаки води, тобто життя. А чотирикутники, кружечки – то символ Сонця [2].

Здавалося б, що стародавні орнаменти вже досконалі і не схильні до розвитку і удосконалень. Однак у середині ХХ століття з математики в мистецтво прийшов Мауріц Корнеліс Ешер (1898-1972) і здивував світ створенням небачених раніше орнаментів. Ящірки й птахи, риби й люди в його графічних аркушах переплетені у щільні, математично строгі візерунки. І стало зрозуміло, що світогляд народу, його своєрідність яскравіше всього виявляється саме в орнаментальних композиціях. Слід зазначити, що орнамент, незважаючи на термін (лат. *ornamentum* – прикраса), не є мистецтвом прикраси. Це мистецтво організації. Він нічого не зображує, але організує. Тому структура в орнаменті набагато важливіша всякої зображальності й подібності. Орнамент, як мистецтво порядку, протистоїть хаосу. Він включає річ до стрункої системи світу, у стійку світову ієрархію. Недарма, при словах “гармонія світу” відразу спонтанно виникає образ орнаменту.

З іншого боку, основою орнаменту завжди служить щось цілком реальне, більш того, повсякденне. У мистецтві орнаменту таку основу називають мотивом. І тут дуже важливо, щоб реальний предмет, обраний як мотив, не мав яскраву індивідуальність, інакше він буде відволікати увагу від всієї орнаментальної структури в цілому, яка важливіша будь-якої найяскравішої індивідуальної риси.

Цікаво, хто зараз більше займається вивченням орнаменту – мистецтвознавці або математики? У розумінні структури й технології створення (сприйняття) орнаментів математики, мабуть, досягли більшого. Тому доцільним буде дослідити, як математична правильність входить до самої суті мистецтва орнаменту, стає виразним засобом.

### **Мета та задачі дослідження**

Машинні візерунки використовують для сучасної реклами, як заставки в книгах і журналах, в декоративних малюнках, які наносяться на тканину та посуд, тощо. Організуються виставки художньої машинної графіки, адже орнаменти, які побудовані комп'ютером, часто не підпадають під якийсь стиль, і за формою можуть бути набагато більш різноманітніші, ніж придумані художниками. Все більшого поширення набувають візерункові розетки – тобто орнаментальні мотиви переважно у вигляді квітки, що розпустилася, з однаковими симетричними відносно повороту пелюстками (застосовуються в архітектурі, ювелірних виробках, тощо).

Метою та завданням дослідження є розглянути концептуальні моменти створення орнаментів – від звичайної графіки до технологій комп'ютерної графіки.

Відомі результати доцільно було б доповнити шляхом створення алгоритмів побудови візерункових розеток з використанням обчислювальної

техніки. Наприклад, за допомогою ліній з керованою кривиною залежно від параметрів, що входять до їх описів. Адже при деяких розрахунках для опису кривих доцільно застосовувати їхні натуральні рівняння. Інакше кажучи, такі рівняння, які описують кривину лінії залежно від натурального параметра  $s$ , що визначає довжину даної кривої починаючи з її деякої точки.

Розробити спосіб побудови візерункових розеток за допомогою ліній, вздовж яких їх кривини змінюються за законом функції виду

$$[1 + p \arccos(\cos(s))]^w,$$

де  $w > 0$ .

### Основна частина

В орнаменті людство стало бачити щось більше, ніж просто прикрасу, адже в основі будь-якого орнаменту лежить чітка ритмічна закономірність. А оскільки різноманітні ритми становлять саму суть будь-якого витвору мистецтва, то кожний з них можна розглядати як своєрідний орнамент. Так виникли практично всі конструктивістські й абстракціоністські напрямки в мистецтві ХХ століття. Художники цих напрямків розкладали живе враження на дрібні складові частини й потім складали з них мальовниче полотно, скульптурний об'єм, архітектурний простір, танок або кінофільм. Більш того, сьогодні, на початку ХХІ століття, можна визначити саму глибинну особливість мислення людини минулого сторіччя – орнаментальність. Усе в фізичному, психічному й духовному світі людини складено із простих і досить зрозумілих елементів (мотив орнаменту), які, так чи інакше взаємодіючи між собою, становлять багатомірну картину.

Основними класифікаційними ознаками орнаменту служать його походження, призначення й зміст. З врахуванням усього цього орнаментальні форми можна об'єднати в такі різновиди.

Технічний орнамент. Виникнення форм цього орнаменту обумовлено трудовою діяльністю людини. Наприклад, фактура поверхні предметів із глини, виготовлених на гончарному крузі, малюнок найпростіших клітинок тканини під час виготовлення її на стародавньому ткацькому верстаті, спіралеподібні завитки, що створюються під час плетіння мотузок тощо.

Символічний орнамент. Формуванню символічного орнаменту сприяла спільність природи умовно-символічних зображень витворів орнаментального мистецтва в цілому, а самі орнаментальні образи, як правило, являють собою символи або систему символів. Такого роду зображення здатне в лаконічній формі виразити дуже широкі, різноманітні поняття. З'явившись у Стародавньому Єгипті й інших країнах Сходу, символічний орнамент і сьогодні продовжує відігравати важливу роль.

І, нарешті, найбільш цікавий для нас геометричний орнамент. Спочатку цей орнамент виник завдяки злиттю технічного й символічного орнаментів,

утворивши більш складні комбінації зображень, позбавлені конкретних оповідальних значень. Відмова від сюжетної основи в цьому виді орнаменту дозволила акцентувати увагу на регулярному чергуванні окремих природних мотивів. Адже будь-яка геометрична форма – це спочатку реально існуюча форма, гранично узагальнена й спрощена.

Стилізацією в орнаменті називають узагальнене зображення реальних предметів або фігур. Адже для узагальнення необхідно відволіктися від конкретного предмета, побачити його в ряді таких самих предметів, виділити основні риси. Інакше кажучи, стилізація припускає досить високий рівень осмислення навколишнього світу. Прагнення передати лише основні риси предмета, видаливши все несуттєве, є загальним для мистецтва. Художник намагається показати птаха взагалі, людину взагалі, рослину взагалі.

Особливо багато займалися законами й видами симетрії вчені-кристалографи, адже від різного розташування тих самих атомів дуже залежать і властивості мінералу. Тобто різні види симетрії спричиняють різні фізичні властивості. Вважається, що дзеркальна поверхня відбиває не тільки нас самих, але й весь наш світ, створюючи грандіозну ілюзію. Але для одержання найвигадливіших ілюзій можна використовувати не одне, а два й більше дзеркал, по-різному розташовуючи їх відносно одне одного.

Саме так здійснив в 1819 році Девід Брюстер і винайшов відомий сьогодні кожному калейдоскоп. Дитячі іграшки калейдоскопи, українські хороводи, грецький меандр і мелодії в строгому поліфонічному стилі – все це вираження симетрії повороту. Тому й сприймаються різні за видами симетрії орнаменти по-різному.

Кільцевий орнамент (розетка), заснований на симетрії повороту, створює відчуття центричності, замкнутості, статичності, цілісності. Ми сприймаємо його як якийсь представлення глядачеві. Вважаємо, що він звернений до нас, у чоло, подібно особі людини, і направляє погляд споглядача в глибину.

Нескінченний орнамент (бордюр, сітка), створюючи враження рухливості, фрагментарності, спрямовує погляд глядача уздовж площини. Дзеркальна симетрія дає відчуття врівноваженості й спокою, осьова симетрія народжує враження обертового руху, а перенос (трансляція) сприймається як поступальний рух.

Основу геометричного орнаменту становить вузол, що сприймався в стародавності як один з найсильніших магічних засобів. Не випадково плетіння, в'язання, ткацтво завжди вважалися ремеслами, тісно пов'язаними з обрядовою стороною життя. Власне, всі три операції з вузлами (плетіння, в'язання, ткацтво) є створенням симетричної орнаментальної композиції на основі вузла як мотива.

Геометричний вузловий орнамент став також основою перших літер і алфавітів, що дотепер зберегли в накресленні “вузлики” і “петельки”. Природно, що й літери легко складаються в орнамент. Поверхневий геометричний орнамент складається вже з істотно стилізованих вузликів і

переплетень. Це хрести, трикутники, кола, нанесені, наприклад, на поверхню глиняного горщика, які відіграють роль оберегу.

Однак у такому образотворчому орнаменті бачиться й небезпека для орнаментального мистецтва взагалі. Мотив тут практично не стилізований, а лише значно зменшений. Це не дозволяє глядачеві відволіктися від мотиву й розглядати всю композицію в цілому. Увесь час хочеться розглянути уважно саме крихітне зображення. Напевно, тому художники початку ХХ століття швидко відмовилися від образотворчого орнаменту й зосередили увагу на різних видах геометричного. Такий орнамент чудово сполучався з абстрактними композиціями й знахідками кубістів. Багато полотен А. Екстер, К. Малевича, М. Матюшина, В. Кандинського та інших більшою чи меншою мірою є саме орнаментальними композиціями.

У фізиці, хімії, економіці та багатьох інших галузях використовується безліч функцій і залежностей, що описують певні процеси, і часто їхнє графічне подання виявляється корисним. Крім того, графічні зображення, одержані за допомогою комп'ютера, можуть нести і певний естетичний зміст.

Машинні візерунки використовують для сучасної реклами, як заставки, кінцівки, фоновий рисунок в книжках, журналах і цінних паперах, в декоративних малюнках, які наносяться на тканину та посуд, тощо. Останнім часом організуються виставки художньої машинної графіки, адже орнаменти, які побудовані комп'ютером, часто не підпадають під якийсь стиль, і за формою можуть бути набагато різноманітнішими, ніж вигадані художниками. Для оформлення приміщень (паркетних підлог, стін та стель) все більшого поширення набувають візерункові розетки – тобто орнаментальні мотиви переважно у вигляді квітки, що розпустилася, з однаковими симетричними відносно повороту пелюстками (застосовуються в архітектурі, ювелірних виробках, тощо).

Відомі результати доцільно було б доповнити шляхом створення алгоритмів побудови візерункових розеток з використанням обчислювальної техніки. Наприклад, за допомогою ліній з керованою кривиною залежно від параметрів, що входять до їх описів. Адже при деяких розрахунках для опису кривих доцільно застосовувати їхні натуральні рівняння. Інакше кажучи, такі рівняння, які описують кривину лінії залежно від натурального параметра  $s$ , що визначає довжину даної кривої починаючи з її деякої точки.

### **Побудова візерункових розеток за допомогою ліній з керованими кривинами**

Подальшим узагальненням побудови кривих з керованою кривиною буде вивчення більш складних залежностей входження (класичної) кривини в описи результуючих кривих. У даній роботі розглянутий випадок, коли у формули опису результуючої лінії входить кривина з додатнім степенем (формули виду  $[1 + p \arccos(\cos(s))]^w$ ).

Відомо [5], що натуральне рівняння кривої на площині має вигляд

$$\frac{1}{R} = f(s), \quad (1)$$

де  $R$  – радіус кола, дотичного до гладкої кривої в певній її точці;

функція  $f(s)$  визначає закон зміни залежно від натурального параметра  $s$  кривину кривої (тобто величину  $k = 1/R$ ).

За визначенням (класичної) кривини дуги кривої у точці  $M$  називається величина

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|, \quad (2)$$

де  $\alpha$  – кут між дотичними в точках  $M$  і  $M_\alpha$ ;

$\Delta s$  – довжина дуги  $MM_\alpha$ .

З використанням похідної формулу (2) можна записати як

$$k = |\dot{\alpha}|, \quad (3)$$

де  $\alpha(s)$  – кут повороту дотичної у точці  $M$ , що залежить від шляху, пройденого по кривій;

$\dot{\alpha}$  – похідна функції  $\alpha(s)$  по параметрі  $s$ .

Рівняння (3) допомагає описати криву, що задана натуральним рівнянням.

Дійсно, з рівняння  $k = \dot{\alpha}(s) = f(s)$  обчислюється функція

$$\alpha(s) = \int_0^s f(s) ds + \alpha_0, \quad (4)$$

за допомогою якої обчислюється кут нахилу дотичній залежно від довжини дуги.

Тоді відповідно до відомих [4] залежностей

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad \text{і} \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha \quad (5)$$

параметризацію кривої можна задати у вигляді

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos \alpha(s) ds + x_0; \\ y(s) &= \int_0^s \sin \alpha(s) ds + y_0, \end{aligned} \quad (6)$$

або, з врахуванням (4), рівняння шуканої кривої має вигляд

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos \left( \int_0^s f(s) ds + \alpha_0 \right) ds + x_0; \\ y(s) &= \int_0^s \sin \left( \int_0^s f(s) ds + \alpha_0 \right) ds + y_0, \end{aligned} \quad (7)$$

Легко переконатися в тому, що обертання кривої спричиняє зміна у формулах (7) постійної  $\alpha_0$ , а її паралельний перенос пов'язаний зі зміною параметрів  $x_0$  і  $y_0$ . Рівність цих постійних нулю визначає розташування кривої так, що початкова точка для відліку дуги розташована в початку координат, а додатній напрямок дотичної у ній збігається з додатнім напрямком осі  $Ox$ .

Подальшим розвитком поняття кривих з керованими кривинами буде розгляд *степеню кривини лінії*.

*Визначення.* Нехай кривина уздовж кривої змінюється за законом  $k^w(s)$ , де  $w > 0$  і  $s$  – натуральний параметр. За допомогою функції  $k^w(u)$  задамо вираз  $\alpha_w(s)$  у вигляді

$$\alpha_w(s) = \int_0^s k^w(u) du, \quad (8)$$

Тоді параметр  $w$  назвемо степенем кривини лінії  $\{x(s), y(s)\}$ , отриманої в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{ds} x(s) = \cos(\alpha_w(s)); \quad \frac{d}{ds} y(s) = \sin(\alpha_w(s)). \quad (9)$$

Зазначимо, що кривина лінії другого степеня застосовується при побудові еластик Ейлера, а кривини ліній більш високих степенів використовуються при побудові треків елементарних часток у магнітних полях (дані з Інтернету).

Для побудови кривих додатного степеня кривини було складено Maple-програму, фрагмент якої у вигляді процедури-функції має вигляд:

```

profil := proc(kap, a, b)
local sys, p, ics, pl:
sys:= diff(alpha(s), s) = kap(s)^w,
diff(f1(s), s) = cos(alpha(s)),
diff(f2(s), s) = sin(alpha(s)):
krai:= f1(0)=0, f2(0)=0, alpha(0)=0;
ans:=dsolve({sys, krai}, {f1(s), f2(s), alpha(s)},
type=numeric);
pic:=odeplot(ans, [f1(s), f2(s)], s=a..b,
numpoints=12000, thickness=2, color=black):
display(pic, scaling=constrained);
end:

```

У цьому фрагменті програми через **kap** позначено (класичну) кривину кривої, через **a** і **b** – границі зміни параметра довжини дуги, систему диференціальних рівнянь Френе позначено через **sys**, розв’язок цієї системи позначено через **ans**, а підготовлену для візуалізації інформацію позначено як **pic**.

