

**Головний редактор:**

*П.І. Несажмаков, д-р техн. наук, проф., ННЦ “Інститут метрології”, Україна*

**Заступник головного редактора, науковий редактор:**

*Ю.Ф. Павленко, д-р техн. наук, проф., ННЦ “Інститут метрології”, Україна*

**Редакційна колегія:**

*О. Боднар, доц., університет Еребру, Швеція*  
*О.М. Величко, д-р техн. наук, проф., ДП “Укрметртест-стандарт”, Україна*  
*М.М. Горобець, д-р фіз.-мат. наук, проф., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Україна*  
*О.В. Дзисюк, Метрологічний центр військових еталонів Збройних Сил України, Україна*  
*І.П. Захаров, д-р техн. наук, проф., ХНУРЕ, Україна*  
*С.І. Кондрашов, д-р техн. наук, проф., НТУ “ХПІ”, Україна*  
*О.Д. Купко, д-р техн. наук, ННЦ “Інститут метрології”, Україна*  
*Е. Манске, д-р техн. наук, проф., Технічний університет Ільменау, Німеччина*  
*Г. Мачін, д-р природничих наук, проф., Національна фізична лабораторія, Велика Британія*  
*І.О. Мель, ННЦ “Інститут метрології”, Україна*  
*Л.А. Назаренко, д-р техн. наук, проф., ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, Україна*  
*Г.Ю. Народницький, д-р техн. наук, ННЦ “Інститут метрології”, Україна*  
*В.В. Паракуда, канд. техн. наук, доц., ДП “НДІ Система”, Україна*  
*О.В. Прокопов, д-р фіз.-мат. наук, проф., ННЦ “Інститут метрології”, Україна*  
*В.В. Семенець, д-р техн. наук, проф., ХНУРЕ, Україна*  
*В.В. Склярів, канд. техн. наук, ННЦ “Інститут метрології”, Україна*  
*Б.І. Стадник, д-р техн. наук, проф., НУ “Львівська політехніка”, Україна*  
*Ю.М. Туз, д-р техн. наук, проф., НТУУ “КПІ ім. Ігоря Сікорського”, Україна*

**Відповідальний редактор** С.В. Білоусова  
**Літературний редактор** Н.О. Мірошніченко  
**Комп'ютерна верстка і дизайн** Г.С. Мицик

Надруковано в ННЦ “Інститут метрології”.

**Адреса редакції:** ННЦ “Інститут метрології”,  
вул. Мירוносицька, 42, м. Харків, 61002  
**Тел.:** (057) 704-98-43, факс: (057) 700-34-47  
**E-mail:** journal@metrology.kharkov.ua  
**Вебсайт:** <http://umj.metrology.kharkov.ua/>

Видання індексується міжнародною бібліометричною та наукометричною базою даних **Web of Science Core Collection, Google Scholar, WorldCat і BASE**.  
**ISSN (Print)** 2306-7039  
**ISSN (Online)** 2522-1345  
**DOI:** 10.24027/2306-7039

Журнал зареєстрований у Міністерстві юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію серія КВ № 22932-12832ПР від 26 вересня 2017 р.  
“Український метрологічний журнал” включено до Переліку наукових фахових видань України на підставі Наказу МОН України від 15 жовтня 2019 р. № 1301 (категорія “А”).  
ННЦ “Інститут метрології” зареєстрований у Державному комітеті телебачення і радіомовлення України. Свідоцтво видавця серія ДК № 5944 від 15.01.2018 р.

Електронна версія – на сайті НБУ ім. В.І. Вернадського НАН України [www.nbuv.gov.ua/portal/natural/Umlzh/index.html](http://www.nbuv.gov.ua/portal/natural/Umlzh/index.html)

Журнал видається з 1995 р.

**Editor-in-Chief:**

*P. Neyezhnikov, National Scientific Centre “Institute of Metrology”, Kharkiv, Ukraine*

**Deputy Editor-in-Chief, Scientific Editor:**

*Yu. Pavlenko, National Scientific Centre “Institute of Metrology”, Kharkiv, Ukraine*

