

**МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗПОДІЛУ ЗАБРУДНЕНЬ У ПОВІТРІ
ДЛЯ ВИПАДКУ ДЕКІЛЬКОХ ДЖЕРЕЛ**

Ковтун А.Д.

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Першина Ю.І.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна

e-mail: artem.kovtun1@nure.ua

The boundary problem is formulated, describing the processes of multi-component pollutant transport in the air in the presence of point sources of substances. Using the concept of local potential, a theorem is formulated that allows developing an algorithm for solving the stated problem using the finite element method (FEM). The choice of the method is determined by its advantages: 1) FEM provides the closest solution in the form of an analytical expression; 2) FEM allows formalizing the procedure for satisfying boundary conditions by selecting a functional for which one or both boundary conditions are natural; 3) FEM allows constructing an approximation in the presence of features such as discontinuous coefficients or when the non-homogeneous term of the differential operator is a sum of δ -functions.

Проблема забруднення [1] атмосфери газоподібними і твердими відходами виробництва, викидами в атмосферу різних домішок з виділенням тепла в побутових цілях є актуальною вже багато років і в майбутньому актуальність буде тільки зростати. Це потребує розробки методів оптимізації розподілу забруднень у повітрі.

Математичне описання технологічного процесу в багатокомпонентній суміші включає рівняння матеріального балансу для кожної реагуючої компоненти. Рівняння матеріального балансу записуються у вигляді рівнянь дифузії з врахуванням джерел речовини [2]:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \operatorname{div}(D \cdot \operatorname{grad} C_i) - \operatorname{grad}(\vec{\omega} C_i) + F_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

де C_i – концентрація i -ї компоненти; $\vec{\omega}$ – вектор швидкості матеріального потоку суміші; D – коефіцієнт сумарної дифузії; F_i – функція, яка визначає інтенсивність джерела i -ї компоненти; m – число реагуючих компонент.

Далі розглядаємо концентрацію кожної компоненти над деякою поверхнею як функцію лише поздовжньої координати x , а рівняння (1) розглядати в одновимірній постановці.

Дифузійний перенос оцінюється коефіцієнтом поздовжнього перемішування. При $D_L \rightarrow \infty$ здійснюється режим ідеального змішування, при $D_L \rightarrow 0$ – режим ідеального витиснення.

Утворення нової речовини в результаті взаємодії між компонентами суміші забруднення здійснюється над кожною окремою поверхнею і стають неперервно розподілені джерела. Ці джерела речовини забруднення

називаються точковими. Математично точкове джерело можна описати за допомогою одиничної імпульсної функції $q = q_{ik} \delta(x - x_{ik})$, де x_{ik} – координата k -го джерела i -ї речовини забруднення, яка виходить з деякого джерела, і від’ємна, якщо вона розчиняється (наприклад під впливом вітру). Математична модель процесу в багатокомпонентній суміші забрудненого повітря для стаціонарних умов має вигляд наступної граничної задачі:

$$\frac{d}{dx} \left(D_L(x) \frac{d\vec{C}_i(x)}{dx} \right) - \frac{d}{dx} (u(x) \vec{C}(x)) + K(\vec{C}(x), x) + \vec{f}(x) = 0, \quad (2)$$

$$D_L(0) \frac{d\vec{C}_i(0)}{dx} = u(0) (\vec{C}(0) - \vec{C}_0), \quad (3)$$

$$D_L(L) \frac{d\vec{C}_i(L)}{dx} = 0, \quad (4)$$

де $\vec{C}(x) = (C_1(x), C_2(x), \dots, C_m(x))^T$; $u(x)$ – поздовжня швидкість матеріального потоку забруднення; $K(\vec{C}(x), x)$ – матриця, яка описує кінетику взаємодії між різними компонентами суміші; $\vec{C}_0 = (C_{10}, C_{20}, \dots, C_{m0})^T$; C_{i0} – величина концентрації i -ї компоненти забруднення в суміші на виході з джерела; $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T$; $f_i(x) = \sum_{k=1}^{p_i} q_{ik} \delta(x - x_{ik})$, p_i – число точкових джерел i -ї компоненти; L – довжина деякої поверхні.