Звертатися до процедури-функції треба, наприклад, так:

```
w := 2.;
kap := s -> 1 + p*arccos(cos(s));
profil(kap, 0, 66*Pi);
```

У результаті у системі декартових координат  $\{f_1(s), f_2(s)\}$  буде побудована лінія, що відповідатиме параметрам **kap**, **p** і **w**. Але досвід роботи показує, що незначні зміни параметра  $p$  призводять до значних змін в зображенні візерункової розетки. Тому пропонується будувати  $N$  кадрів анімаційних зображень на інтервалі  $[A..B]$  зміни параметра  $p$ .

Для цього складено Maple- програму:

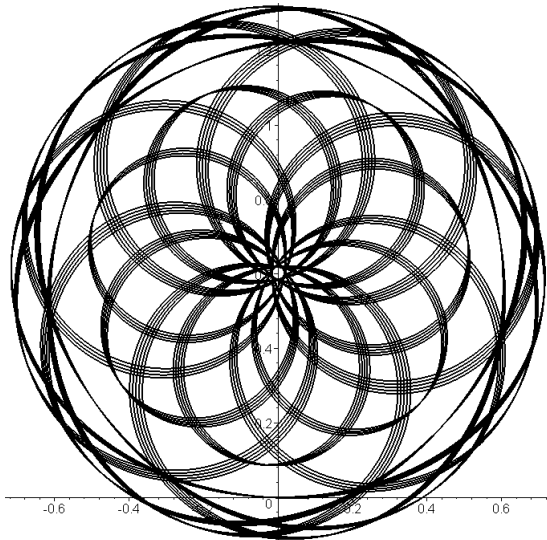
```
for i from 0 to N do
  p := evalf(A + (B - A)*i/N);
  z := convert(p, string);
  txt:= cat(`p = `, z);
  kap := s -> 1 + p*arccos(cos(s));
  Gr[i] := display(profil(kap, 0, 66*Pi), title=txt);
end do;

display(seq(Gr[i], i=0..N), scaling=CONSTRAINED,
insequence=true, view=[-1..1, -0.5..1.5]);
```

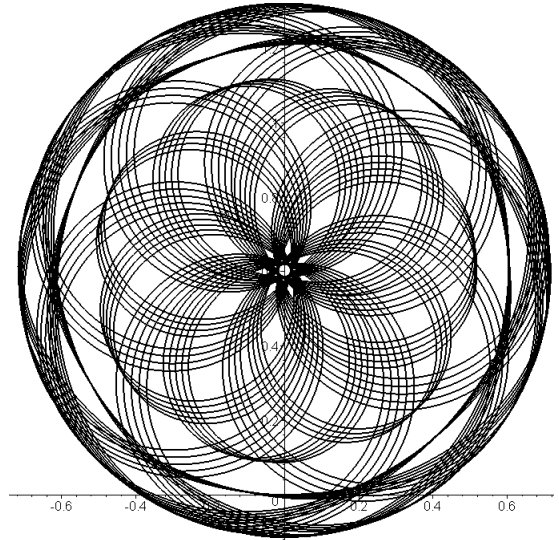
При цьому в кожному кадрі буде зображено значення параметра  $p$ , яке відповідатиме цьому зображенню.

На рис. 1 при **w=1** наведено приклади візерункових розеток на деяких значеннях  $p$  лише з інтервалу  $[0,969...1]$ .

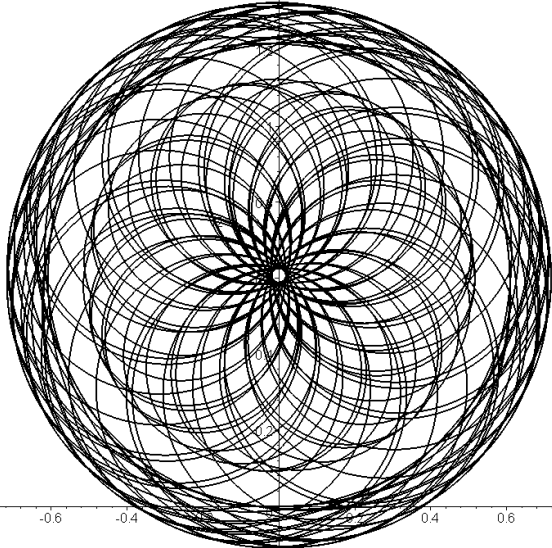
На рис. 2 і 3 наведено приклади візерункових розеток залежно від параметра  $p$  при **w=2** і **w=3**.



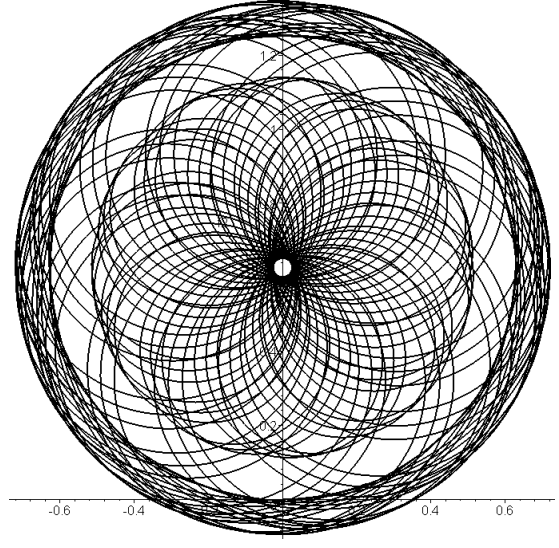
$$p = 1$$



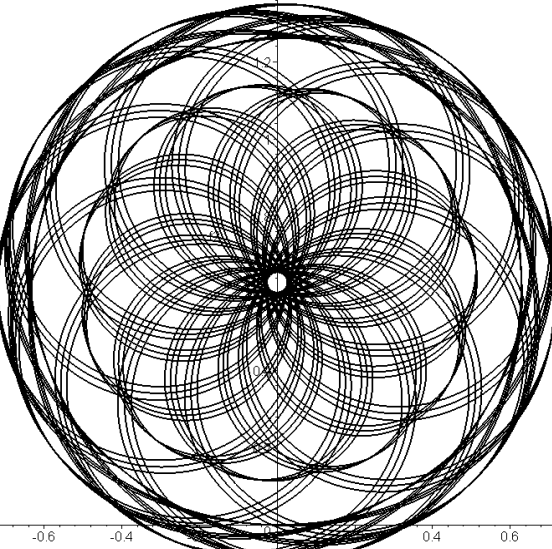
$$p = 0,99944444445$$



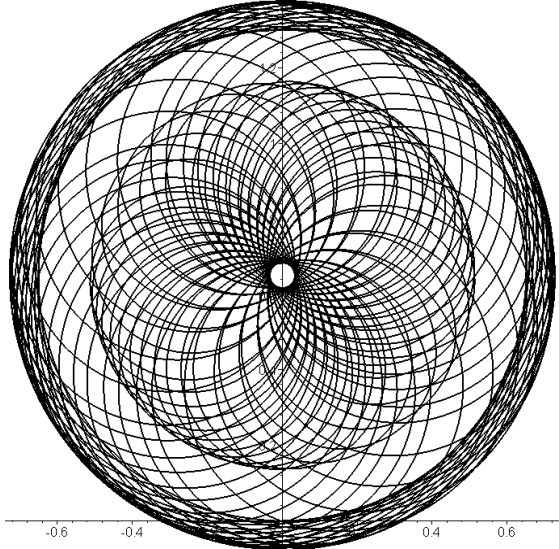
$$p = 0,9966666667$$



$$p = 0,985$$

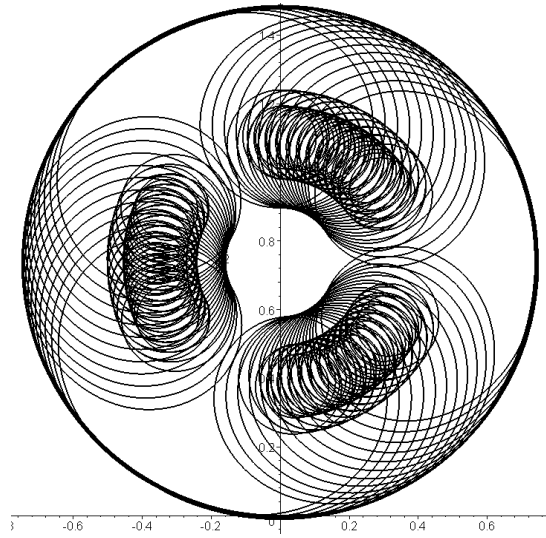


$$p = 0,98333333334$$

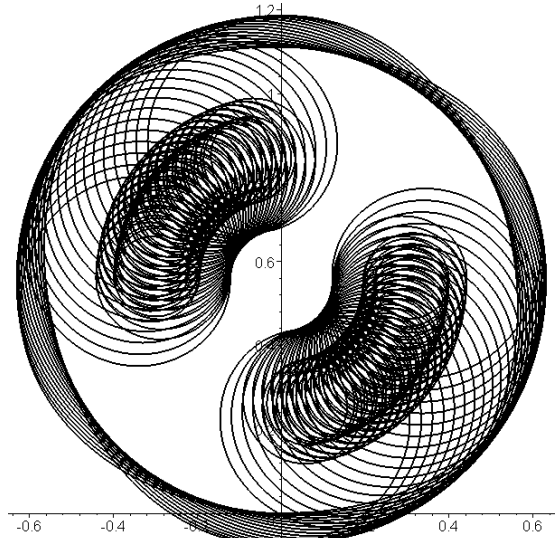


$$p = 0,96944444445$$

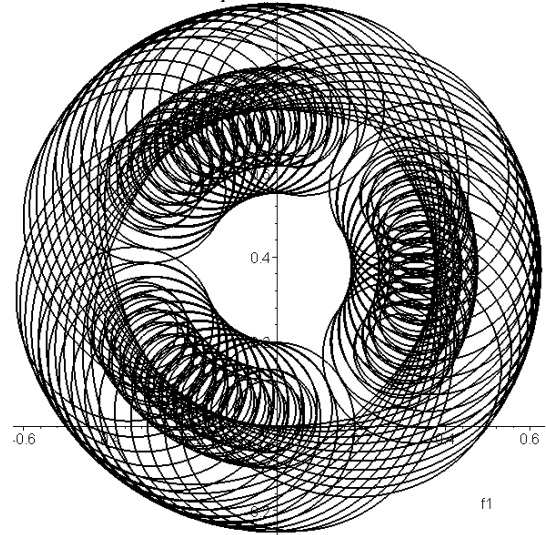
Рисунок 1 – Приклади візерункових розеток залежно від параметра  $p$  при  $w=1$