**Editorial Board:**

*O. Bodnar, Örebro University, Örebro, Sweden*  
*O. Dzysyuk, Metrology Center of Military Standards of the Armed Forces of Ukraine, Kharkiv, Ukraine*  
*M. Gorobets, V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine*  
*S. Kondrashov, National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, Kharkiv, Ukraine*  
*O. Kupko, National Scientific Centre “Institute of Metrology”, Kharkiv, Ukraine*  
*G. Machin, National Physical Laboratory, Teddington, UK*  
*E. Manske, Technical University of Ilmenau, Germany*  
*I. Mel, National Scientific Centre “Institute of Metrology”, Kharkiv, Ukraine*  
*G. Narodnytskyi, National Scientific Centre “Institute of Metrology”, Kharkiv, Ukraine*  
*L. Nazarenko, O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv, Kharkiv, Ukraine*  
*V. Parakuda, DP NDI “Systema”, Lviv, Ukraine*  
*O. Prokopov, National Scientific Centre “Institute of Metrology”, Kharkiv, Ukraine*  
*V. Semenets, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine*  
*V. Sklyarov, National Scientific Centre “Institute of Metrology”, Kharkiv, Ukraine*  
*B. Stadnyk, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*  
*Yu. Tuz, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine*  
*O. Velychko, SE “Ukrmetrteststandard”, Kyiv, Ukraine*  
*I. Zakharov, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine*

**Responsible Secretary** S. Bilousova  
**Literary Editor** N. Myroshnychenko  
**Desktop Publishing and Design** A. Mytsik

The Journal is registered in the Ministry of Justice of Ukraine.

**Editorial Address:** NSC “Institute of Metrology”, Myronosytska Str., 42, Kharkiv, 61002  
**Tel.:** (057) 704-98-43, fax: (057) 700-34-47  
**E-mail:** journal@metrology.kharkov.ua  
**Website:** <http://umj.metrology.kharkov.ua/>

The edition is indexed by international bibliometric and scientometric database: **Web of Science Core Collection, Google Scholar, WorldCat and BASE**.  
**ISSN (Print)** 2306-7039  
**ISSN (Online)** 2522-1345  
**DOI:** 10.24027/2306-7039

The Certificate of State Registration: series KV No. 22932-12832PR of September 26, 2017.  
“Ukrainian Metrological Journal” was included to the List of scientific specialized editions of Ukraine based on the Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine No. 1301, dated October, 15, 2019 in category “A”.  
NSC “Institute of Metrology” is registered in the State Committee for Television and Radio Broadcasting of Ukraine Certificate of publisher series DK No. 5944, dated January 15, 2018.

Electronic version is on the website of Vernadsky National Library of The NAS of Ukraine [www.nbuv.gov.ua/portal/natural/Umlzh/index.html](http://www.nbuv.gov.ua/portal/natural/Umlzh/index.html)

The Journal has been issued since 1995

**Вимірювання електричних та магнітних величин**

**В.Ф. Болух, О.І. Вінніченко, П.І. Нєсжмаков, А.В. Омельченко.** Зменшення автосейсмічних коливань балістичного лазерного гравіметра за рахунок збудження індукційно-динамічної катапульти пакетом імпульсів ..... 3  
**О.М. Величко, Т.Б. Гордієнко.** Основні результати додаткових звірень для електричної енергії GULFMET.EM-S5/5.1 на частотах 50/53 Гц..... 12  
**М.Г. Кокодій, А.О. Натарова, С.В. Погорєлов.** Вимірювання характеристик захисних екранів мікрохвильового випромінювання, які використовують тонкі провідні волокна..... 20  
**В.Я. Гальченко, А.В. Сторчак, Р.В. Трємбовецька, В.В. Тичков.** Створення сурогатної моделі для відновлення приповерхневих профілів електрофізичних характеристик циліндричних об'єктів ..... 27

**Вимірювання маси та пов'язаних із нею величин**

**І.П. Захаров, О.А. Боцюра, О.М. Паценко.** Врахування ексцесів вхідних величин у процедурі оцінювання невизначеності вимірювань на прикладі калібрування гирі ..... 36

**Вимірювання температури та теплофізичних властивостей**

**О.В. Заболотний, В.А. Заболотний, М.Д. Кошовий.** Первинний вимірювальний перетворювач вмісту вологи для контролю якості зерна ..... 42  
**В.Г. Васильєва, В.В. Шведова.** Аспекти визначення температурних градієнтів термостатичних камер..... 50

**Фізико-хімічні вимірювання**

**М. Вічарова, М. Розікова, Р. Палєнчар, І. Тєсарж.** Простежуваність до державних первинних еталонів у галузі фізичної хімії у СМІ ..... 57

**Геодезія та геоінформаційне моделювання**

**К.А. Мамонов, Р.С. В'яткін, О.С. Камєнєв, В.І. Троян.** Математичне моделювання рівня використання земель об'єктів екомережі регіонів. .... 65

