

УДК 514.18



І.С. Табакова¹, Т.О. Трунова²

¹⁻²ХНУРЕ, м. Харків, Україна, tabakovaira@gmail.com

ПОБУДОВА ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ НА ОДНОСТОРОННІХ ПОВЕРХНЯХ ТИПУ ПЛЯШКИ КЛЕЙНА

Наведено спосіб побудови геодезичних ліній на односторонніх поверхнях типу пляшки Клейна з метою дослідити її топологічну властивість при зміні геометричної форми поверхні. Задача визначення геодезичних зведена до математичної задачі рішення системи двох диференціальних рівнянь із певними початковими умовами, яка вирішується чисельно.

СИМВОЛ КРИСТОФФЕЛЯ, ГЕОДЕЗИЧНА ЛІНІЯ, ТОПОЛОГІЧНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ПЛЯШКА КЛЕЙНА, ОДНОСТОРОННЯ ПОВЕРХНЯ

Вступ

Поверхні типу пляшка Клейна є двовимірними неорієнтованим багатовидами - тобто топологічним простором, що локально виглядає як «звичайний» евклідовий простір. На відміну від стрічки Мебіуса, поверхні типу пляшки Клейна є замкнутими компактними багатовидами без краю. Для демонстрації топологічного інваріанту сім'ї зазначених поверхонь доцільно розглянути геодезичні лінії на елементах цієї сім'ї, і переконатися у збереженні топологічної властивості її геометричної форми. Тобто необхідно дослідити, як змінюється форма геодезичної лінії при топологічних перетвореннях поверхні типу пляшка Клейна.

1. Огляд відомих результатів та постановка задачі

У роботі [1] наведено узагальнене рівняння односторонньої поверхні типу пляшки Клейна:

$$\begin{aligned} x &:= w(u)\sin(v); \\ y &:= s \sin(u) - \sin(su) - w(u)\cos\left(\frac{(s-1)u}{2}\right)\cos(v); \\ z &:= s \cos(u) + \cos(su) - w(u)\sin\left(\frac{(s-1)u}{2}\right)\cos(v), \end{aligned} \quad (1)$$

де $w := \frac{1}{4}(s+1)\left(\cos\left((s+1)u + \frac{\pi}{T}\right) + \sqrt{2}\right)$.

У описі (1) параметр s визначає кількість «раструбів», а параметр T впливає на їх «товщину».

В роботах [2,3] наведено спосіб визначення геодезичної лінії на гладкій поверхні, описаної рівняннями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, за напрямком її виходу із заданої точки. Вважається, що змінні u і v залежать від параметра t . Для опису геодезичної лінії необхідно скласти систему двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 uv' + \Gamma_{22}^1 v'^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 uv' + \Gamma_{22}^2 v'^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

З врахуванням початкових умов

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad u'(0) = du_0, \quad v'(0) = dv_0$$

система (1) має єдиний розв'язок, тому через кожену точку поверхні у заданому напрямку проходить одна геодезична. Символи Кристоффеля Γ_{ij}^k записують через коефіцієнти першої квадратичної форми.

Але комп'ютерна реалізація такого підходу викликає певні труднощі. Тому доцільними будуть дослідження, пов'язані з побудовою геодезичних ліній на поверхнях складної форми, що дозволить набути досвіду реалізації методу для реальних задач.

Розробити спосіб побудови геодезичних ліній на односторонніх поверхнях типу пляшки Клейна з метою дослідити її топологічну властивість при зміні геометричної форми поверхні.

2. Дослідження способів побудови геодезичних ліній

Для комп'ютерної реалізації наближеного способу визначення геодезичних ліній необхідно формувати систему початкових умов параметрів та їх похідних, межі зміни параметра та кількість точок лінії геодезичної, а визначитись з процедурою чисельного інтегрування системи рівнянь при заданих початкових умовах. В результаті необхідно одержати графічне зображення розв'язання системи рівнянь геодезичних, а при здійсненні динамічну візуалізацію переміщення віртуальної частки по геодезичній лінії заданої поверхні [4].

