ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Василишин К.В.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
61166, Харків, просп. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36, e-mail: kostiantyn.vasylyshyn@nure.ua

The first boundary value problem for a nonlinear heat equation on an interval with a power coefficient of heat conductivity and power functions of heat sources is considered. For its numerical solution, was proposed to use the two-sided approximates method.

Розглядатимемо задачу знаходження додатного розв'язку нелінійної крайової задачі вигляду

$$-\frac{d}{dx}\left(k(T)\frac{dT}{dx}\right)=\lambda f(T),\ 0<x<l, \tag{1}$$

$$T(0)=T(l)=0, \tag{2}$$

де $k(T)=k_0T^{\sigma}$, $k_0>0$, $\sigma>0$ – параметри нелінійності середовища, $f(T)=T^{\gamma}$, $\gamma>0$, $\lambda>0$ – стала.

Задача (1), (2) є математичною моделлю процесу теплопровідності у випадку, коли коефіцієнт теплопровідності залежить степенево від температури і коли на $(0,l)$ наявні джерела тепловиділення за степеневим законом $f(T)$ (параметр λ характеризує їх потужність) [1].

У задачі (1), (2) зробимо заміну $T=\left[\frac{\sigma+1}{k_0}u\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$, де $u(x)$ – нова невідома функція. Тоді для функції u отримаємо крайову задачу

$$-u''=\lambda F(u),\ 0<x<l, \tag{3}$$

$$u(0)=u(l)=0, \tag{4}$$

де $F(u)=f\left(\left[\frac{\sigma+1}{k_0}u\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}\right)=\left[\frac{\sigma+1}{k_0}u\right]^{\frac{\gamma}{1+\sigma}}$.

Для розв'язання задачі (3), (4) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна [2]. Якщо $G(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі (3), (4), то ця задача еквівалентна рівнянню Гаммерштейна

$$u(x)=\lambda\int_0^l G(x,s)F(u(s))ds. \tag{5}$$

Узагальненим розв'язком задачі (3), (4) називатимемо функцію $u^* \in C[0, l]$, яка є розв'язком рівняння (5). Тоді розв'язком (узагальненим) вихідної задачі (1), (2) вважатимемо функцію $T^* = \left[\frac{\sigma+1}{k_0} u^* \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$.

У конусі K_+ невід'ємних функцій з $C[0, l]$ виділимо інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$ умовами
$\lambda \int_0^l G(x, s) F(v_0(s)) ds \geq v_0(x)$ і $\lambda \int_0^l G(x, s) F(w_0(s)) ds \leq w_0(x)$ для всіх $x \in [0, l]$.

Сформуємо далі ітераційний процес за схемою:

$$v^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^l G(x, s) F(v^{(k)}(s)) ds, \; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

$$w^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^l G(x, s) F(w^{(k)}(s)) ds, \; k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

$$v^{(0)}(x) = v_0(x), \; w^{(0)}(x) = w_0(x). \tag{8}$$

Можна довести, що за умови $\gamma < 1 + \sigma$ ітераційний процес (6) – (8) збігається у нормі простору $C[0, l]$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (3), (4), причому має місце ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq \boldsymbol{v}^{(1)} \leq \ldots \leq v^{(k)} \leq \ldots \leq u^* \leq \ldots \leq w^{(k)} \leq \ldots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0. \tag{9}$$

Ланцюг нерівностей (9) характеризує ітераційний процес (6) – (8) як метод двобічних наближень. Його перевагою є те, що на кожній k-й ітерації для наближеного розв'язку $u^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x))$ ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки: $\left\| u^* - u^{(k)} \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| w^{(k)} - v^{(k)} \right\|$. Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітерації слід проводити до виконання нерівності $\max_{x \in [0, l]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon$. Тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$, а отже, $T^*(x) \approx \left[\frac{\sigma+1}{k_0} u^{(k)}(x) \right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$.

Список використаних джерел:

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. 320 с.

2. Сидоров М.В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2019. № 1 (48). С. 57-66.