**Інформація**

Оголошення про набір на курси підвищення кваліфікації фахівців ..... 73



**Measurements of electrical and magnetic quantities**

**V. Bolyukh, O. Vinnichenko, P. Nyezhamkov, A. Omelchenko.** Reduction of auto seismic oscillations of the ballistic laser gravimeter on account of the excitation of the induction-dynamic catapult by a pulse packet. .... 3  
**O. Velychko, T. Gordiyenko.** Main results of GULFMET.EM-S5/5.1 supplementary comparisons for electrical energy at frequencies of 50/53 Hz .. 12  
**N. Kokodiy, A. Natarova, S. Pogorelov.** Measurement of the characteristics of protective screens for microwave radiation made of thin conductive fibers ..... 20  
**V. Halchenko, A. Storchak, R. Trembovetska, V. Tychkov.** The creation of a surrogate model for restoring surface profiles of the electrophysical characteristics of cylindrical objects ..... 27



**Measurements of mass and related quantities**

**I. Zakharov, O. Botsiura, O. Patsenko.** Accounting for the kurtoses of input quantities in the procedure of evaluating measurement uncertainty using the example of weight calibration ..... 36



**Measurements of temperature and thermophysical properties**

**O. Zabolotnyi, V. Zabolotnyi, N. Koshevoy.** Primary measuring transducer of moisture content for grain quality control..... 42  
**V. Vasylieva, V. Shvedova.** The aspects of determining the temperature gradients of thermostatic chambers ..... 50



**Physical and chemical measurements**

**M. Vičarová, M. Roziková, R. Palenčár, J. Tesař.** The physical chemistry primary traceability at CMI ..... 57



**Geodesy and geoinformation modeling**

**K. Mamonov, R. Viatkin, O. Kamieniev, V. Troian.** Mathematical modeling of the level of land use of the objects of the ecological network of regions. .... 65



**Information**

Announcement of the intake to the courses of advanced training of specialists ..... 73



# Accounting for the kurtoses of input quantities in the procedure of evaluating measurement uncertainty using the example of weight calibration

I. Zakharov<sup>1,2</sup>, O. Botsiura<sup>2</sup>, O. Patsenko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> National Scientific Centre "Institute of Metrology", Myronosytska Str., 42, 61002, Kharkiv, Ukraine  
sashapatsenko@ukr.net

<sup>2</sup> Kharkiv National University of Radio Electronics, Nauky Ave., 14, 61166, Kharkiv, Ukraine  
newzip@ukr.net

## Abstract

Example 9.3.1.1 of JCGM-S1 "Mass calibration" is analyzed, which describes the comparison in air of reference and calibrated weights having the same nominal mass. JCGM-S1 compares uncertainty evaluation procedures based on the GUM uncertainty framework and the Monte Carlo method.

The article uses the procedure developed by the authors and consists in decomposing the measurement model into a Taylor series of the second order taking into account the kurtoses of the distributions of input quantities. To facilitate the calculations, the finite increment method is used. To find expanded uncertainty, the kurtosis method is used. Good agreement between the results obtained by the proposed method and the result obtained by the Monte Carlo method is shown.

**Keywords:** measurement uncertainty, calibration, weight, nonlinear model equation, kurtosis method.

Received: 01.06.2020

Edited: 19.07.2020

Approved for publication: 28.07.2020

## Introduction

Weight calibration is carried out by comparing its mass with a reference weight having the same mass using balance working in the air. Measurement uncertainty evaluating for this example is discussed in regulatory document JCGM-S1, 9.3.1.1. [1].

In [1], the measurement uncertainty evaluation using the methods of GUM [2] and Monte Carlo [3] is performed. At this, a significant bias in the measurement uncertainty evaluation obtained using GUM is discovered.

To implement the Monte Carlo method, one can apply, for example, the "Uncertainty machine" program developed by NIST [4]. However, one of the drawbacks of such programs is the lack of a total measurement uncertainty budget. Elimination of the above disadvantages is possible using the methods proposed by the authors in [5–7].

The purpose of this article is to implement the methods [5–7] for measurement uncertainty evaluation during calibration of weights with verification of their adequacy.

## 1. Development of a measurement model

Mass of calibrated weight  $m_w$  with mass density  $\rho_w$  is compared with a reference weight with mass density  $\rho_R$ , having nominally the same mass using balance working in air with mass density  $\rho_a$ . Since  $\rho_w$  and  $\rho_R$  are generally different, buoyancy of air should be taken into account. Therefore, based on the Archimedes law, we can write the following formula [1]:

$$m_w(1 - \rho_a/\rho_w) = (m_R + \delta m_R)(1 - \rho_a/\rho_R), \quad (1)$$

where  $m_R$  – actual mass of the reference weight;  $\delta m_R$  – actual mass of small weight with density  $\rho_R$ , added to equalize balance.