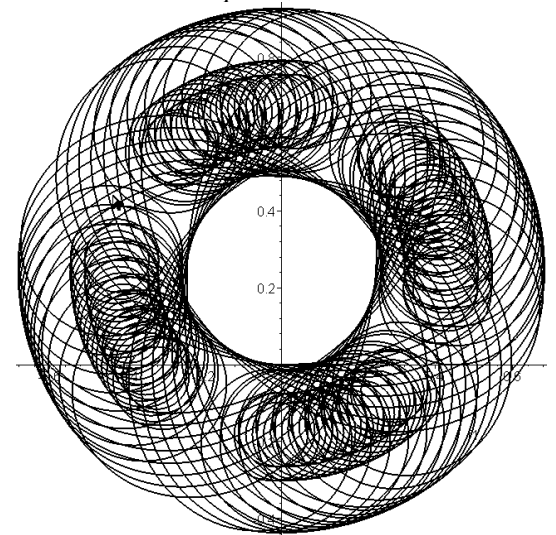
$$p = 0,765$$



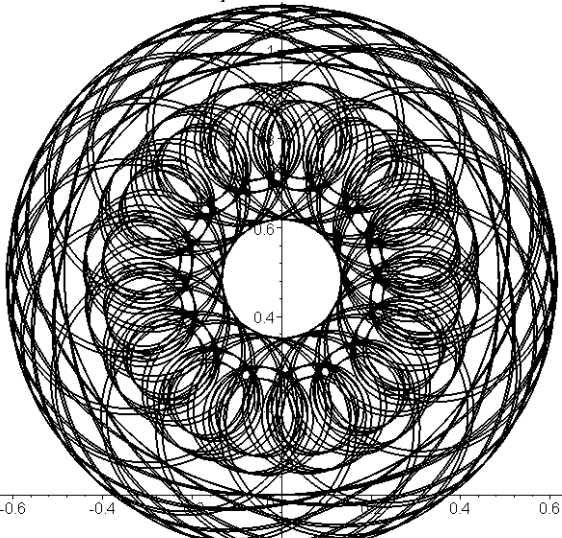
$$p = 0,785$$



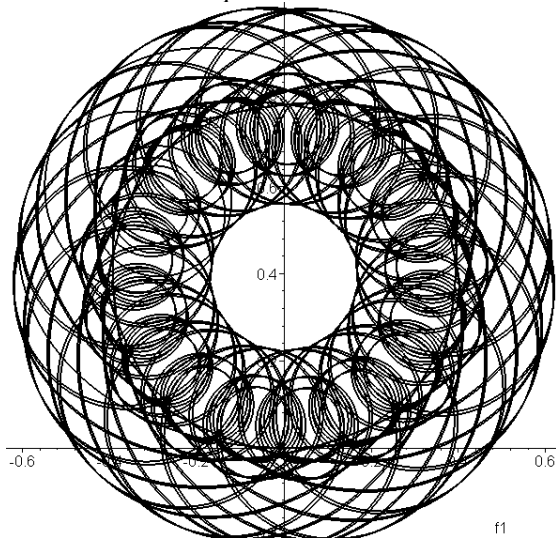
$$p = 0,805$$



$$p = 0,815$$



$$p = 0,793333333$$



$$p = 0,803333333$$

Рисунок 2 – Приклади візерункових розеток залежно від параметра  $p$  при  $w=2$

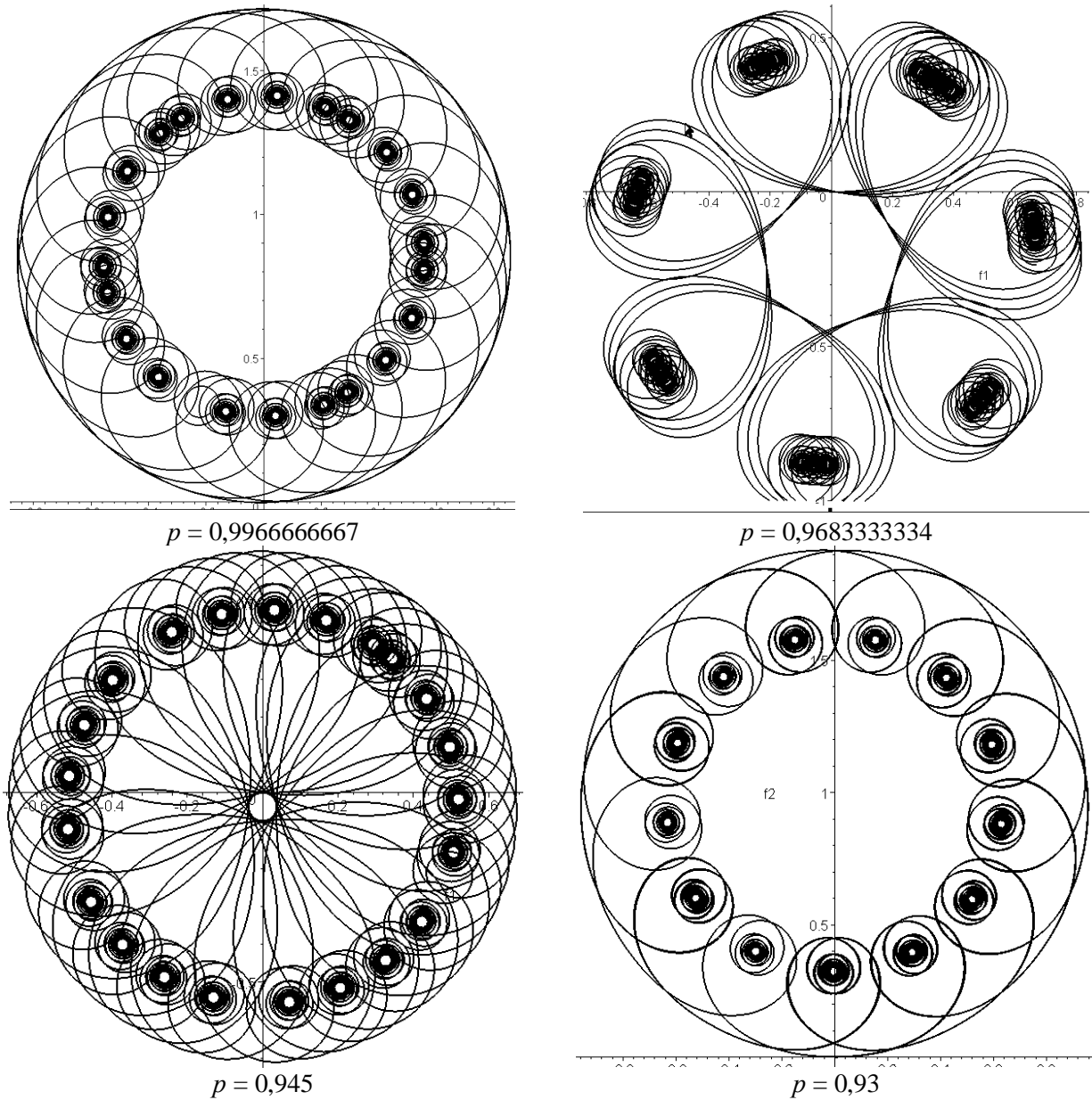


Рисунок 3 – Приклади візерункових розеток залежно від параметра  $p$  при  $w=3$

### Побудова візерунків як еквідистант кривих, описаних параметричними рівняннями

Нехай параметрична крива задана рівняннями  $x = \varphi(t)$  і  $y = \psi(t)$ . Тоді сім'ю еквідистантних кривих можна описати за допомогою рівнянь [2]

$$X = x \pm h \frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}; \quad Y = y \mp h \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}},$$

де  $h$  – «відстань» між еквідистантними кривими.

Приклад 1. Розглянемо криву, описану рівняннями

$$x := \left(2 + \frac{1}{2} \sin(at)\right) \cos\left(t + \frac{\sin(bt)}{c}\right); \quad y := \left(2 + \frac{1}{2} \sin(at)\right) \sin\left(t + \frac{\sin(bt)}{c}\right).$$

На рис. 4-6 наведено візерунки для відповідних параметрів. Причому, ліворуч зображено зовнішню, а праворуч – внутрішні еквідистанти.

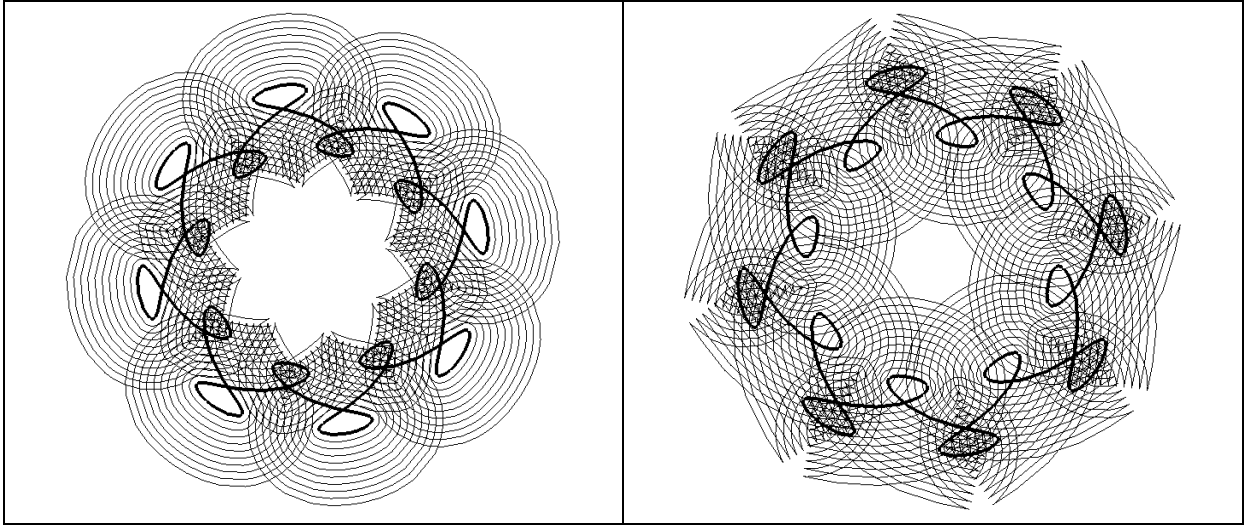


Рисунок 4 – Варіант прикладу 1 з параметрами  $a = 8$ ;  $b = 16$ ;  $c = 4$

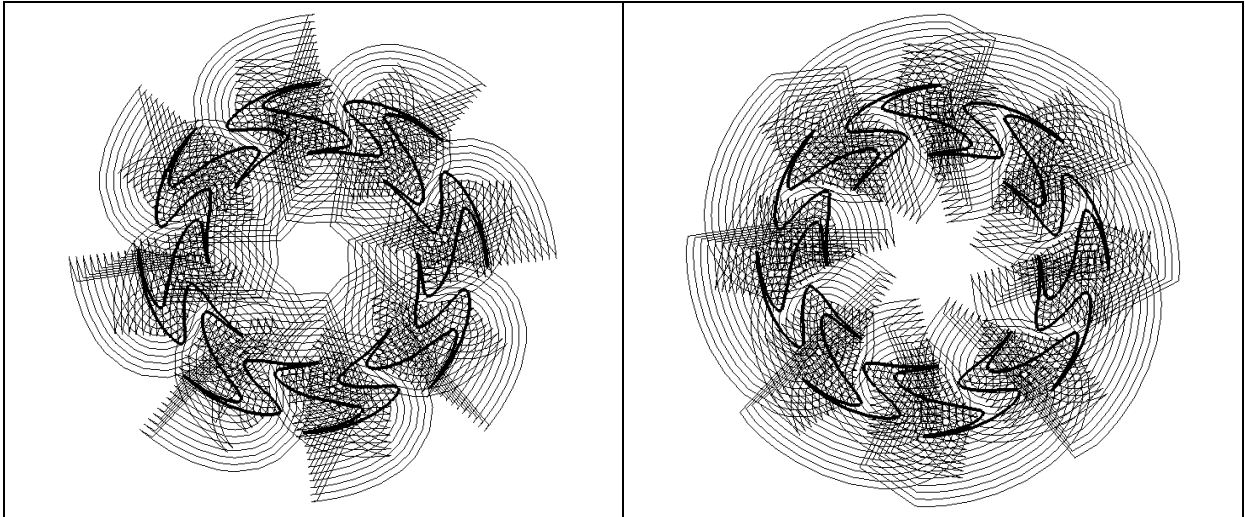


Рисунок 5 – Варіант прикладу 1 з параметрами  $a = 8$ ;  $b = 24$ ;  $c = 4$

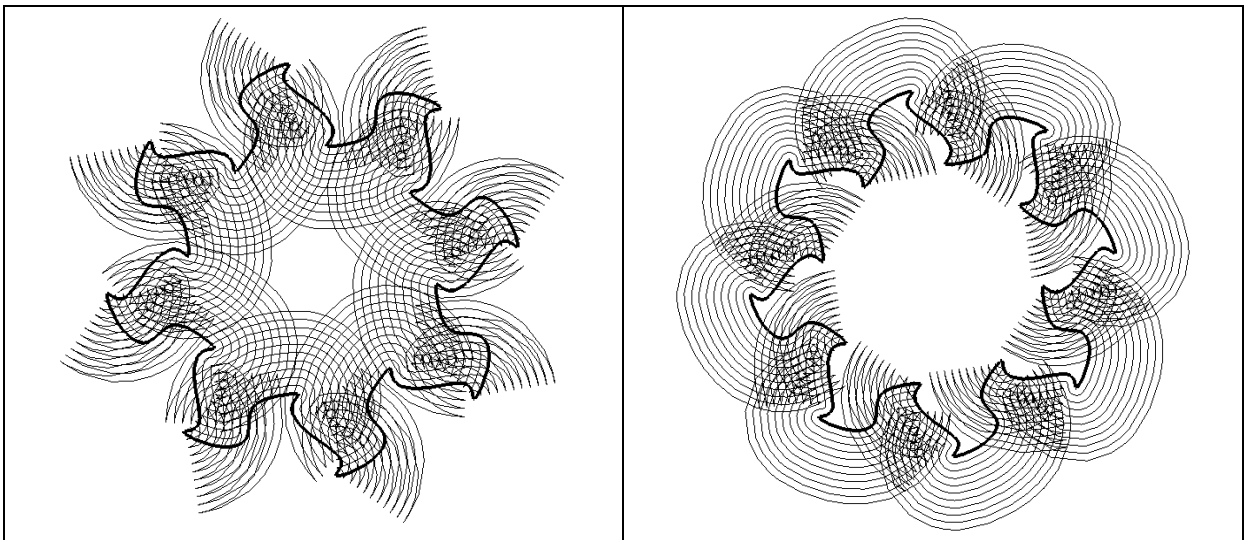


Рисунок 6 – Варіант прикладу 1 з параметрами  $a = 8$ ;  $b = 24$ ;  $c = 14$

Приклад 2. Розглянемо криву, описану рівняннями

$$x := a \cos(t) + \frac{1}{2} \cos(bt) + \frac{1}{3} \sin(ct); \quad y := a \sin(t) + \frac{1}{2} \sin(bt) + \frac{1}{3} \cos(ct).$$

На рис. 7-8 наведено візерунки для відповідних параметрів.

