УДК 681.5.09

*И. Г. ФИЛИППЕНКО*, канд. техн. наук,
*В. Н. САМСОНКИН*, канд. техн. наук

# АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

При построении алгоритмов регулирования движения робототехнических систем, основанных на бионических принципах, используются пространственно-временные алгоритмы. При моделировании данных алгоритмов система разностных уравнений преобразуется в систему с целочисленными значениями коэффициентов. Представляет интерес зависимость погрешностей целочисленного округления от выбора коэффициентов разностного уравнения.

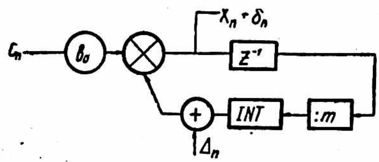


Рис. 1

Рассмотрим разностное уравнение 1-го порядка $x_n = b_0 c_n - \mathrm{INT}\left(\frac{x_{n-1}}{m}\right)$ (1), где $c_n = 1$; INT — операция определения целой части числа; $b_0$, $m$ — целые положительные числа.

Ошибку, которая имеет место в результате выполнения операции INT, обозначим $\Delta_n$. Здесь $\Delta_n = -\frac{x_{n-1}}{m} + \mathrm{INT}\left(\frac{x_{n-1}}{m}\right)$. Обозначим через $x'_n$ решение разностного уравнения $x'_n = b_0 c_n - \frac{x'_{n-1}}{m}$ (2). Тогда $x'_n$ можно определить так: $x'_n = x_n + \delta_n$, где $\delta_n$ — ошибка, обусловленная операцией INT.

Для исследования погрешностей, вводимых операцией INT, следует указать, что данные погрешности имеют стохастическую природу. Кроме того, предположим, что ошибки округления $\Delta_n$ при различных $n$ независимы, и для определения оценки погрешности воспользуемся приближенной моделью, основанной на применении теории шума для линейных систем [1].

Эксперименты показали, что коэффициент $b_0$ влияет сложным образом на ошибку $\delta_n$. Поэтому дисперсию погрешностей округления будем определять в два этапа, исходя из формулы

$$\sigma_0^2 = f^2(b_0)\,\sigma_1^2, \tag{3}$$

где $\sigma_1^2$ — дисперсия погрешностей разностного уравнения (1) при $b_0 = 1$; $f(b_0)$ — функция, учитывающая влияние $b_0$.

1. Рассмотрим соотношение (1) при $b_0 = 1$. Учитывая, что $0 \leqslant \Delta_n < 1$, одиночная ошибка $\Delta_n$ подчиняется равномерному закону распределения плотности вероятности $g(\Delta) = 1$, $0 \leqslant \Delta < 1$ и имеет дисперсию ([2]) $\sigma^2(\Delta) = 1/12$ (4).

На рис. 1 изображена шумовая модель цифрового фильтра (ЦФ), соответствующего уравнению (1), показано, каким образом вводится шум округления. Учитывая, что установившееся состояние наступило, дисперсия ошибки $\delta_n(1)$ (где $\delta_n(1) = \delta_n$ при $b_0 = 1$), согласно [1], определится из формулы

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2(\Delta)}{2\pi_j} \oint P(z) P\left(\frac{1}{z}\right) z^{-1} dz, \tag{5}$$

где $P(z)$ — $z$ — передаточная функция ЦФ (1); $j^2 = -1$; $\sigma^2(\Delta)$ определяется из (4).