Usually the conventional mass of the calibrated weight  $m_{w,c}$  – mass of hypothetical weight with density  $\rho_0 = 8000 \text{ kg/m}^3$ , which balances the calibrated weight in the air with density  $\rho_{a0} = 1.2 \text{ kg/m}^3$ , is determined. Therefore, taking into account the notation of the conventional masses of reference weights  $m_{R,c}$ ,  $\delta m_R$ , model (1) takes the form [1]:

$$m_{w,c} \frac{(1-\rho_a/\rho_w)}{(1-\rho_{a0}/\rho_w)} = (m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \frac{(1-\rho_a/\rho_R)}{(1-\rho_{a0}/\rho_R)}. \quad (2)$$

Ultimately, for deviation  $\delta m$  of conventional mass of calibrated weight from its nominal value  $m_{nom}$

$$\delta m = m_{w,c} - m_{nom}, \quad (3)$$

the final model takes the form [1]:

$$\delta m = (m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \frac{(1-\rho_a/\rho_R)(1-\rho_{a0}/\rho_w)}{(1-\rho_{a0}/\rho_R)(1-\rho_a/\rho_w)} - m_{nom}. \quad (4)$$

Insofar as the equation (4) is nonlinear, in numerical value evaluation of the measurand and its uncertainty it is necessary to consider higher terms in the expansion (4) in the Taylor series of the second order considering kurtoses of input quantity distributions.

## 2. Calculation of the numerical value of the measurand

In the first approximation, the calculation of the numerical value of the measurand is carried out according to the formula:

$$\hat{\delta m} = (\hat{m}_{R,c} + \hat{\delta m}_{R,c}) \frac{(1-\hat{\rho}_a/\hat{\rho}_R)(1-\hat{\rho}_{a0}/\hat{\rho}_w)}{(1-\hat{\rho}_{a0}/\hat{\rho}_R)(1-\hat{\rho}_a/\hat{\rho}_w)} - \hat{m}_{nom}, \quad (5)$$

in which the values of input quantities are replaced by their numerical values marked with hats.

For given in [1] estimates of the numerical values of input quantities:  $\hat{m}_{R,c} = 100$  g;  $\hat{\delta m}_{R,c} = 1.234$  mg;  $\hat{\rho}_a = 1.2$  kg/m<sup>3</sup>,  $\hat{\rho}_w = \hat{\rho}_R = 8000$  kg/m<sup>3</sup> and  $\hat{m}_{nom} = 100$  g, we obtain  $\hat{\delta m} = 1.234$  mg.

$$u(\delta m) = \sqrt{c^2(m_{R,c})u^2(m_{R,c}) + c^2(\delta m_{R,c})u^2(\delta m_{R,c}) + c^2(\rho_a)u^2(\rho_a) + c^2(\rho_R)u^2(\rho_R) + c^2(\rho_w)u^2(\rho_w)}, \quad (8)$$

where  $u(x_i)$  and  $c(x_i)$  – the standard uncertainty of the input quantity  $X_i$  and the partial derivative of the measurand with respect to this

input quantity (sensitivity coefficient), respectively. Expressions for  $c(x_i)$  and their values are given in Table 2.

Formula (2) gives an unbiased estimate of the numerical value of the measurand only in the absence of uncertainties of input quantities. The bias  $\Delta_y$  of the numerical value of the measurand can be estimated taking into account the partial derivatives of the second order of the measurand with respect to the corresponding input quantities  $c(x_i)_2$  [5]:

$$\Delta_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c(x_i)_2 u^2(x_i), \quad (6)$$

where  $u(x_i)$ ,  $i=1,2,\dots,N$  – standard uncertainties of input quantities  $X_1, X_2, \dots, X_N$ .

For equation (4) the calculation of the bias for  $\hat{\delta m}$  is performed by the formula:

$$\Delta_c = -\frac{1}{2} [c(m_{R,c})_2 u^2(m_{R,c}) + c(\delta m_{R,c})_2 u^2(\delta m_{R,c}) + c(\rho_a)_2 u^2(\rho_a) + c(\rho_R)_2 u^2(\rho_R) + c(\rho_w)_2 u^2(\rho_w)]. \quad (7)$$

The expressions for  $c(x_i)_2$  are given in Table 1.

Since the second-order partial derivatives of the measurand with respect to all input quantities turned out to be equal to zero, the bias of the measurand numerical value will also be zero.