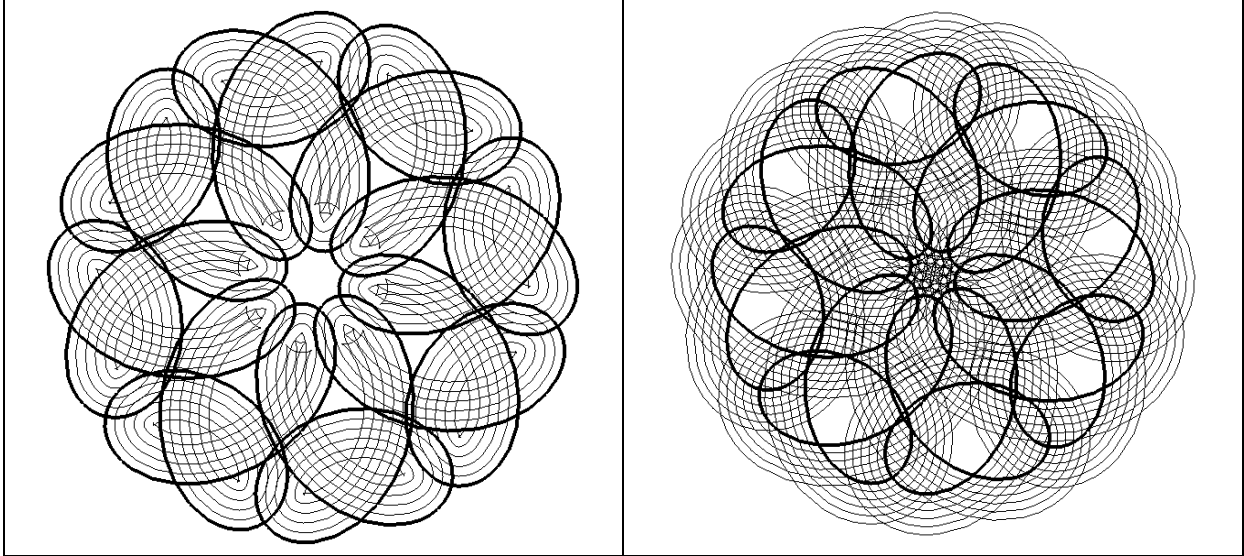


Рисунок 7 – Варіант прикладу 2 з параметрами  $a = 1; b = 17; c = 7$

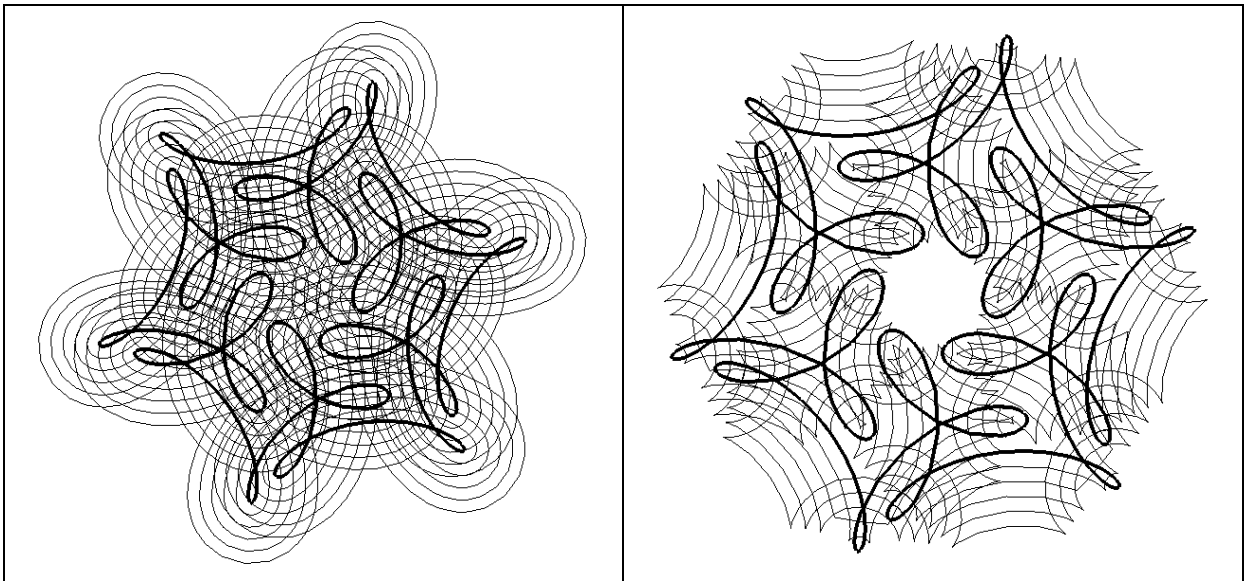
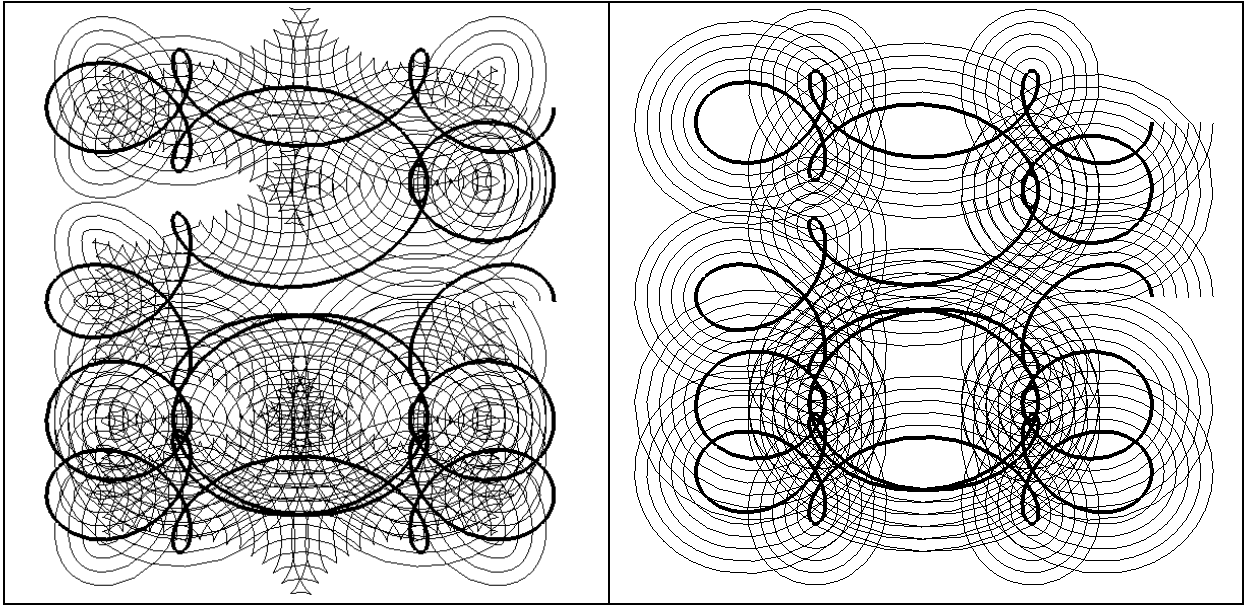
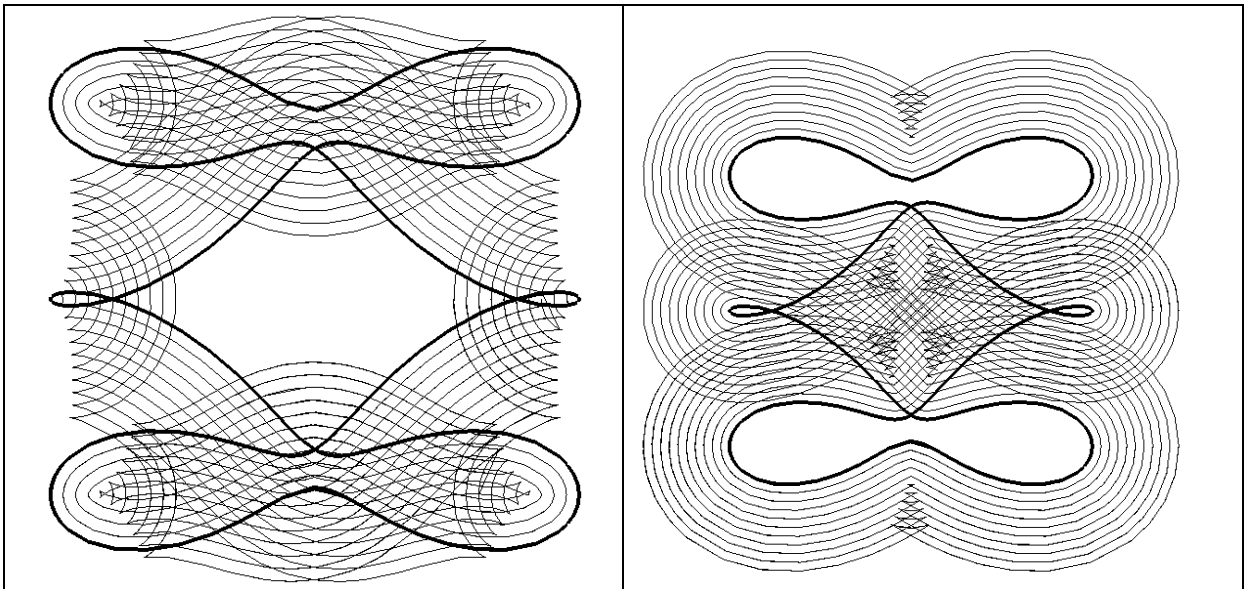


Рисунок 8 – Варіант прикладу 2 з параметрами  $a = 1; b = 7; c = 17$

Приклад 3. Розглянемо криву, описану рівняннями

$$x := c \left( \frac{\cos(bt)}{b} + \frac{a \cos(t)}{c} \right); \quad y := c \left( \frac{\sin(bt)}{b} - \frac{a \sin\left(\frac{t}{b}\right)}{c} \right).$$

На рис. 9-10 наведено візерунки для відповідних параметрів.

Рисунок 9 – Варіант прикладу 3 з параметрами  $a = 5; b = 5; c = 6$ Рисунок 10 – Варіант прикладу 3 з параметрами  $a = 6; b = 3; c = 3$ 

### Побудова візерунків за допомогою функцій комплексної змінної

Нехай візерункова крива на комплексній площині задана за допомогою функції  $f = (\sin(pt) + i\cos(qt))e^{mi\sin 4t}$ , де  $p, q$  і  $m$  -параметри. Одна з версій «генератора візерунків» базується на послідовності Maple-операторів:

```
for i from 0 to N do
p := pmin + (pmax-pmin)*i/N:
pp := convert(evalf(p), string):
txt := textplot({[-1.2, 1.2, `pp`] }):
Gr[i]:= display(txt, complexplot(f, t=0..6*Pi));
end do:
display(seq(Gr[i], i=0..N), insequence = true);
```

На рис. 11-15 наведено приклади побудови візерунків.

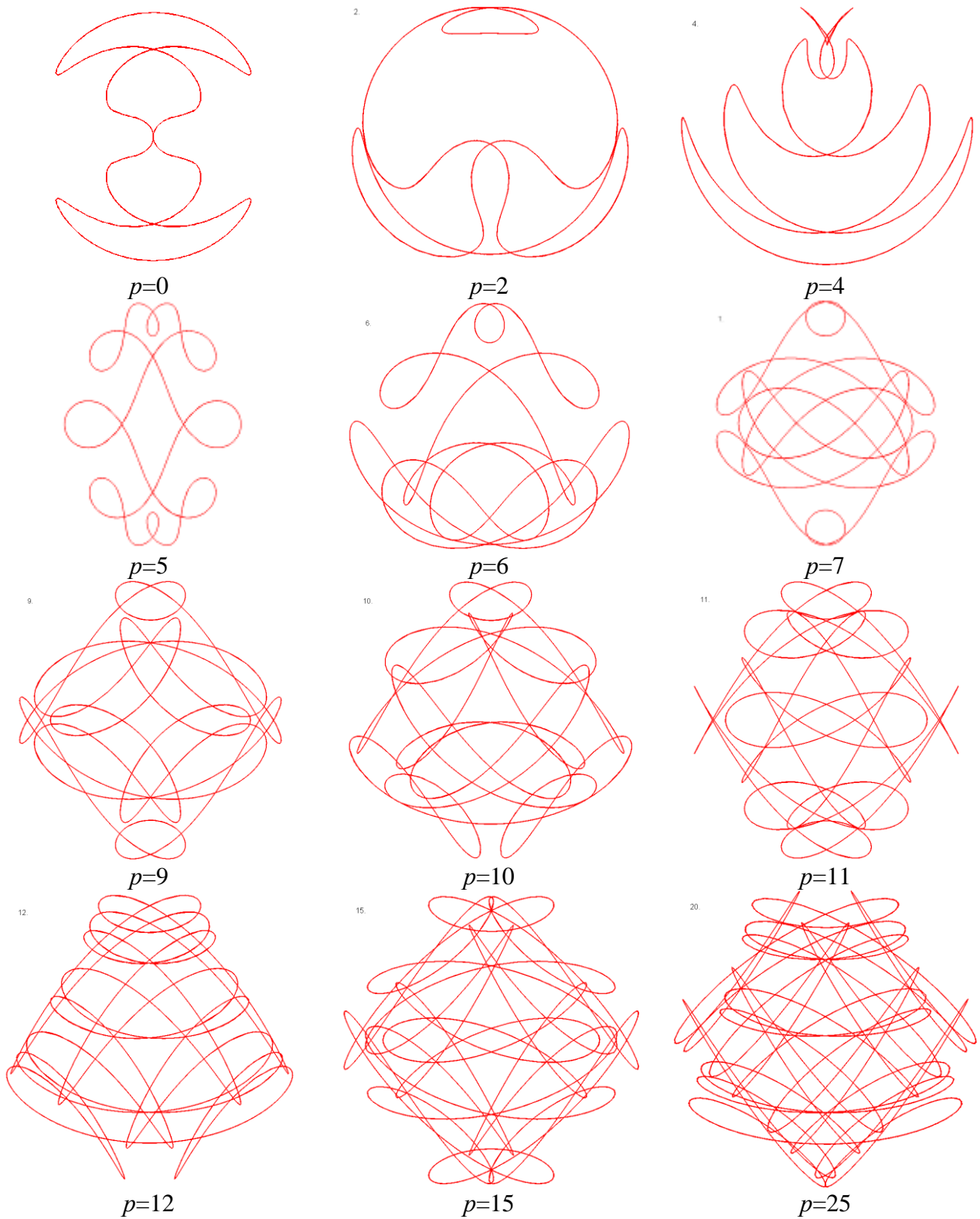


Рисунок 11 – Графіки функції  $f = (\sin(pt) + i \cos t)e^{i \sin 4t}$   
залежно від значення параметра  $p$

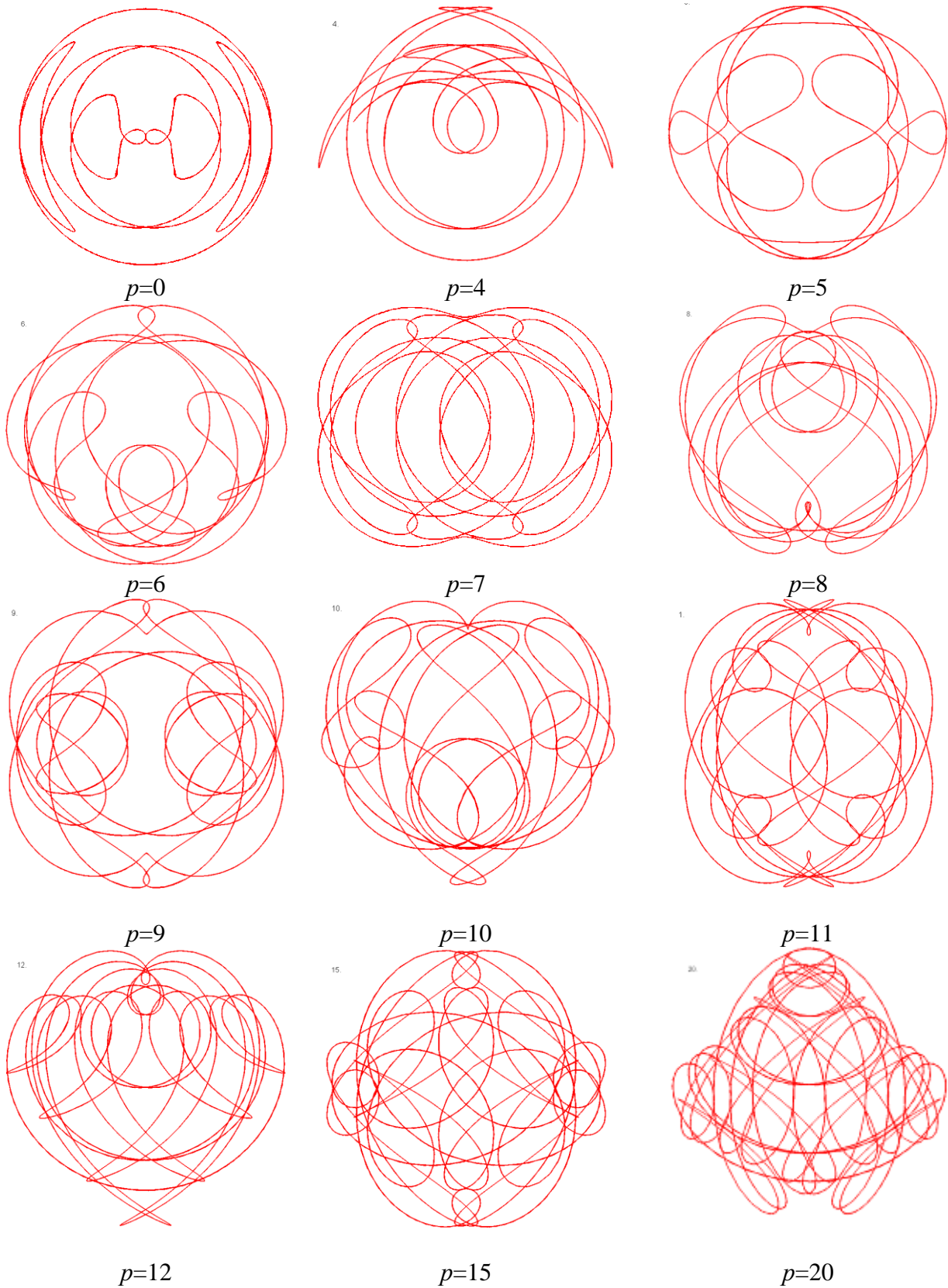


Рисунок 12 – Графіки функції  $f = (\sin(pt) + i \cos t) e^{2,5i \sin 4t}$  залежно від значення параметра  $p$