Задача (2)–(4) в загальному випадку є нелінійною, несамоспряженою, що утруднює її інваріантне формулювання. З використанням концепції локального потенціалу [3] нами сформульована теорема, яка дозволяє представити її у варіаційній формі.

Теорема. Якщо функціонал, визначений виразом:

$$I(\vec{C}(x)) = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} D_L(x) \frac{d\vec{C}^T(x)}{dx} \frac{d\vec{C}(x)}{dx} + u(x) \vec{C}^T(x) \frac{d\vec{C}^0(x)}{dx} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \vec{C}^T(x) \vec{C}(x) \frac{du(x)}{dx} - 2 \sum_{i=1}^m \int_0^{C_i(x)} \left(\sum_{j=0}^m K_{ij}(\vec{C}^0(x), x) \right) \Big|_{C_i^0(x)=t} \right\} dt - \\ - \vec{f}^T(x) \vec{C}(x) \Big\} dx + \frac{1}{2} u(0) \vec{C}^T(0) (\vec{C}(0) - 2\vec{C}_0),$$

стаціонарний, а $C_i^0(x)$ після варіації $I(\vec{C}(x))$ по $C_i(x)$ підлягають виконанню допоміжної умови $C_i^0(x) \equiv C_i(x)$, то функції $C_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ задовольняють систему рівнянь (2) і граничні умови (3) – (4).

Задачу мінімізації функціоналу (5) в роботі пропонується розв’язувати методом скінченних елементів [4, 5]. Інтервал $[0, L]$ розіб’ємо на N частин послідовністю точок $\pi: x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N+1} = L$. Наближений розв’язок $\vec{C}_\pi(x)$ шукаємо у вигляді:

$$C_{\pi i}(x) = \sum_{n=0}^{N+1} C_{in} h_n(x), \quad i = \overline{1, m}, \quad n = \overline{1, N+1},$$

де C_{in} – величина концентрації i -ї компоненти забруднення в n -й точці розділення; функції $h_n(x)$ мають вигляд [3]:

$$h_n(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{|x - x_{n-1}|}{x_n - x_{n-1}} - \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})(x_{n+1} - x_n)} |x - x_n| + \frac{|x - x_{n+1}|}{x_{n+1} - x_n} \right].$$

Висновок. Дослідження вперше використовує концепцію локального потенціалу для формулювання та розв’язання граничної задачі, що описує процеси переносу багатокомпонентної суміші забруднень у повітрі за наявності точкових джерел деякої речовини. Важливо відзначити, що обране використання методу скінчених елементів (МСЕ) у поєднанні з концепцією локального потенціалу надає цілісний та ефективний підхід для аналітичного моделювання даного процесу.

Список використаних джерел:

1. Методи вимірювання параметрів навколишнього середовища: підруч. / Методи вимірювання параметрів навколишнього середовища: підруч. / Г. І. Гринь, В. І. Мошонько, О. В. Суворін та ін. – Сєверодонецьк : вид-во СНУ ім. В. Даля, 2019. – 420 с.
2. Кафаров. В. В. Основи масопередачі: моногр.: Вища. Школа, 1972. – 494 с.
3. Інноваційні технології: нові інформаційні оператори: навч.-метод. посіб. Для магістрів денної та заоч. форми навч. спец. Прикл. матем / О.М. Литвин, Ю.І. Першина, О.О. Литвин, О.П. Нечуйвітер; Укр. інж.-пед. акад. – Харків : [б. в.], 2018. – 330 с.
4. Ndekwa O. B., Agunwamba J. C. Modified model for air pollutants with finite element method // International Journal of Scientific & Engineering Research. July-2018. Volume 9, Issue 7. – P. 985–993.
5. Карпіловський В.С. Метод скінчених елементів і задачі теорії пружності. – Київ: «Софія А», 2022. – 275 с