## 3. Calculation of the standard uncertainty of the measurand

In the first approximation, the calculation of the standard uncertainty of the measurand is carried out based on the equation:

Table 1

Second-order partial differential expressions

$c(x_i)_2$	Expressions for $c(x_i)_2$	Values $c(x_i)_2$
$c(m_{R,c})_2$	0	0
$c(\delta m_{R,c})_2$	0	0
$c(\rho_a)_2$	$2(m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \frac{(\rho_w - \rho_{a0})}{(\rho_R - \rho_{a0})} \cdot \frac{(\rho_R - \rho_w)}{(\rho_w - \rho_a)^3}$	0 m <sup>6</sup> /kg
$c(\rho_R)_2$	$2(m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \frac{(\rho_w - \rho_{a0})}{(\rho_w - \rho_a)} \cdot \frac{(\rho_a - \rho_{a0})}{(\rho_R - \rho_{a0})^3}$	0 m <sup>6</sup> /kg
$c(\rho_w)_2$	$-2(m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \frac{(\rho_R - \rho_a)}{(\rho_R - \rho_{a0})} \cdot \frac{(\rho_a - \rho_{a0})}{(\rho_w - \rho_a)^3}$	0 m <sup>6</sup> /kg

Expressions for sensitivity coefficients		
$c(x_i)$	Expressions for $c(x_i)$	Values $c(x_i)$
$c(m_{R,c})$	$\frac{(\rho_R - \rho_a)(\rho_W - \rho_{a0})}{(\rho_R - \rho_{a0})(\rho_W - \rho_a)}$	1
$c(\delta m_{R,c})$	$\frac{(\bar{\rho}_R - \bar{\rho}_a)(\bar{\rho}_W - \bar{\rho}_{a0})}{(\bar{\rho}_R - \bar{\rho}_{a0})(\bar{\rho}_W - \bar{\rho}_a)}$	1
$c(\rho_a)$	$(m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \frac{(\rho_W - \rho_{a0})(\rho_R - \rho_W)}{(\rho_R - \rho_{a0})(\rho_W - \rho_a)^2}$	0 m <sup>3</sup>
$c(\rho_R)$	$-(m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \frac{(\rho_W - \rho_{a0})(\rho_a - \rho_{a0})}{(\rho_W - \rho_a)(\rho_R - \rho_{a0})^2}$	0 m <sup>3</sup>
$c(\rho_W)$	$(m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \frac{(\rho_R - \rho_a)(\rho_{a0} - \rho_a)}{(\rho_R - \rho_{a0})(\rho_W - \rho_a)^2}$	0 m <sup>3</sup>

For the above evaluations of input quantities, as well as for the standard uncertainty of the input quantities specified in [1]:  $u(m_{R,c}) = 0.05$  mg;  $u(\delta m_{R,c}) = 0.02$  mg;  $u(\rho_a) = 0.05774$  kg/m<sup>3</sup>;  $u(\rho_W) = 577.35$  kg/m<sup>3</sup>;  $u(\rho_R) = 28.87$  kg/m<sup>3</sup>, we obtain  $u(\delta m) = 0.05385$  mg.

Formula (6) provides an unbiased estimate of the standard uncertainty of the measurand only in the absence of uncertainties of the input quantities.

The bias of the variance of the measurand is calculated by the formula [6]:

$$\Delta(u^2) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N c^2(x_i)_2 \cdot [\eta(x_i) + 2] \cdot u^4(x_i) + \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} c^2(x_i, x_j) u^2(x_i) u^2(x_j), \quad (9)$$

where  $\eta(x_i)$  – kurtosis of the distribution of the  $i$ -th input quantity, which is taken from Table 3 [5],  $c(x_i, x_j)$  – a mixed second-order partial derivative of the measurand with respect to the  $i$ -th and  $j$ -th input quantities, which is estimated for known values of the input quantities.

The calculation the bias for  $u(\delta m)$  is made by the formula:

$$\begin{aligned} \Delta[u^2(\delta m)] = & \frac{1}{4} \{ [c(\rho_a)_2 u^2(\rho_a)]^2 [\eta(\rho_a) + 2] + [c(\rho_R)_2 u^2(\rho_R)]^2 [\eta(\rho_R) + 2] + [c(\rho_W)_2 u^2(\rho_W)]^2 [\eta(\rho_W) + 2] \} + \\ & + \{ [c(\delta m_{R,c}, \rho_R) u(m_{R,c}) u(\rho_R)]^2 + [c(m_{R,c}, \rho_a) u(m_{R,c}) u(\rho_a)]^2 + [c(m_{R,c}, \rho_W) u(m_{R,c}) u(\rho_W)]^2 + \\ & + [c(\delta m_{R,c}, \rho_R) u(\delta m_{R,c}) u(\rho_R)]^2 + [c(\delta m_{R,c}, \rho_a) u(\delta m_{R,c}) u(\rho_a)]^2 + [c(\delta m_{R,c}, \rho_W) u(\delta m_{R,c}) u(\rho_W)]^2 + \\ & + [c(\rho_a, \rho_R) u(\rho_a) u(\rho_R)]^2 + [c(\rho_a, \rho_W) u(\rho_a) u(\rho_W)]^2 + [c(\rho_R, \rho_W) u(\rho_R) u(\rho_W)]^2 \}, \quad (10) \end{aligned}$$