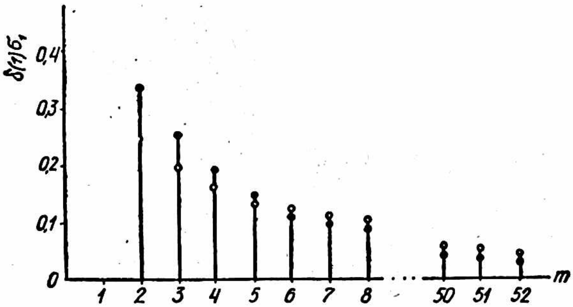


Рис. 2

Исходя из (1) $z$-передаточная функция ЦФ имеет вид $P(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{m}}$. Для обеспечения устойчивой работы ЦФ, согласно критерию Шур — Кона, необходимо выполнение условия $m > 1$. Интегрирование в (5) ведется вдоль круга единичного радиуса с центром в точке 0. Функция $Q(z) = P(z) P\left(\frac{1}{z}\right) z^{-1}$ голоморфна, поэтому для определения интеграла по поверхности от функции $Q(z)$ можно применить теорему Коши о вычетах:

$$\oint Q(z)\, dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Res} Q(z_i).$$

Вычеты вычисляются для полюсов $z_1 = 0$, $z_2 = -\frac{1}{m}$ (при этом $K = 2$). В результате применения теоремы Коши получим

$$\sigma_1^2 = \frac{m\sigma^2(\Delta)}{m^2 - 1}. \tag{6}$$

На рис. 2 показан сравнительный график изменения среднеквадратичного отклонения $\left(\sigma_1 = \sqrt{\sigma_1^2}\right)$ и ошибки $\sigma_n(1) = x' - x$, полученной в результате проведения экспериментов при $b_0 = 1$ (• — экспериментальные данные; ○ — теоретические данные). Значения $\delta_n$ (1) получены после окончания в ЦФ переходных процессов, т. е. в установившемся состоянии.

Для того чтобы среднеквадратичное отклонение $\sigma_1$ наиболее точно описывало экспериментальную кривую $\delta(1)$, введена поправочная функция $r(m)$ следующего вида:

$$r(m) = \begin{cases} t, & \text{если } 2 \leqslant m < 5; \\ \dfrac{1-t^2}{5t}, & \text{если } 5 \leqslant m < 10; \\ \dfrac{1}{t}, & \text{если } m \geqslant 10, \end{cases}$$

где $t = 1{,}4$.

Таким образом, окончательно дисперсия погрешностей на выходе ЦФ 1-го порядка вида (1) при $b_0 = 1$ в установившемся состоянии с учетом (5) определится из следующего выражения:

$$\sigma_1^2 = \frac{m\sigma^2(\Delta)\, r^2(m)}{m^2-1}. \tag{7}$$

2. Для определения $f(b_0)$ проведены эксперименты. Определялись значения $f_э = \delta/\delta(1)$. Замечательно, что $f_э$ принимает только целые положительные значения. Оказалось, что при $m \geqslant b_0 : f_э = b_0$. Для $m < b_0 : f_э$ имеет довольно сложную зависимость от $m$ и $b_0$, т. е. $f_э = \varphi(b_0, m)$, причем функция $\varphi(b_0, m)$ периодическая, период которой — величина непостоянная. Необходимо, чтобы $f(b_0) = \varphi(b_0, m)$ для всех пар $(b_0, m)$. Очевидно, что функция $f$ также зависит и от $m$, т. е. необходимо найти функцию $f(b_0, m)$ такую, чтобы для всех пар $(b_0, m)$ выполнялось равенство $f(b_0, m) = \varphi(b_0, m)$.

Исходя из вида полученной в результате экспериментов функции $\varphi(b_0, m)$ для ее аппроксимации была найдена функция $f(b_0, m) = b_0 - \left(\mathrm{INT}\left(\frac{b_0}{m}\right) - k\right)(m+1)$ **(8)**, где $k$ — изменяющаяся величина, которая определяется из экспериментов. Закон изменения $k$ ищется в виде $k = [p(m)\, b_0 + s(m)]$. В результате расчетов найдено, что

$$p(m) = \frac{1}{m(m+1)}; \quad s(m) = \frac{|m-3|}{m+1}$$

и, таким образом,

$$k = \mathrm{INT}\left(\frac{b_0}{m(m+1)} + \frac{|m-3|}{m+1}\right). \tag{9}$$

Подставив $k$ из (8) в (7), получим

$$f(b_0, m) = b_0 - \left[\mathrm{INT}\left(\frac{b_0}{m}\right) - \mathrm{INT}\left(\frac{b_0}{m(m+1)} + \frac{|m-3|}{m+1}\right)\right](m+1). \tag{10}$$

Вероятность $P(f = \varphi) = 0{,}9$.