Вирази для опису системи диференціальних рівнянь і відповідних квадратичних форм і їх похідних є надто громіздкими, і тому тут не наводяться. Обчислення виконаємо з такими параметрами:

- межі зміни параметрів $ustart := 0, \quad uend := 2\pi, \quad vstart := 0, \quad vend := 5\pi$;

- координати стартової точки $u_0 := 0, \quad v_0 := 0$;

- напрям виходу геодезичної зі стартової точки

задається виразами $Du0 := \frac{\pi}{2}, \quad Dv0 := \frac{\pi}{4}$;

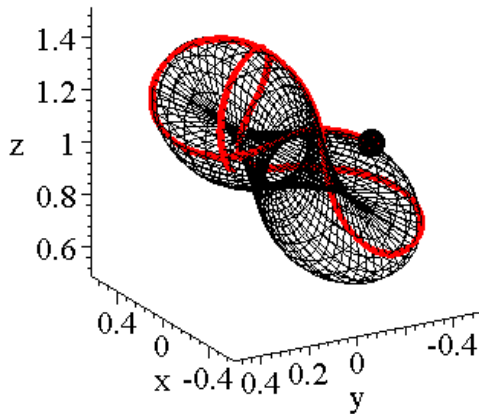
- $N = 150$ кількість точок на геодезичній;

- $t_{max} = 16$ - час інтегруванні системи рівнянь.

В декартовій системі координат стартова точка геодезичної лінії на поверхні (1) матиме координати:

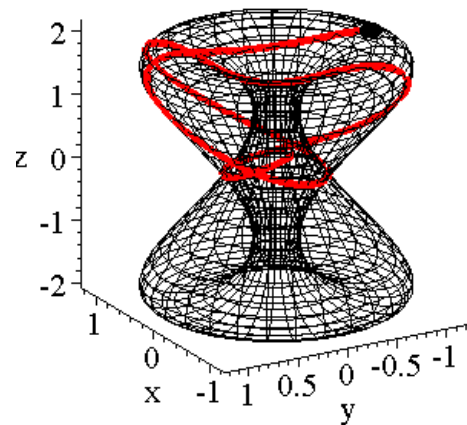
$$\begin{aligned} x(0,0) &= 0; \\ y(0,0) &= -\frac{1}{4}(s+1)\left(\cos\left(\frac{\pi}{T}\right) + \sqrt{2}\right); \\ z(0,0) &= s+1. \end{aligned} \quad (3)$$

На рис. 1 зображено геодезичну лінію на поверхні (1) залежно від значень s . Тут і далі сферою позначено стартову точку геодезичної.

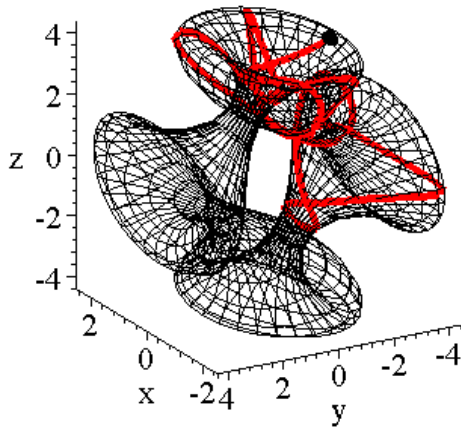


$T = 2; s = 0.$

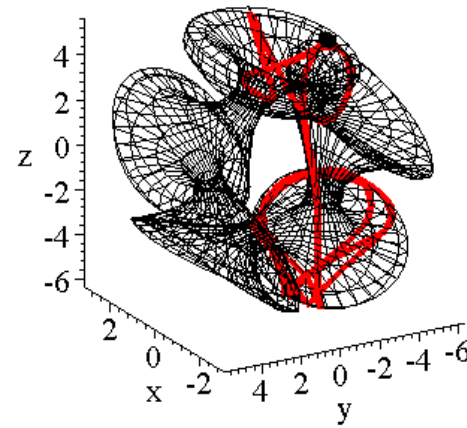
На рис. 2 зображено геодезичну лінію на поверхні (1) залежно від від'ємних значень s .