where  $c(x_i, x_j)$  – second-order mixed partial derivatives of the measurand with respect to the corresponding input quantities;  $\eta(x_i)$  – kurtoses of input quantities. Expressions for  $c(x_i, x_j)$  and their values are given in Table 4.

For the above input quantities estimates and their standard uncertainties, as well as for kurtoses corresponding to the distribution laws of input quantities taken in [1]  $\eta(m_{R,c}) = \eta(\delta m_{R,c}) = 0$ ;  $\eta(\rho_a) = \eta(\rho_R) = \eta(\rho_W) = -1.2$ , we obtain  $\Delta(u^2) = 0.00272$  mg<sup>2</sup>.

Table 3

Kurtosis values for various input quantities distributions

Distribution law	$\eta$
Arcsine	-1.5
Uniform	-1.2
Triangular	-0.6
Normal	0
Student's with the number of degrees of freedom $\nu$	6/(\nu-4)

Expressions for mixed second-order partial derivatives

$c(x_i, x_j)$	Expressions for $c(x_i, x_j)$	Values $c(x_i, x_j)$
$c(m_{R,c}, \rho_a)$	$\frac{(\rho_W - \rho_{a0})(\rho_R - \rho_W)}{(\rho_R - \rho_{a0})(\rho_W - \rho_a)^2}$	0 m <sup>3</sup> /kg
$c(m_{R,c}, \rho_W)$	$\frac{(\rho_R - \rho_a)(\rho_{a0} - \rho_a)}{(\rho_R - \rho_{a0})(\rho_W - \rho_a)^2}$	0 m <sup>3</sup> /kg
$c(m_{R,c}, \rho_R)$	$\frac{(\rho_W - \rho_{a0})(\rho_a - \rho_{a0})}{(\rho_W - \rho_a)(\rho_R - \rho_{a0})^2}$	0 m <sup>3</sup> /kg
$c(\delta m_{R,c}, \rho_a)$	$\frac{(\rho_W - \rho_{a0})(\rho_R - \rho_W)}{(\rho_R - \rho_{a0})(\rho_W - \rho_a)^2}$	0 m <sup>3</sup> /kg
$c(\delta m_{R,c}, \rho_W)$	$\frac{(\rho_R - \rho_a)(\rho_{a0} - \rho_a)}{(\rho_R - \rho_{a0})(\rho_W - \rho_a)^2}$	0 m <sup>3</sup> /kg
$c(\delta m_{R,c}, \rho_R)$	$\frac{(\rho_W - \rho_{a0})(\rho_a - \rho_{a0})}{(\rho_W - \rho_a)(\rho_R - \rho_{a0})^2}$	0 m <sup>3</sup> /kg
$c(\rho_a, \rho_W)$	$-(m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \frac{(\rho_{a0} + \rho_R - 2\rho_W)\rho_a + (\rho_W - 2\rho_R)\rho_{a0} + \rho_W\rho_R}{(\rho_W - \rho_a)^3(\rho_R - \rho_{a0})}$	-1.56×10 <sup>-9</sup> m <sup>6</sup> /kg
$c(\rho_a, \rho_R)$	$(\hat{m}_{R,c} + \hat{\delta m}_{R,c}) \frac{(\hat{\rho}_W - \hat{\rho}_{a0})^2}{(\hat{\rho}_R - \hat{\rho}_{a0})^2(\hat{\rho}_W - \hat{\rho}_a)^2}$	1.56×10 <sup>-9</sup> m <sup>6</sup> /kg
$c(\rho_W, \rho_R)$	$-(\hat{m}_{R,c} + \hat{\delta m}_{R,c}) \frac{(\hat{\rho}_a - \hat{\rho}_{a0})^2}{(\hat{\rho}_R - \hat{\rho}_{a0})^2(\hat{\rho}_W - \hat{\rho}_a)^2}$	0 m <sup>6</sup> /kg

The unbiased estimate of the combined standard uncertainty calculated by the formula:

$$u_0(\delta m) = \sqrt{u^2(\delta m) + \Delta(u^2)}. \quad (11)$$

For the above values  $u(\delta m)$  and  $\Delta(u^2)$ , we obtain  $u_0(\delta m) = 0.075$  mg, which is very close to the value calculated in [1] by the Monte Carlo method (0.0754 mg).