Окончательно дисперсия ошибки, возникающей в ЦФ (1) вследствие наличия операции INT, определяется с помощью формулы $\sigma_0^2 = f^2(b_0, m)\,\sigma_1^2$ **(11)**. Здесь $\sigma_1^2$ определяется из формулы (7); $f(b_0, m)$ — из формулы (10).

3. Функция $f_э = \varphi(b_0, m)$ обладает замечательным свойством: при некоторых парах $(b_0, m) f_э = 0$. Это означает, что при данных парах $(b_0, m)$ ошибка на выходе, получаемая вследствие применения операции INT, $\delta = 0$. Следовательно, для данного $b_0$ можно подобрать такое $m$, чтобы в установившемся состоянии уравнения (1) и (2) были адекватны.

В результате анализа $\varphi(b_0, m)$ установлено, что если $b_0$ — простое число, то $f(b_0, m) = 0$ при $m = b_0 - 1$, или, что то же самое, при фиксированном $m: f(m+1, m) = 0$.

В общем случае: пусть $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, b_0\}$ — совокупность делителей $b_0$, причем $n_i > 2$ $(i = \overline{1, k})$. Тогда при $m = \{n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_k - 1, b_0 - 1\}$ **(12)** ошибка на выходе ЦФ (1) $\delta = 0$. Аналогичные свойства приписаны функции $f(b_0, m)$.

*Заключение.* При исследовании ЦФ (1) возникает ошибка $\delta_n = \overset{*}{x}_n - x_n$, получаемая вследствие операции INT. Для того чтобы оценить эту ошибку, была разработана шумовая модель ЦФ (1), а также получены соотношения для дисперсии округления. Это позволит определить дисперсию (среднеквадратичное отклонение) получаемой погрешности в зависимости от значения полюса $z$ — передаточной функции $(1/m)$ ЦФ, а также коэффициента усиления ЦФ $(b_0)$.

Обнаружено замечательное свойство: при некоторых соотношениях между $b_0$ и $m$ ошибка равна нулю, что позволяет уравнению ЦФ с округлением и без округления рассматривать как адекватные. Предлагается следующий алгоритм для определения $f(b_0, m)$.

Шаг 1. Для заданного $m$ определим величину $a$ по формуле (7).

Шаг 2. Вычислить делители $b_0$. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}$ — делители $b_0$ $(n_{k+1} = b_0)$.

Шаг 3. Пусть $i = 1$.

Шаг 4. Если $m = n_i - 1$, $h = 0$ и перейти к шагу 7. Иначе перейти к шагу 5.

Шаг 5. $i = i + 1$. Если $i \leqslant k + 1$, перейти к шагу 4, иначе — к шагу 6.

Шаг 6. Вычислить значение $h$ по формуле (10).

Шаг 7. Значение функции $f(b_0, m) = h$.

**Список литературы:** 1. *Голд Б., Рэйдер Ч.* Цифровая обработка сигналов.— М.: Сов. радио, 1973.— 368 с. 2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей.— М.: Наука, 1969.—576 с. 3. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел.—М.—Л. Гос-издат технико-теоретич. лит-ры, 1952.—180 с. 4. *Филиппенко И. Г., Самсон-кин В. Н.* Оценка погрешностей самонастраивающегося цифрового фильтра.— Системы управления летательных аппаратов, 1979, вып. 5, с. 81—86.

*Поступила в редколлегию 03.03.81.*

УДК 631.3.01

*А. А. РОСЬ*

## ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО СИНТЕЗА УПРАВЛЯЮЩИХ АЛГОРИТМОВ

Бурное внедрение вычислительных машин в процесс управления приводит к резкому увеличению объема программного обеспечения управляющих ЭВМ. Очевидно, через 10 лет соот-