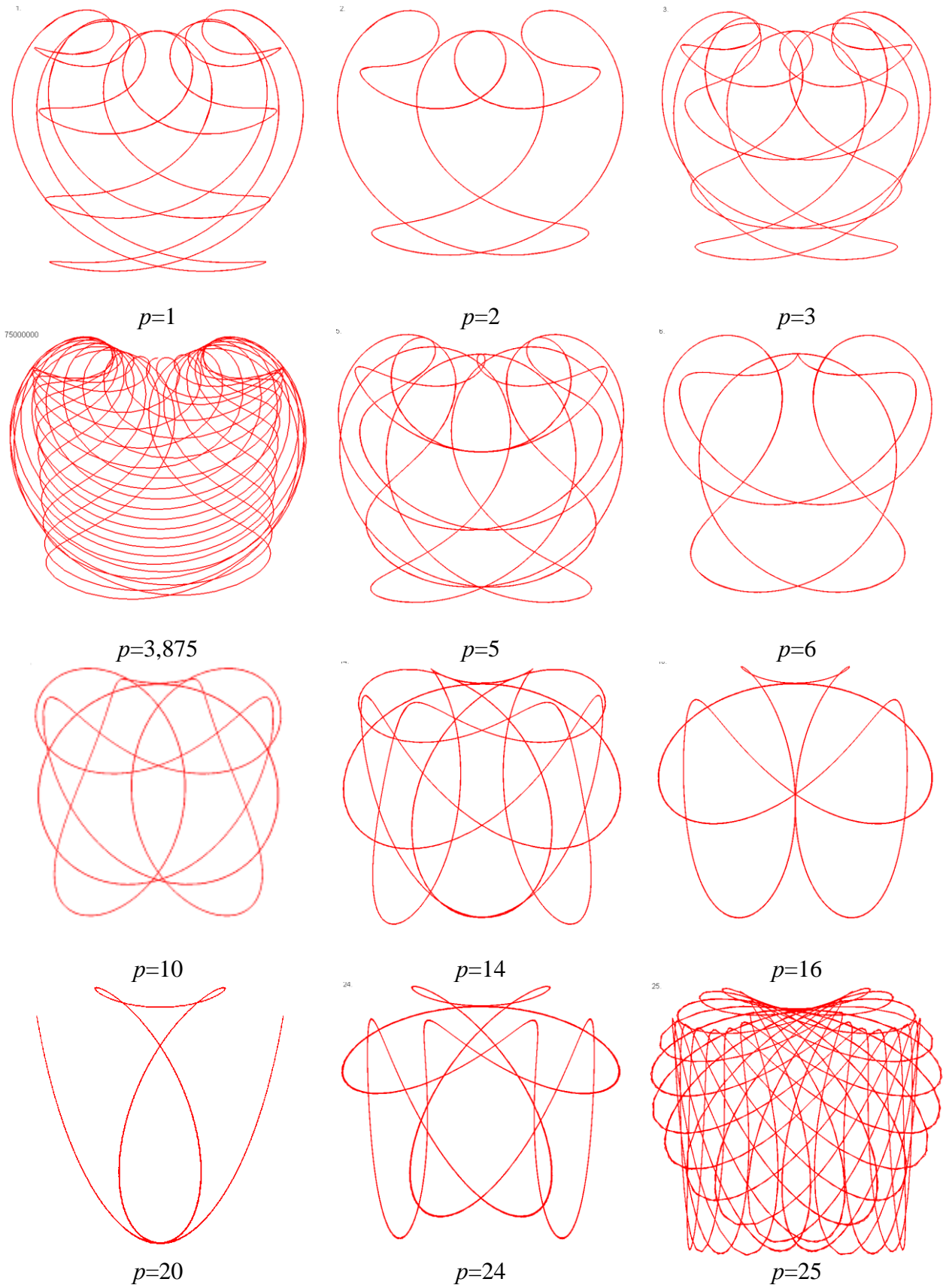


Рисунок 13 – Графіки функції  $f = (\sin(pt) + i \cos 8t) e^{1,5i \sin 4t}$  залежно від значення параметра  $p$

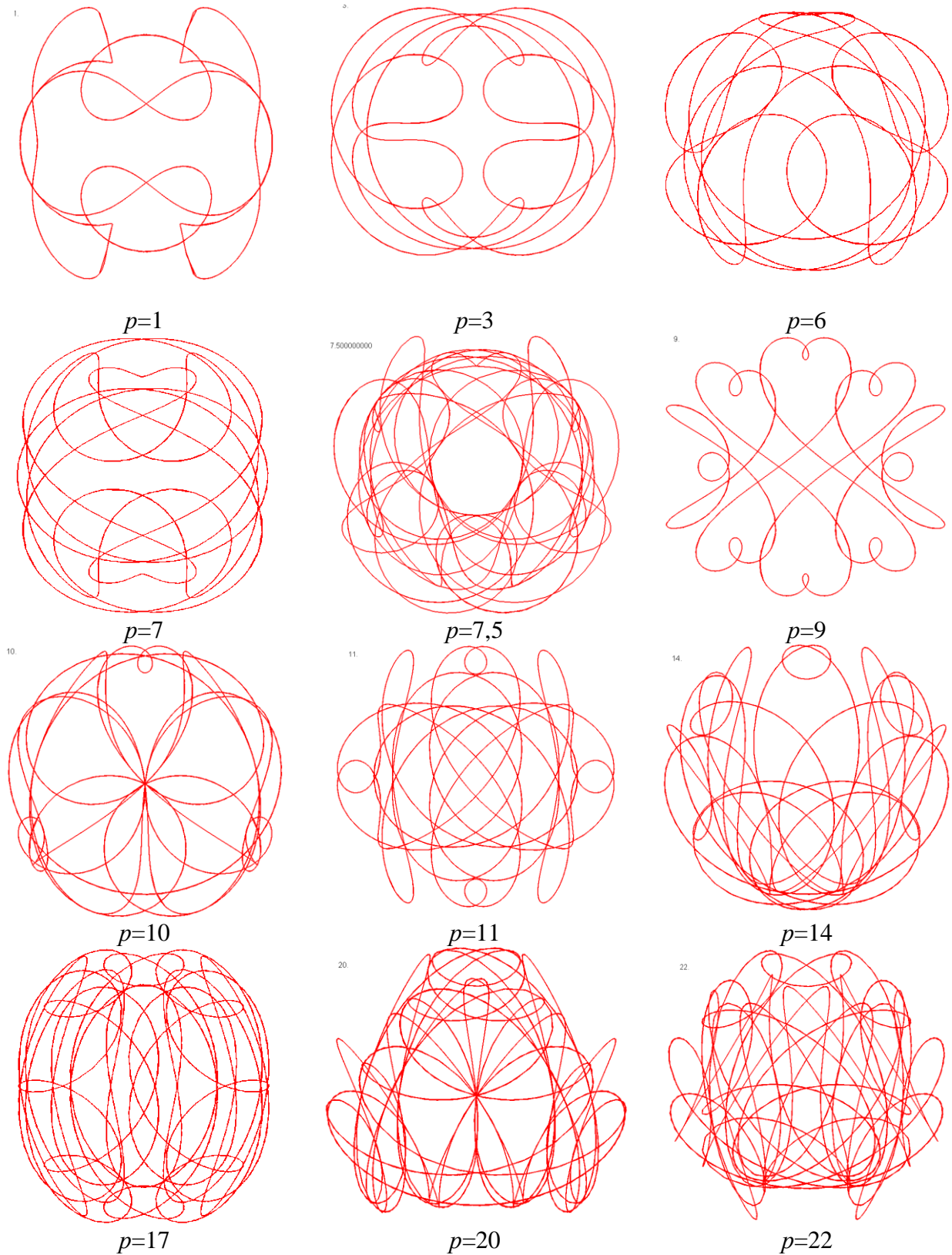


Рисунок 14 – Графіки функції  $f = (\sin(pt) + i \cos 5t)e^{2i \sin 4t}$   
залежно від значення параметра  $p$

Одержані зображення можна «тиражувати» на всю площину (рис. 15).

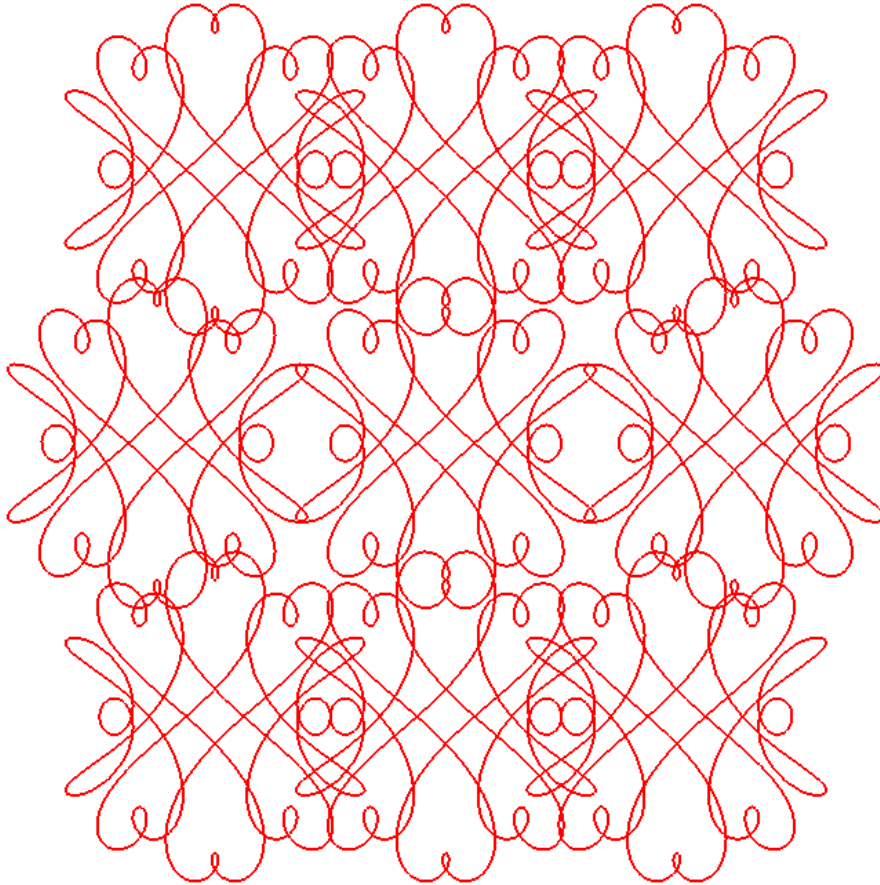


Рисунок 15 – Трансляція переносу графіка функції  $f = (\sin(9t) + i \cos 5t)e^{2i \sin 4t}$

### Побудова візерунків за допомогою кривих з керованими кривинами

Вважатимемо, що маємо криву, задану поки що невідомим натуральним рівнянням. Але відомо, що кривина змінюється вздовж цієї кривої з параметром довжини  $s$  за законом, описаним функцією  $k(s)$ . Для простоти початкову точку виміру довжини сумістимо з початком системи координат  $Oxy$ .

Для опису в декартових координатах натурального рівняння кривої необхідно [7, 8] скласти функцію

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{s_0}^t k(s) ds \quad (10)$$

та розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} x(t) = \cos(\theta(t)); \quad \frac{d}{dt} y(t) = \sin(\theta(t)) \quad (11)$$

з початковими умовами  $x(s_0) = 0$  і  $y(s_0) = 0$  і коли параметр  $t$  буде змінюватися у межах від  $a$  до  $b$ . Зазначимо, що початкові умови впливають лише на розташування кривої на площині  $Oxy$  і не впливають на її форму.

Отже, візерункову криву будемо будувати залежно від:

- функції кривини  $k(s)$ ;
- границь  $a$  і  $b$  зміни параметра  $t$ ;
- миттєвих кутів повороту  $s_0$  кривої відносно осі  $Ox$ ;
- кута повороту  $\theta_0$  всієї кривої відносно осі  $Ox$ .

Було складено Maple- програму побудови візерункової кривої, головний фрагмент якої має вигляд:

```
theta(t) := theta0 + int(kappa(t), s=s0..t):
Gr := dsolve({diff(x(t),t)=cos(theta(t)),
              diff(y(t),t)=sin(theta(t)),
              x(s0)=0, y(s0)=0}, {x(t),y(t)},
             type=numeric, method=classical);
odeplot(Gr, [x(t),y(t)], a..b, numpoints=15000,
        color=black, scaling=constrained);
```

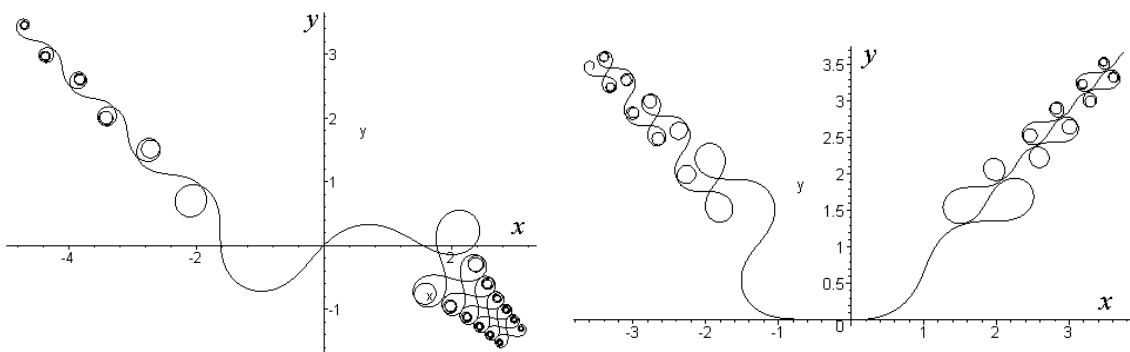
Особливістю складеної програми є те, що ми відмовилися від намагання описати візерункову криву рівняннями у параметричному вигляді. Здійснено лише її побудову, що цілком достатньо для оцінки її естетичного змісту.