#### 4. Calculation of expanded uncertainty

Since there is no bias of the measurand, this indicates that the nonlinearity of the model does not introduce additional asymmetry into the distribution law of the measurand, therefore, to calculate the expanded uncertainty, we can use the kurtosis method proposed by the authors [7].

In this case, the kurtosis of the measurand is calculated by the formula:

$$\eta(\delta m) = \frac{1}{u^4(\delta m)} [\eta(m_{R,c})c^4(m_{R,c})u^4(m_{R,c}) + \eta(\delta m_{R,c})c^4(\delta m_{R,c})u^4(\delta m_{R,c}) + \eta(\rho_a)c^4(\rho_a)u^4(\rho_a) + \eta(\rho_W)c^4(\rho_W)u^4(\rho_W) + \eta(\rho_R)c^4(\rho_R)u^4(\rho_R)]. \quad (12)$$

For the above estimates of input quantities, standard uncertainties, and their kurtoses we have  $\eta(\delta m) = 0$ .

The value of the coverage factor for the probability of 0.95 is calculated by the formula [7]:

$$k_{0.95} = \begin{cases} 0.1085\eta^3 + 0.1\eta + 1.96, & \text{at } \eta < 0; \\ 1.96, & \text{at } \eta \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Since  $\eta(\delta m) = 0$  we take  $k_{0.95} = 1.96$ . In this case  $U(\delta m) = 1.47$  mg, which is very close to the value obtained in [1] by the Monte Carlo method (1.4955 mg).

#### 5. Uncertainty budget

The results are summarized in the uncertainty budget (Table 5).

In contrast to the usual uncertainty budget for the kurtosis method [7], two columns are added to Table 5 that take into account the nonlinearity of the measurement model.

Measurement uncertainty budget for weight calibration

$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$	$\eta(x_i)$	$c_i$	$u_i(y)$ , mg	$\Delta_i(y)$ , mg	$\Delta[u_i(y)]$ , mg
$m_{R,c}$	100 000 mg	0.05 mg	0	1	0.05	0	0
$\delta m_{R,c}$	1.234 mg	0.02 mg	0	1	0.02	0	0
$\rho_a$	1.2 kg/m <sup>3</sup>	0.05774 kg/m <sup>3</sup>	-1.2	0	0	0	0
$\rho_R$	8000 kg/m <sup>3</sup>	577.4 kg/m <sup>3</sup>	-1.2	0	0	0	-0.0521
$\rho_W$	8000 kg/m <sup>3</sup>	28.87 kg/m <sup>3</sup>	-1.2	0	0	0	0.0026
$Y$	$y_0$	$u_0(y)$	$\eta(y)$	$k_{0.95}$	$U(y)$	$\Delta_y$ , mg	$\Delta[u(y)]$
$\delta m$	1.234 mg	0.077 mg	0	1.96	0.15, mg	0	0.0522, mg

In the penultimate column of the budget  $\Delta_i(y)$  – bias of the measurand caused by each  $i$ -th input quantity;  $\Delta_y = \sum_{i=1}^N \Delta_i(y)$  – combined bias of the measurand. In the last column of the budget  $\Delta[u(y)]$  – bias of the standard uncertainty of the measurand caused by the  $i$ -th input quantity and the combined bias  $\Delta[u(y)] = \sqrt{\Delta[u^2(y)]}$ , which is calculated by the formula:

$$\Delta[u(y)] = \sqrt{\sum_{i=1}^N \{\Delta[u_i(y)]\}^2}. \quad (14)$$

The presence of additional columns makes it possible to obtain an unbiased estimate of the measurand and its uncertainty in the nonlinear model equation.

### Conclusions

An example of measurement uncertainty evaluation using the methods developed by the authors, at weight calibration as an example, is considered. Unbiased estimates of the measurand and its uncertainty are obtained.

It is shown that when calculating the standard and expanded uncertainty of the measurand, it is necessary to take into account the kurtoses of the input quantities. The obtained estimates of the standard and expanded uncertainties of the measurand showed good agreement with the estimates obtained by the Monte Carlo method [1], which proves the advantage of the proposed approaches in comparison with the GUM method [2].