$T = 3; s = 1.$

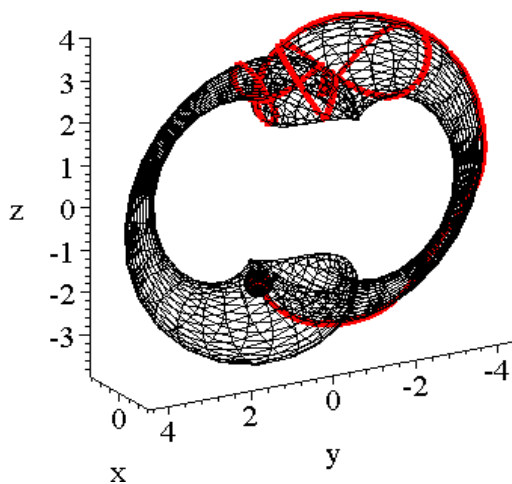


$T = 5; s = 3.$

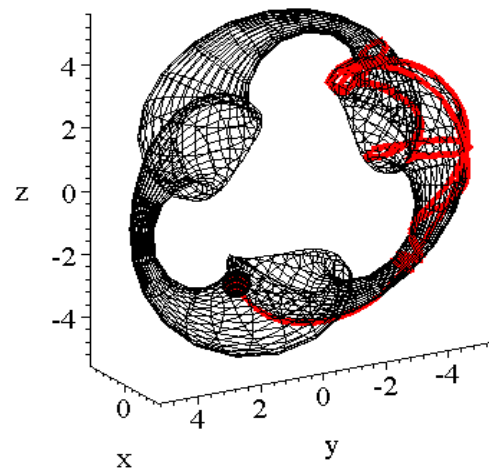


$T = 6; s = 4.$

Рис. 1. Геодезичні на поверхні (1) залежно від значень s і T



$T = 5; s = -3.$



$T = 6; s = -4.$

Рис. 2. Геодезичні на поверхні (1) залежно від від'ємних значень s

Цікавим є випадок з дробовим значенням T . Приклади наведено на рис. 3. Але найбільш цікавим буде перегляд створеного анімаційного фільму, коли

змінюються певні параметри. На рис. 4. наведено зображення кадрів анімації для деяких значень s при $T = 24$.