Для цього за допомогою оператора **dsolve** виконується опис візерункової кривої у машинних кодах мови Maple у вигляді «внутрішньої» процедури, а потім, за допомогою оператора **odeplot** здійснюється побудова кривої.

Крім того, досвід роботи з програмою показав, що при складних виразах результати виконання цих операторів іноді конфліктують, що призводить навіть до стирання файлу. Конфлікти було усунуто завдяки оформленню цих операторів у вигляді процедур-функцій.

Наведемо деякі приклади побудованих візерункових кривих.

На рис. 16 зображено ряд візерунків з синусом у рівнянні.



$$k = \sin(s), a = -10, b = 50,$$

$$s_0 = 10, \theta_0 = \pi/4$$

$$k = \sin^2(s), a = -10, b = 30,$$

$$s_0 = 10, \theta_0 = 0$$

Рисунок 16 – Приклади візерунків синусного ряду

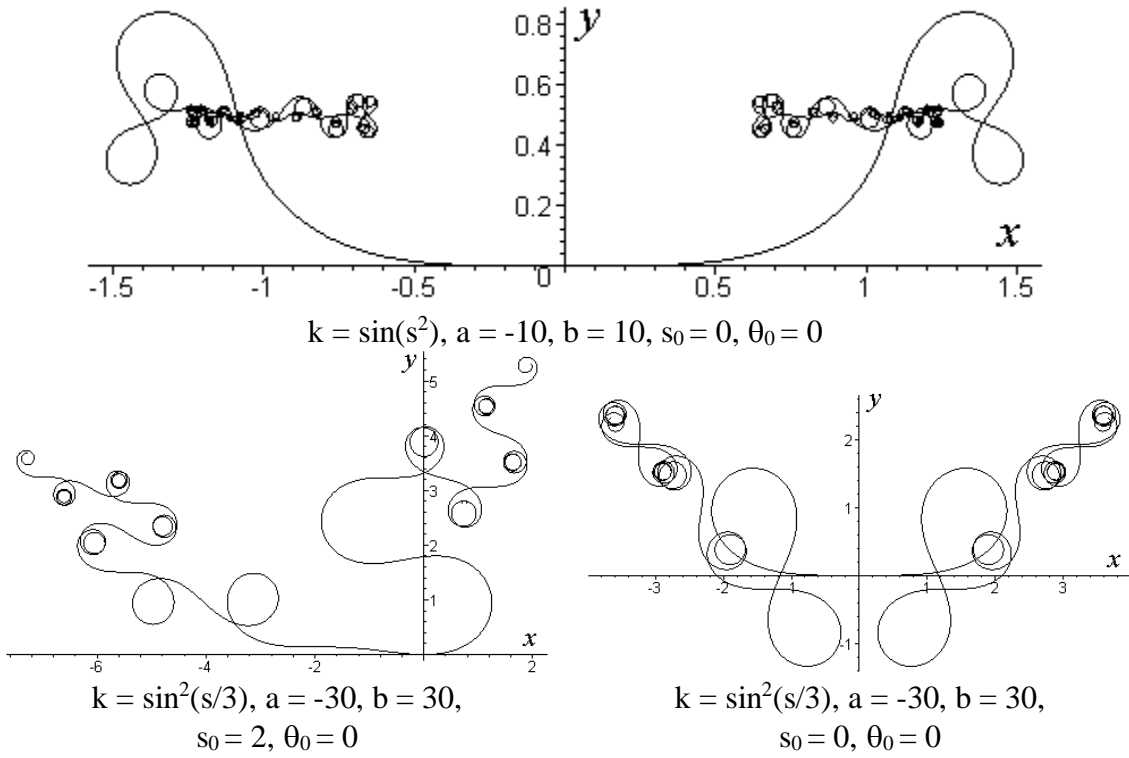


Рисунок 16, аркуш 2

На рис. 17 зображено приклади косинусного ряду візерунків.

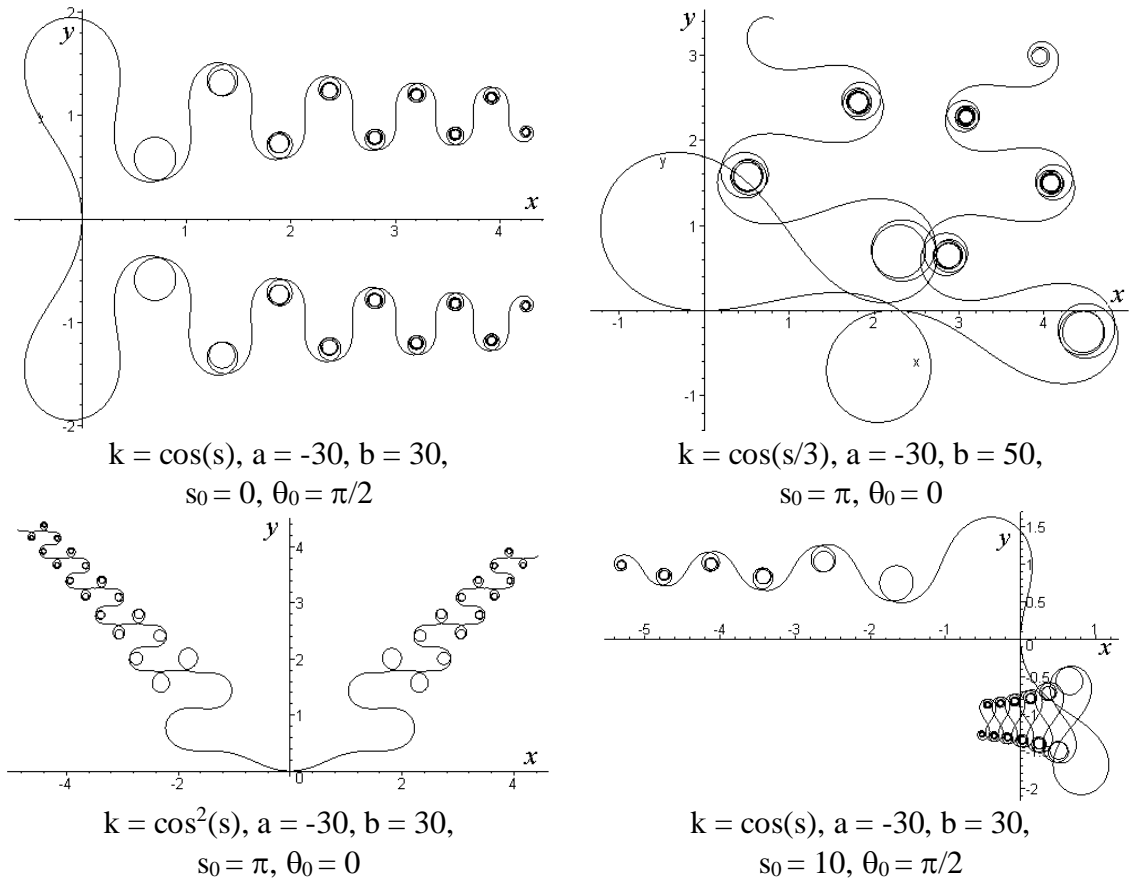


Рисунок 17 – Приклади візерунків косинусного ряду

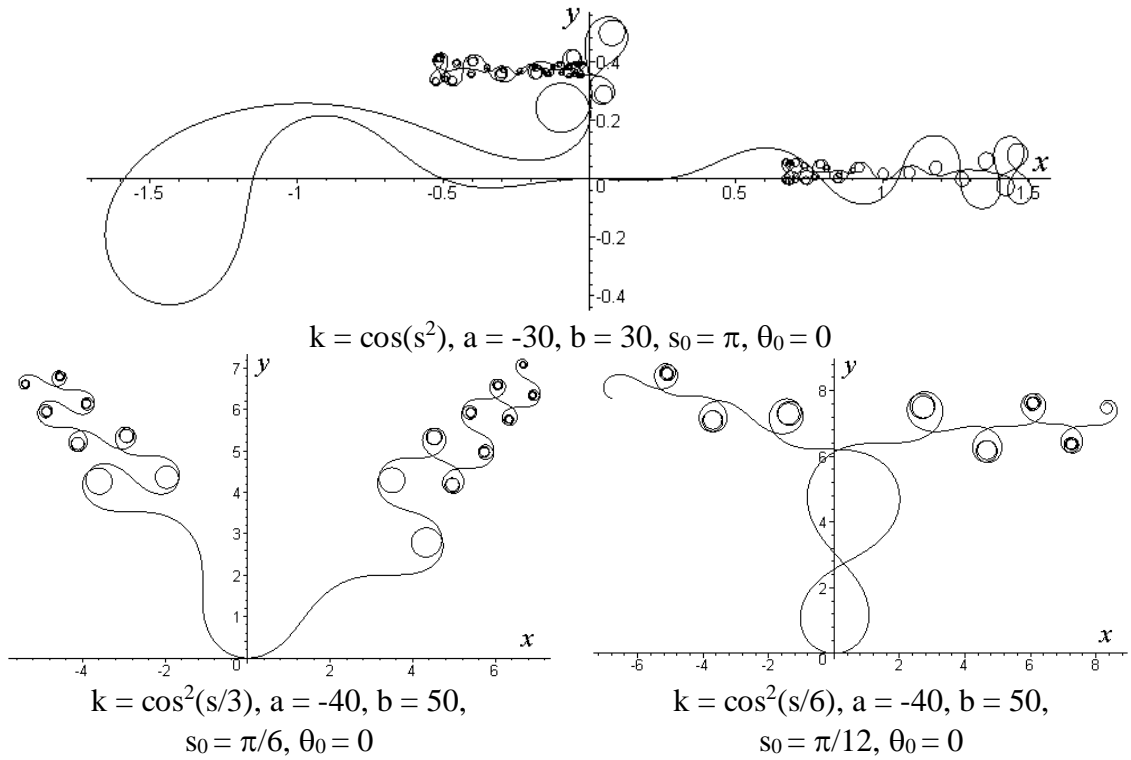


Рисунок 17, аркуш 2

На рис. 18 зображено приклади ряду візерунків, для опису яких використано операцію модуля.

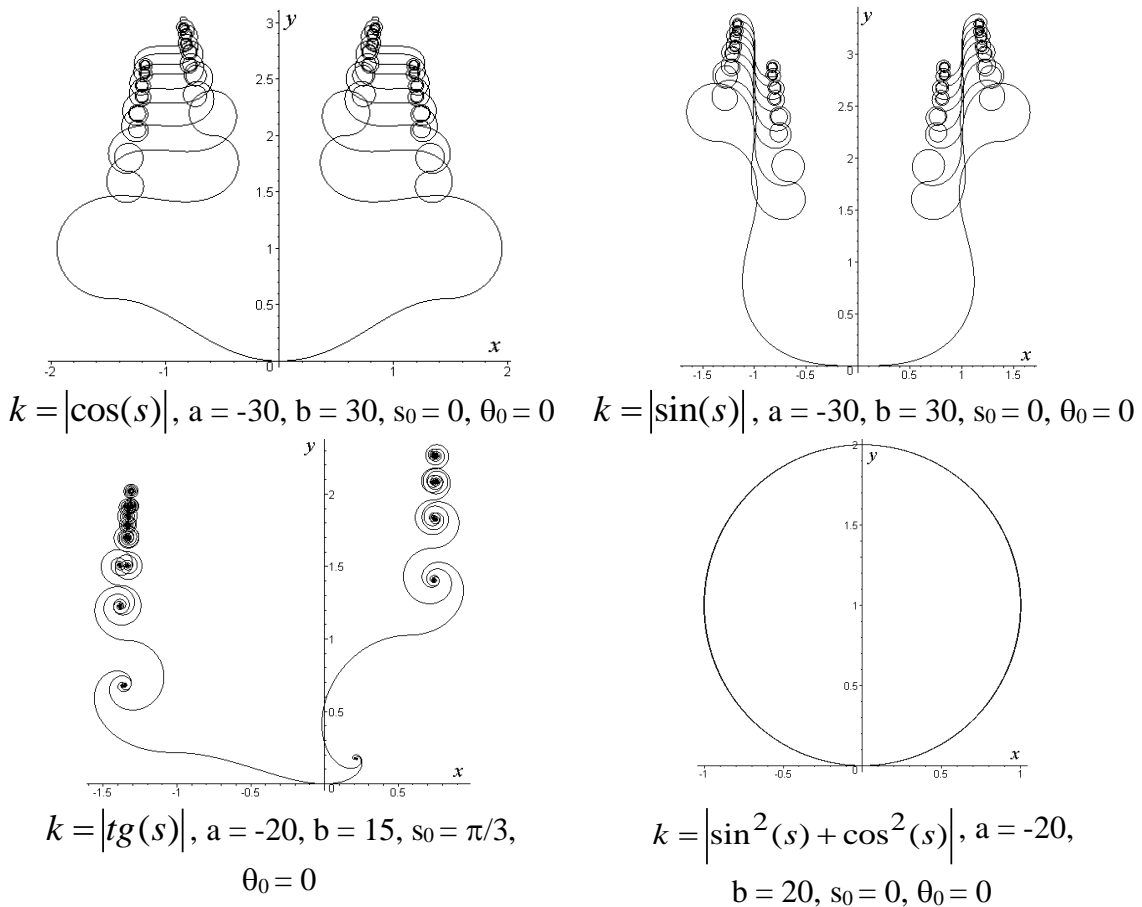


Рисунок 18 – Приклади візерунків з операцією модуля у їх описах

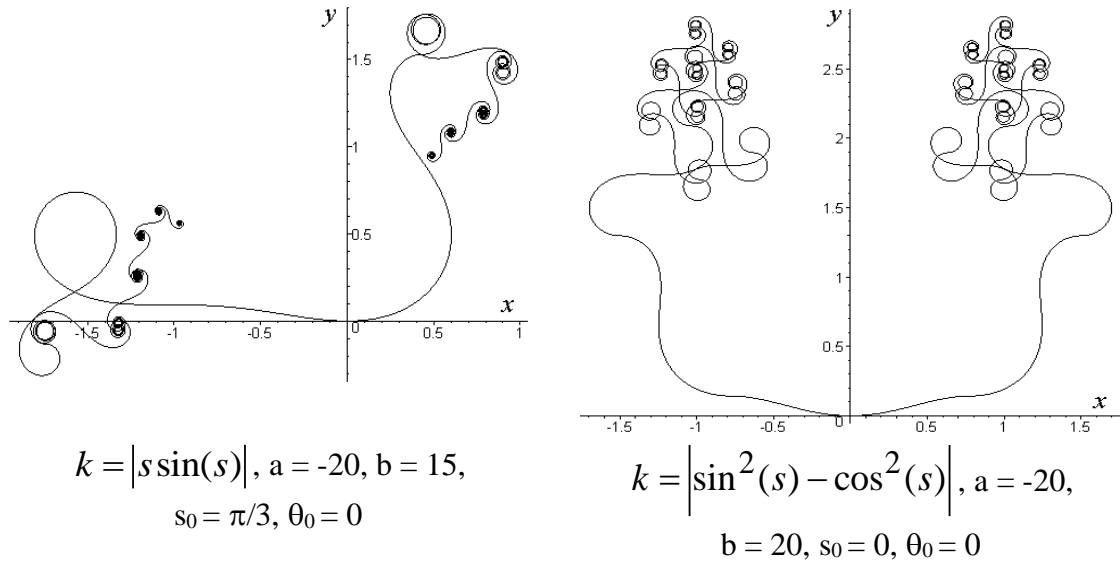


Рисунок 18, аркуш 2

На рис. 19 зображено приклад візерунку, для опису якої використано поліноміальну функцію.