## Врахування ексцесів вхідних величин у процедурі оцінювання невизначеності вимірювань на прикладі калібрування гирі

І.П. Захаров<sup>1,2</sup>, О.А. Боцюра<sup>2</sup>, О.М. Паценко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Національний науковий центр "Інститут метрології", вул. Мironosiцька, 42, 61002, Харків, Україна  
sashapatsenko@ukr.net

<sup>2</sup> Харківський національний університет радіоелектроніки, пр. Науки, 14, 61166, Харків, Україна  
newzip@ukr.net

### Анотація

Аналізується приклад 9.3.1.1 з JCGM-S1 "Калібрування маси", в котрому описуються звірення у повітрі еталонної гирі з гирею, що калібрується, які мають одну і ту ж саму номінальну масу. Здійснюється формування моделі вимірювань. Показано, що отримана модель є нелінійною відносно ряду вхідних величин.

У JCGM-S1 порівнюються процедури оцінювання невизначеності, що виконуються на основі концепції невизначеності GUM і методу Монте-Карло.

У статті використовується процедура, яка розроблена авторами та полягає у розкладанні моделі вимірювання в ряд Тейлора другого порядку з урахуванням ексцесів розподілів вхідних величин.

Оцінюється зміщення результату вимірювань. Отримано вирази для часткових похідних другого порядку. Показано, що для моделі, яка аналізується, їхні значення дорівнюють нулю, тому значення зміщення числового зна-

чення вимірюваної величини також дорівнюватиме нулю. Здійснюється обчислення стандартної невизначеності вимірюваної величини з урахуванням часткових похідних другого порядку та ексцесів вхідних величин. Показано, що отримане значення стандартної невизначеності суттєво відрізняється від аналогічного значення, отриманого за процедурою GUM.

Для знаходження розширеної невизначеності застосовується метод ексцесів. Показано хороший збіг результатів, отриманих запропонованим методом, із результатом, отриманим методом Монте-Карло.

Наведено бюджет невизначеності, який відрізняється від звичайного бюджету двома додатковими стовпцями, що враховують нелінійність моделі вимірювань. Присутність додаткових стовпців дозволяє отримувати незміщену оцінку вимірюваної величини та її невизначеності при нелінійному модельному рівнянні.

**Ключові слова:** невизначеність вимірювань; калібрування; гиря; нелінійне модельне рівняння; метод ексцесів.

## Учет эксцессов входных величин в процедуре оценивания неопределенности измерений на примере калибровки гири

И.П. Захаров<sup>1,2</sup>, О.А. Боцюра<sup>2</sup>, А.Н. Паценко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Національний научний центр "Інститут метрології", ул. Мירוносицька, 42, 61002, Харків, Україна  
sashapatsenko@ukr.net

<sup>2</sup> Харківський національний університет радіоелектроніки, пр. Науки, 14, 61166, Харків, Україна  
newzip@ukr.net

### Аннотация

Анализируется пример 9.3.1.1 из JCGM-S1 "Калибровка массы", в котором описаны сличения в воздухе эталонной и калибруемой гири, имеющих одну и ту же номинальную массу. В JCGM-S1 сравниваются процедуры оценивания неопределенности, выполняемые на основе концепции неопределенности GUM и метода Монте-Карло.

В статье используется процедура, разработанная авторами и заключающаяся в разложении модели измерения в ряд Тейлора второго порядка с учетом эксцессов распределений входных величин. Для нахождения расширенной неопределенности применяется метод эксцессов. Показано хорошее совпадение результатов, полученных предлагаемым методом, с результатом, полученным методом Монте-Карло.

**Ключевые слова:** неопределенность измерений; калибровка; гиря; нелинейное модельное уравнение; метод эксцессов.

### References

1. JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. JCGM, 2008. 90 p.
2. JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement. JCGM, 2008. 134 p.
3. Zakharov I.P., Vodotyka S.V. Application of Monte Carlo simulation for the evaluation of measurements uncertainty. *Metrology and Measurement Systems*, 2008, vol. 15, no. 1, pp. 118–123.
4. Uncertainty machine. Available at: <https://uncertainty.nist.gov/>
5. Botsiura O., Zakharov I., Neyezhnikov P. Reduction of the measurand estimate bias for nonlinear model equation. *Journal of Physics: Conf. Series*, 2018, 1065, 212002, pp. 1–4. doi:10.1088/1742-6596/1065/21/212002
6. Zakharov I., Neyezhnikov P., Botsiura O. Reduction of the bias of measurement uncertainty estimates with significant non-linearity of a model equation. *Journal of Physics: Conf. Series*, 2019, 1379, 012013, pp. 1–5. doi:10.1088/1742-6596/1379/1/012013
7. Zakharov I.P., Botsyura O.A. Calculation of Expanded Uncertainty in Measurements Using the Kurtosis Method when Implementing a Bayesian Approach. *Measurement Techniques*, 2019, vol.62(4), pp. 327–331. doi: 10.1007/s11018-019-01625-x