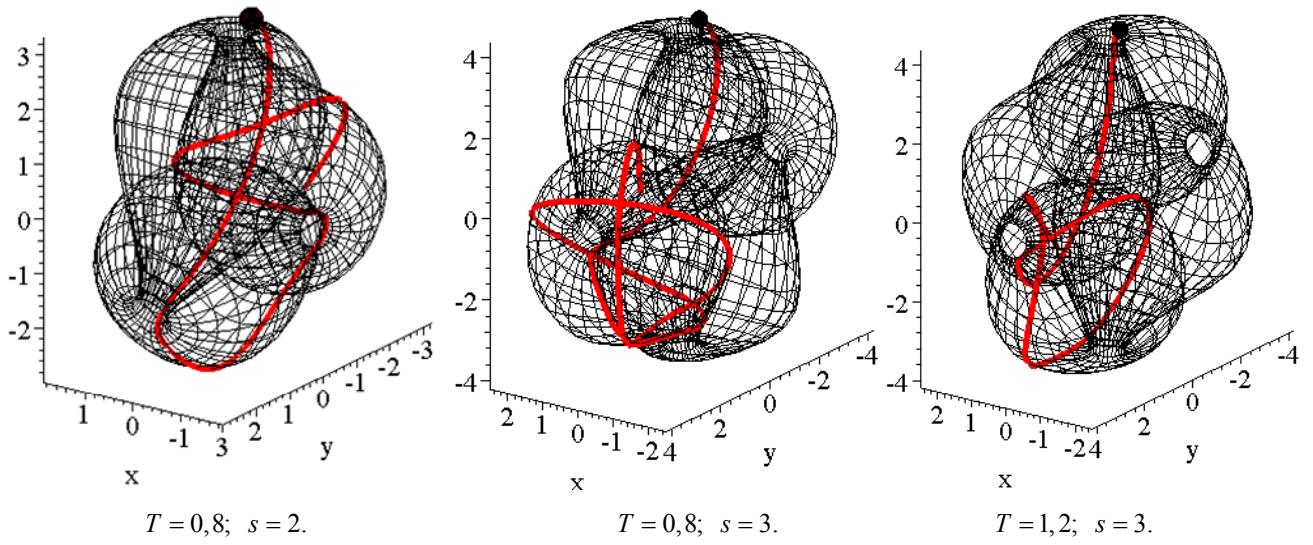


Рис. 3. Геодезичні на поверхні (1) з дробовим значенням T

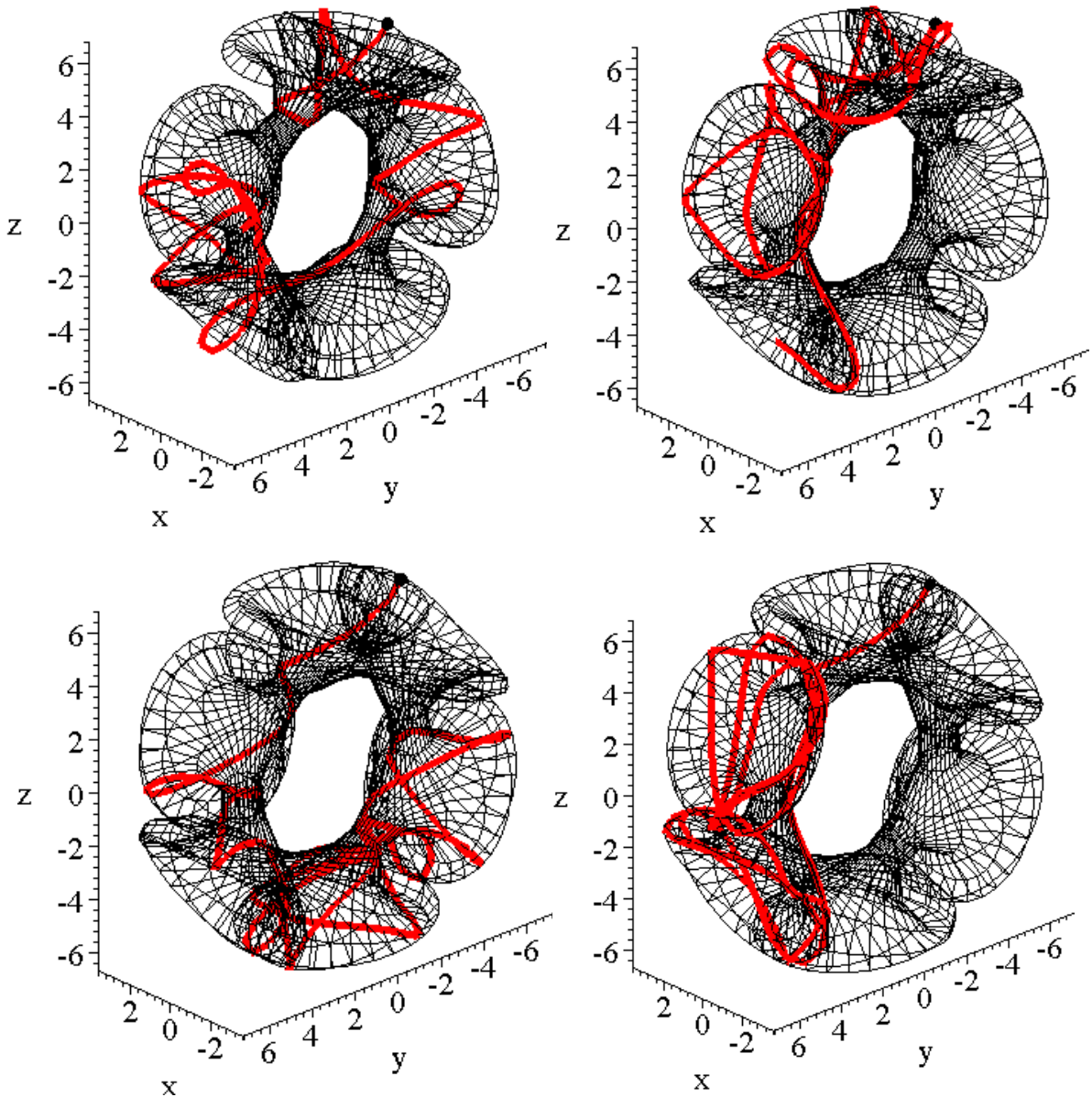


Рис. 4. Кадри анімації геодезичної залежно від s при $T = 24$

Висновки

За допомогою анімаційного фільму можна наочною переконатися, що геодезична лінія є топологічним інваріантом сім'ї поверхонь типу Клейна. Є можливість дослідити, як змінюється форма геодезичної лінії при топологічних перетвореннях поверхонь цього класу.

Список літератури: 1. Définition de la N-Bouteille de Jeener-Klein Режим доступа: http://www.lactamme.polytechnique.fr/descripteurs/Commentaires_NKleinBottle.01.html 2. Жукова, Н.И. Геодезические линии на поверхностях / Н.И. Жукова, А.В.Багаев. - Н. Новгород : Издательство Нижегородского государственного университета, - 2008. - 54 с. 3. Голованов, Н.Н. Геометрическое моделирование. / Н.Н. Голованов - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002, - 472 с. 4. Табакова, І. С. Побудова геодезичної лінії гладкої поверхні, що виходить із даної точки у заданому напрямку / І. С. Табакова // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Математика. Геометрія. Інформатика. – Мелітополь : МДПУ, 2014. – Т. 1 – С. 217–225.

Поступила до редколегії 19.04.2016

УДК 514.18

Построение геодезических линий на односторонних поверхностях типа бутылки Клейна / И.С. Табакова, Т.О. Трунова // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал. – 2016. – № 1(86). – С. 108-111.

Задачу определения геодезических можно свести к математической задаче о решении системы двух дифференциальных уравнений с определенными начальными условиями. Точное решение таких систем существует лишь для ограниченного количества простейших поверхностей, поэтому на практике системы решать необходимо численно. Дальнейшие исследования связаны с геометрическим моделированием геодезических линий для гладких поверхностей сложной формы. Это позволит реализовать применение геодезических линий для разнообразных внедрений при условии учета их метрических свойств, важных на практике.

Ил. 4. Библиогр.: 4 назв.

UDC 514.18

Construction the gnodezicheskikh of lines on unilateral surfaces like Klein's bottle / I.S.Tabakova, T.O. Trunova // Bionica Intellecta: Sci. Mag. – 2016. – № 1(86). – P. 108-111.

The problem of definition geodetic can be reduced to a mathematical task about the decision of system of two differential equations with certain entry conditions. The exact decision of such systems exists only for limited quantity of the elementary surfaces therefore in practice of system it is necessary to solve in number. Further researches are connected with geometrical modeling of geodetic lines for smooth surfaces of irregular shape. It will allow to realize application of geodetic lines for various introductions on condition of the accounting of their metric properties important in practice.

Fig. 4. Ref.: 4 items.