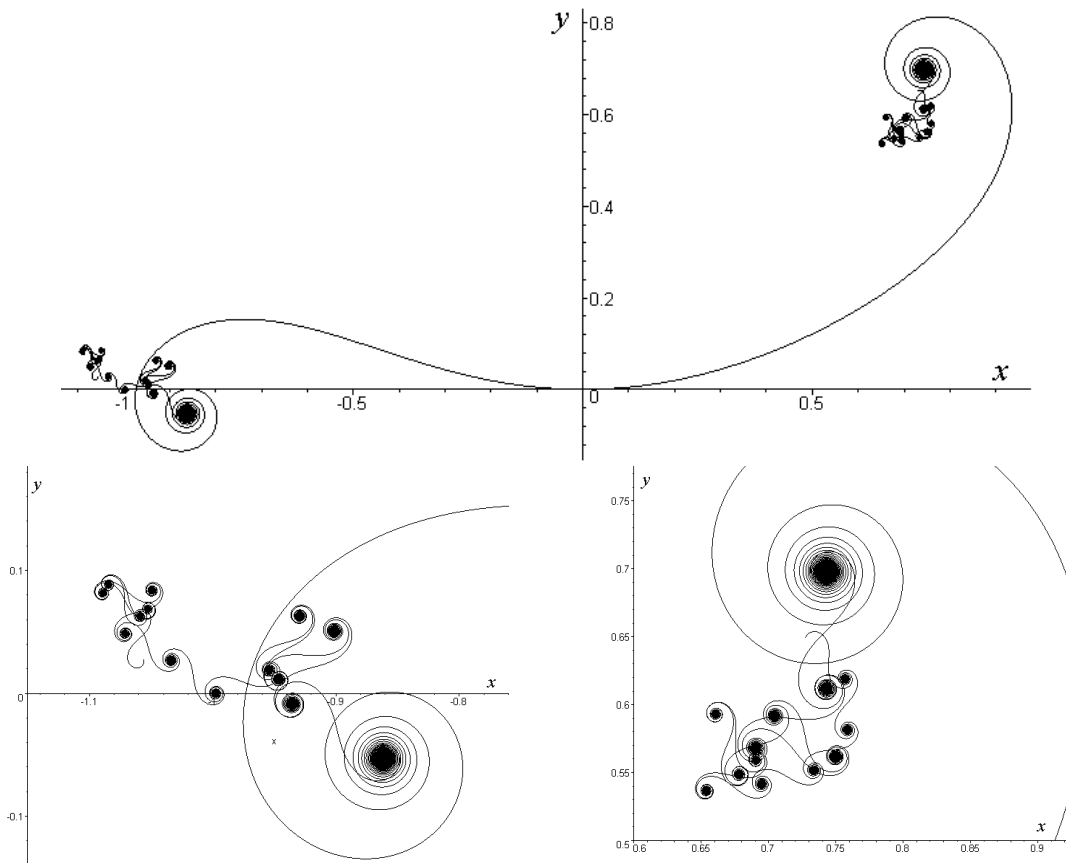
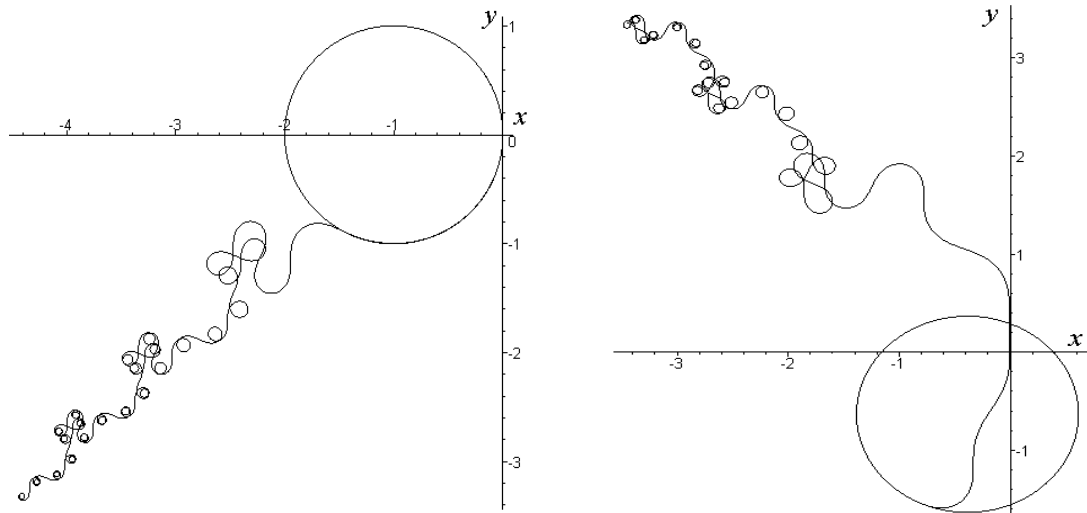


Рисунок 19 – Візерунок та його збільшені фрагменти з параметрами:

$$k = s^3 - s^2 + 1, a = -20, b = 20, s_0 = 0, \theta_0 = 0$$

На рис. 20 зображено приклади візерунків, для опису яких використано складніші комбінації функцій.



$$k = \cos^2(s - |s|), a = -20, b = 20,$$

$$s_0 = 2, \theta_0 = \pi/2$$

$$k = \cos^2(s + |s|), a = -20, b = 20,$$

$$s_0 = 2, \theta_0 = \pi/2$$

Рисунок 20 – Приклади візерункових кривих

### Реалізація деяких принципів побудови візерунків засобами операторів мови Maple

Якщо фігуру переміщати не обертаючи відносно свого "центра", то одержимо плоско-паралельний рух фігури, коли будь-який відрізок прямої на фігурі залишається паралельним самому собі. За "центр" фігури може бути прийнята будь-яка точка жорстко пов'язана з фігурою.

Звичайно "центр" фігури  $(x_f, y_f)$  переміщують відносно центра візерунка  $(x_c, y_c)$  за певним законом

$$x_f = x_c + F_x; y_f = y_c + F_y,$$

де  $F_x, F_y$  – функції від параметрів.

У загальному випадку фігура може переміщатися, обертаючись відносно свого "центра" і деформуватися. При цьому параметри процедури зображення фігури повинні включати всі координати точок, які з'єднуються лініями. Координати  $i$ -тої точки фігури визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} x_{xi} &:= x_f + K_{xi} * ((x_i - x_f) * \cos(A) - (y_i - y_f) * \sin(A)), \\ y_{yi} &:= y_f + K_{yi} * ((y_i - y_f) * \cos(A) + (x_i - x_f) * \sin(A)), \end{aligned}$$

де  $A$  – кут повороту фігури відносно свого "центра", відлічуваного у лівій системі координат екрана за годинниковою стрілкою стосовно осі  $X$ ;

$x_i, y_i$  – початкові координати  $i$ -тої точки фігури;

$x_{xi}, y_{yi}$  – нові координати  $i$ -тої точки фігури;

$K_{xi}, K_{yi}$  – коефіцієнти масштабування координат  $i$ -тої точки по осях  $X$  і

$Y$ .

Наведемо приклад Maple-програми побудови візерунка, у якій реалізовано множину законів руху ліній відносно свого "центра".

```

q := evalf(W);
m := [[0,0],[1,0],[cos(q), sin(q)],[0,0]]:
w := []: t := T:
for k to N do
w := [op(w), m]:
sm := [m[2], m[3], m[1], m[2]]:
m := (1-t)*m + t*sm:
od:

```

Після наведеного підготовчого блоку слід скласти шість блоків, які відрізнятимуться коефіцієнтами у парах тригонометричних функцій

```

a1 := plot(w, axes=None, scaling=constrained):
m := [[0,0],[cos(2*q),sin(2*q)],
      [cos(1*q),sin(1*q)],[0,0]]:
w := []: t := T:
for k to N do
w := [op(w),m]:
sm := [m[2],m[3],m[1],m[2]]:
m := (1-t)*m+t*sm:
od:

```

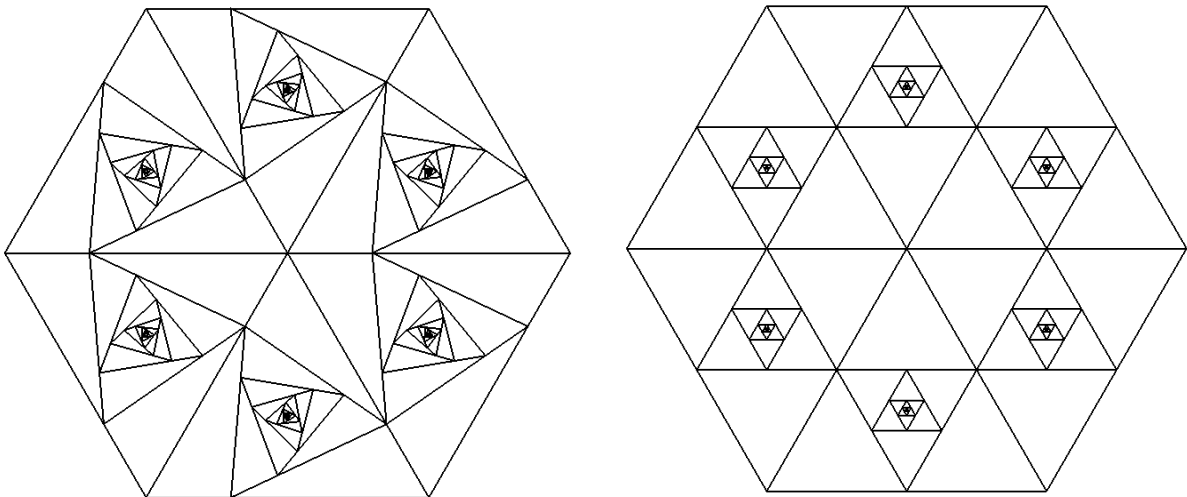
В результаті виконання всіх шести блоків матимемо заготовку для побудови зображення з використанням оператора

```

display(a1,a2,a3,a4,a5,a6, thickness=2);

```

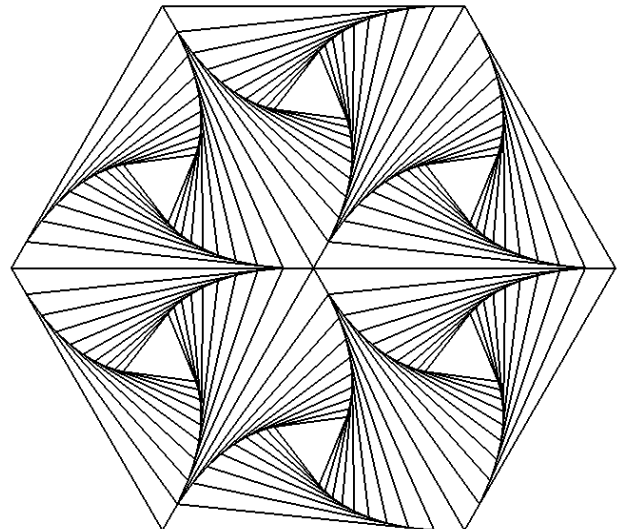
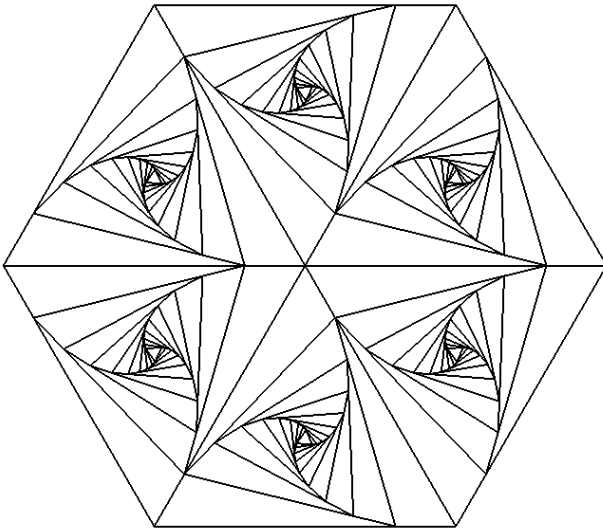
На рис. 21-22 наведено при  $N = 10$  приклади виконання програми побудови візерунка залежно від параметрів  $W$  і  $T$ .



$$T = 0.3; W = \pi/3$$

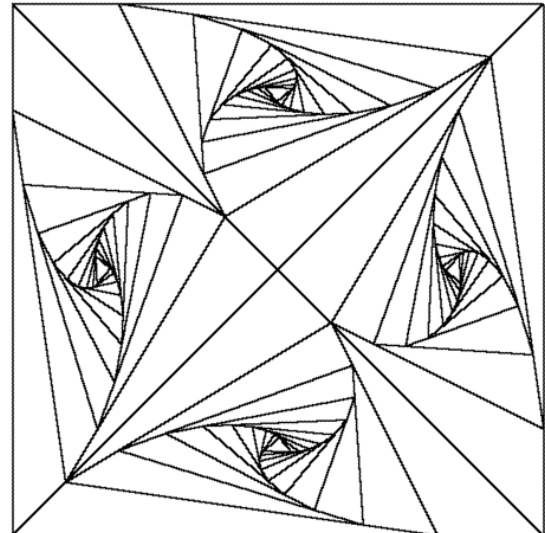
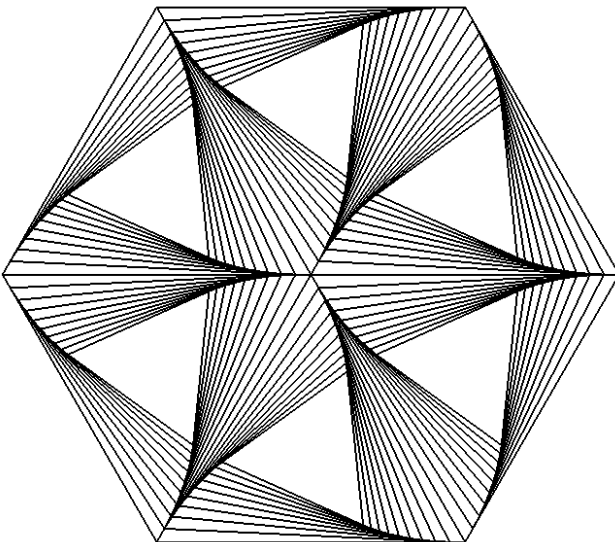
$$T = 0.5; W = \pi/3$$

Рисунок 21 – Приклади виконання програми побудови візерунка залежно від параметрів  $T$  і  $W$



$$T = 0.8; W = \pi/3$$

$$T = 0.9; W = \pi/3$$



$$T = 0.95; W = \pi/3$$

$$T = 0.2; W = \pi/2$$

Рисунок 22 – Приклади виконання програми побудови візерунка залежно від параметрів  $T$  і  $W$

У програмуванні часто використовують рекурсивні оператори, наприклад, процедури, які містять звертання до самих себе. Такі звертання можуть бути прямими – тобто викликом процедури усередині самої процедури, або непрямими – викликом інших процедур, усередині яких є виклик вихідної процедури.

Наведемо приклад програми рекурсивної побудови візерунка, де процедура **drevo** звертається до тієї ж процедури **drevo**.

```
drevo := proc(L, N, x0, y0)
local i; global s, p;
options remember;
```

```

s := s+1;
p[s] := plot([x0 + L*sqrt(M)*sin(M*t)*cos(t),
             y0 + L*sqrt(M)*sin(M*t)*sin(t), t=-W..W]);
if N > 1 then drevo(L/2, N-1, x0-L, y0+L);
             drevo(L/2, N-1, x0+L, y0+L)  fi;
RETURN(display([seq(p[i], i=1..2^N-1)], axes=NONE,
               scaling=constrained, numpoints=1000,thickness=2))
end:
s:=0: drevo(100, 7, 0, 0);

```

На рис. 23 наведено приклади виконання програми рекурсивної побудови візерунка залежно від параметрів  $W$  і  $M$ .

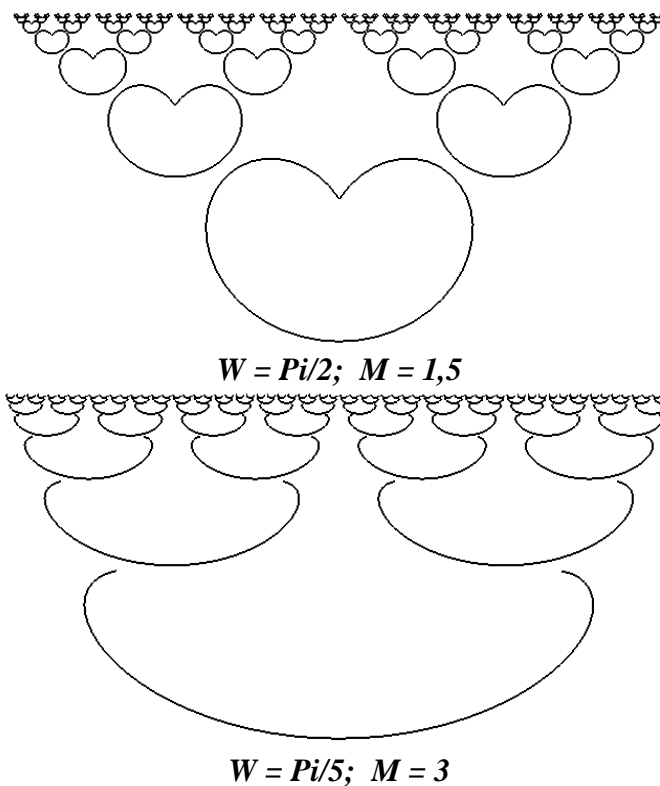


Рисунок 23 – Приклади виконання програми рекурсивної побудови візерунка залежно від параметрів  $W$  і  $M$

Цікавим є створення візерунків побудовою дзеркальних відображень фігури. В цьому випадку принцип побудови візерунків близький до зображень дзеркального калейдоскопа. У калейдоскопі система із трьох дзеркал створює ефект декількох шестиразових відбиттів набору кольорових кристалів. Математично такий принцип побудови візерунка можна описати так. Є три вихідних з однієї точки променів – осей симетрії. Кут між променями дорівнює  $2\pi/3$ . Будується перша (початкова) фігура в секторі між першим і другим променями. Потім будується друга фігура як дзеркальне відображення першої фігури відносно другого променя, далі третя фігура, як дзеркальне відображення другої фігури відносно третього променя й так далі.

Наведемо приклад програми створення візерунка побудовою відбиттів початкової фігури відносно трьох осей відбиття.

```
fosi1 := x*sin(Pi/3) - y*cos(Pi/3);
fosi2 := y;
fosi3 := x*sin(Pi/3) + y*cos(Pi/3),
```

де кут вимірюється від осі  $Ox$  проти годинникової стрілки.

Початкову фігуру (наприклад, квадрат) задамо рівнянням у вигляді

```
f := (x,y) -> a - abs(x-x0) - abs(y- y0):
```

Для побудови результату симетричного відбиття відносно першої, другої та третьої осі симетрії слід застосувати формули:

```
X1 := (x,y) -> y*sin(2*Pi/3)+ x*cos(2*Pi/3);
Y1 := (x,y) -> x*sin(2*Pi/3)- y*cos(2*Pi/3);
f1 := (x,y) -> f(X1, Y1);
X2 := x;
Y2 := -y;
f2 := (x,y) -> f1(X2, Y2);
X3 := (x,y) -> y*sin(-2*Pi/3)+ x*cos(-2*Pi/3);
Y3 := (x,y) -> x*sin(-2*Pi/3)- y*cos(-2*Pi/3);
f3 := (x,y) -> f2(X3, Y3);
```

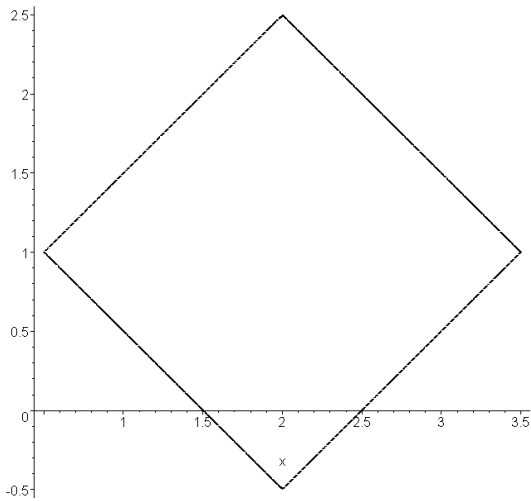
Побудову при  $a = 1,5$ ;  $x_0 = 2$ ;  $y_0 = 1$  проміжних результатів відбиття здійснюємо операторами

```
F := implicitplot(f(x,y), x=-3..4, y=-3..4);
F1 := implicitplot(f1(x,y), x=-3..4, y=-3..4);
F2 := implicitplot(f2(x,y), x=-3..4, y=-3..4);
F3 := implicitplot(f3(x,y), x=-3..4, y=-3..4);
```

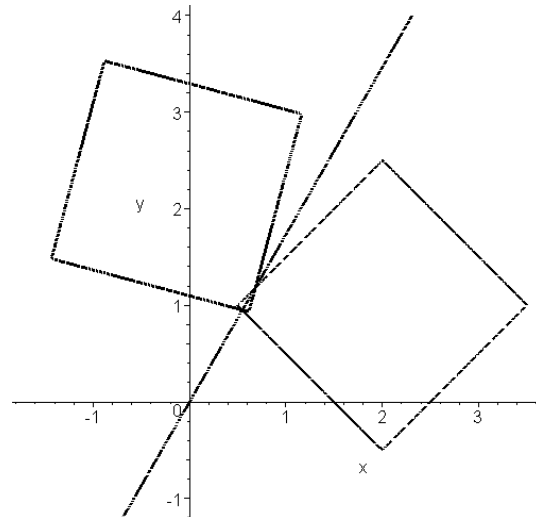
Результуюче зображення (яке можна продовжити в циклі) будується за допомогою оператора

```
display(F, F1, F2, F3 , thickness=3);
```

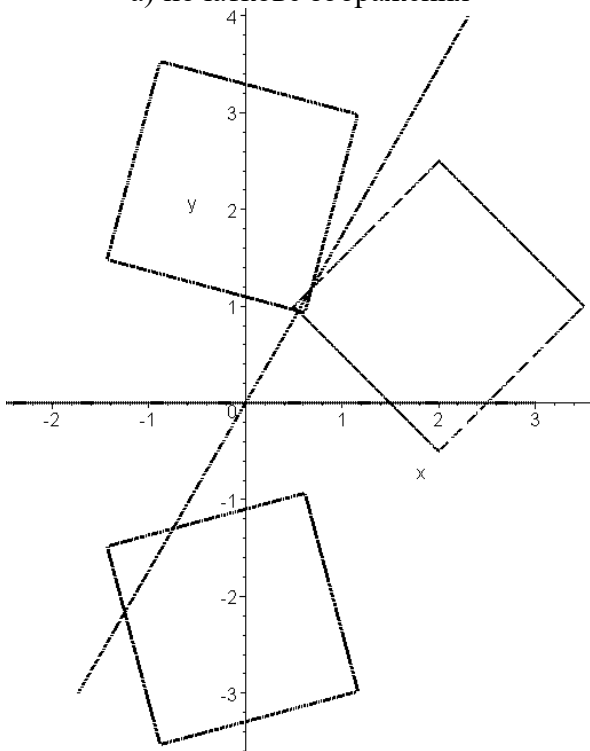
На рис. 24 наведено приклади побудованих зображень.



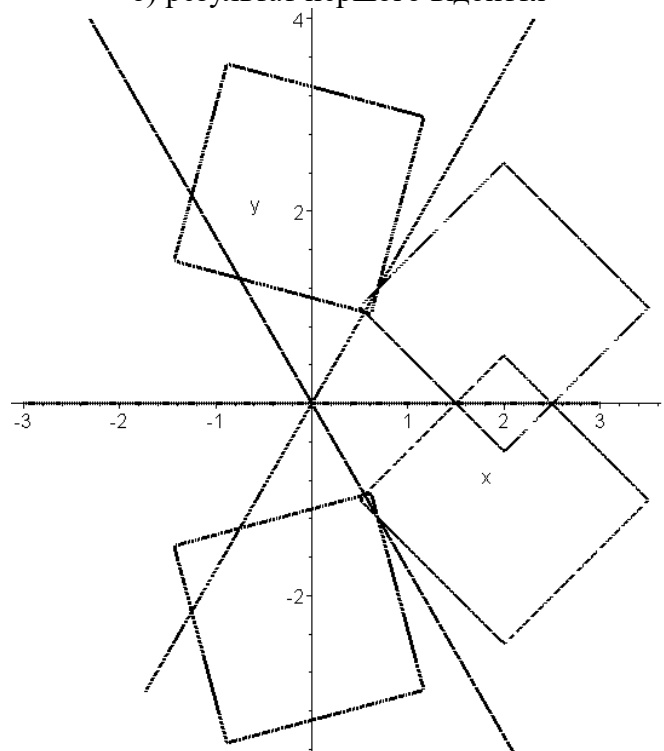
а) початкове зображення



б) результат першого відбиття



в) результат другого відбиття



г) результат третього відбиття

Рисунок 24 – Побудова симетричних зображень дзеркального калейдоскопа

## Результати досліджень

Розглянуто концептуальні моменти створення орнаментів – від звичайної графіки до технологій комп'ютерної графіки.

Розроблено спосіб побудови візерункових розеток за допомогою ліній, вздовж яких їх кривини змінюються за законом функції виду

$$[1 + p \arccos(\cos(s))]^w,$$

де  $w > 0$ .

Побудовано машинні візерунки з використанням кривих, які описані параметричними рівняннями, а також еквідистантних кривих.

Побудовано машинні візерунки з використанням функцій комплексної змінної за допомогою програми «генератора візерунків».

## Висновки

Розглянуті моменти створення орнаментів дозволять будувати орнаменти засобами технологій комп'ютерної графіки, базуючись на концептуальних моментах звичайної графіки.

Наведені (та одержані автором аналогічні інші) візерунки можуть впроваджуватись, наприклад, для поліграфічного оформлення книг і буклетів, емблем підприємств, оформлення візиток, шпалер, тощо.

Головні принципи побудови візерунків можна реалізувати у середовищі алгоритмічної мови (наприклад, Maple) шляхом створення алгоритмів побудови зображень на площині.

Список літератури.

1. Kozhin, P.M. (1991) O drevnih ornamental'nyh sistemah Evrazii. *Etnoznakovye funktsii kul'tury*. M.: Nauka. P. 129-151.
2. Zbenovich, V.G. (1989). *Rannij etap tripol'skoj kul'tury na territorii Ukrainy*. Kiev: Nauk. dumka. P. 10.
3. Palaguta, I.V. (1999). Problemy izucheniya spiral'nyh ornamentov tripol'skoj keramiki. *Stratum plus*, (2). P. 148-159.
4. Ткачук, Т.М., & Віденко, М.Ю. (2004). Знакові системи трипільської культури. *Енциклопедія трипільської цивілізації*. Київ: ТОВ «Укрполіграфмедіа». Т.1. С. 433-471.
5. Бадаєв, Ю.І., & Щоголева, Т.І. (2008). Аналітично-комп'ютерні методи проектування візерунків. *Наукові нотатки. Міжсвузівський збірник (за напрямом "Інженерна механіка")*, 22(1) Сучасні проблеми геометричного моделювання, 21-26.
6. Бадаєв, Ю.І., & Щоголева, Т.І. (2008). Універсальна аналітична крива для побудови візерунка. *Прикладна геом. та інж. графіка*, 4(40), 32-37.
7. Щоголева, Т.І., & Бадаєв, Ю.І. (2009). Візерунки на основі інтегральної кривої за параболічним законом кривини. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*, (24). 46-51.
8. Tolok, A.V., Semerich, YU.S., & Sheyko, T.I. (2001). Postroyeniye simmetrichnykh funktsiy dlya simmetrichnykh chertezhey. *Вісник Запорізького державного університету*, (2), 1-16.
9. Челомбїтько, В.Ф. (2010). Побудова зображень фрак талів в середовищі математичного процесора Maple. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, (85), 237-243.
10. Челомбїтько, В.Ф. (2010). Побудова візерунків як еквідистант кривих, описаних параметричними рівняннями. *Технічна естетика і дизайн*, (7), 216-220.
11. Челомбїтько, В.Ф. (2012). Реалізація деяких принципів побудови візерунків засобами операторів мови Maple. *Теорія та практика дизайну*, (2), 127-132.