

И. Ш. НЕВЛЮДОВ, д-р техн. наук, проф., С. С. ВЕЛИКОДНЫЙ

МЕТОД ИНТЕРПОЛЯЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНТУРОВ КРИВЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СОСТАВЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ПРОФИЛЕЙ ОБРАБОТКИ

Введение

Наиболее существенные проблемы, возникающие при обработке машиностроительных деталей со сложным профилем на станках с ЧПУ и других системах программного воспроизведения движений (СПВД), работающих в условиях обтекания аэро-, гидро- или газовыми потоками, связаны с заданием плоских геометрических контуров, которые наиболее целесообразно описать кривыми второго порядка, в частности – эллипсами, гиперболами и параболом (рис. 1, 2).

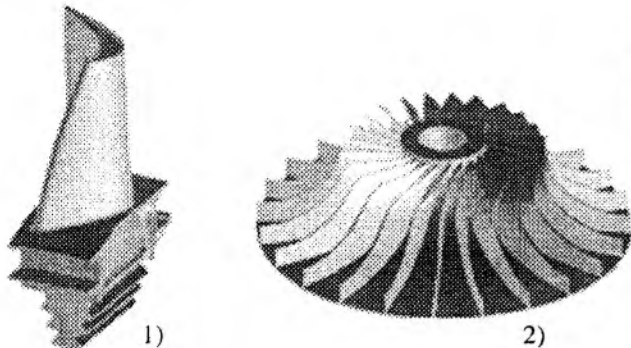


Рис. 1. Примеры конструкций, состоящих из большого набора криволинейных поверхностей:

- 1) – охлаждаемая турбинная лопатка;
- 2) – крыльчатка центробежного насоса

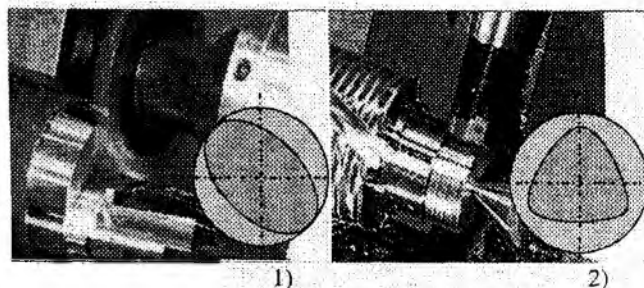


Рис. 2. Фрезерная обработка кулачков, профиль которых представляет:
1) – эллипс; 2) – набор парабол

При формировании таких сложных контуров, состоящих из эллиптических, гиперболических и параболических профилей, приходится решать весьма нетривиальные задачи сопряжения по определенному закону поверхностей и, одновременно, выдерживать самые высокие требования к САПР-системе, которая должна содержать эффективные алгоритмы автоматической интерполяции, разработанные на основе соответствующих методов и успешно стыкующиеся с устройствами управления СПВД.

Таким образом, статья, предусматривающая разработку метода интерполяции в составе автоматизированного проектирования сложных профилей обработки геометрических контуров, – *актуальна*.

Исходя из актуальности работы можно определить *цель исследования*, заключающуюся в разработке и усовершенствовании методов интерполяции геометрических контуров, описываемых кривыми второго порядка, а также решения на этой основе важной научно-технической задачи – повышение точности проектирования и последующей за ним обработки разнообразных профилей, выполняемой СПВД.

Достижение указанной цели работы, обеспечивается решением следующих *задач*:

- *разобрать* применяемые методы интерполяции на предмет выявления недостатков и удовлетворения повышенных технологических требований, диктуемых современным производством;
- *рассмотреть* способности считывающих устройств, с целью установления статистической зависимости возникающих ошибок считывания;
- *усовершенствовать* математическую постановку задачи расчета сложных геометрических контуров, которые описываются кривыми второго порядка;
- *разработать* новый способ интерполяции коническими пересечениями за счет однокритериального анализа и установления конкретного вида кривой, наиболее точно воспроизводящей заданную форму обрабатываемого участка;

- *составить* математические модели (ММ) аналитического представления пространственных размещений сформированных контуров, позволяющую анализировать конфигурацию всей исследуемой траектории.

1. Анализ применяемых методов интерполяции кривыми второго порядка в СПВД

При наличии в системе ЧПУ линейной интерполяции перемещение рабочего органа (РО) станка при контурной обработке задаётся в виде ряда прямых отрезков. На используемом программносителе (перфолента, магнитная лента, магнитный диск, оптический диск и другие запоминающие устройства различного типа) перемещение РО между двумя опорными точками отрезка, задаётся одним кадром управляющей программы (УП).

Количество прямых отрезков, необходимых для описания кривой, определяется тем требованием, что погрешность аппроксимации не должна превышать 15 – 20 % всего допуска, установленного на неточность обработки детали [1]. Находя пути реализации поставленного условия, разработчиками систем ЧПУ была выдвинута идея о возможности применения параболической интерполяции для описания сложных геометрических контуров [2].

Для работы считывающего устройства характерно наличие одной ошибки на 1 млн. бит информации [3]. При стандартном формате, на 1 см перфоленты (которая сегодня ещё имеет достаточно широкое применение) приходится 32 бита информации. Нетрудно подсчитать, что приблизительно на каждые 300 м считанной перфоленты, приходится по одной ошибке.

Впервые разработанный фирмой «Unicon Carbide» (США) параболический интерполятор существенно сокращает количество кадров УП по сравнению с системами, использующими линейно-круговую интерполяцию. Сокращение количества кадров пропорционально уменьшает количество команд и прерываний при управлении перемещением инструмента, что повышает производительность, выраженную в обработанных профилях.

Например, при допуске на точность 3,18 нм для обработки дуги окружности радиусом 0,254 м (10 дюймов) при аппроксимации прямыми, необходимо задать на носителе 4500 кадров, в то же время, при использовании параболической интерполяции – достаточно 90 кадров, что в 50 раз меньше (!). Кроме того, параболический интерполятор позволяет производить обработку прямолинейных и круговых контуров без изменения в аппаратных средствах СПВД [4], т. е. происходит автоматическое переключение в процессе подбора наиболее оптимального вида интерполяции, применительно к конкретному участку.

С помощью алгоритмов параболической интерполяции также возможно построение дуг окружностей, которые произвольно расположены в пространстве. Безусловно, это будет целесообразно только в том случае, если число дуг окружностей будет незначительным по сравнению с чисто параболическими дугами, поскольку каждую дугу окружности необходимо аппроксимировать, в общем случае, несколькими дугами парабол. Для увеличения длины дуги, аппроксимируемой одной параболой, можно воспользоваться параболой четвертой степени, однако, как показали исследования [5], в подавляющем большинстве случаев, общее количество вычислений при этом значительно превышает количество вычислений при аппроксимации параболой второй степени.

При параболической интерполяции заданных гладких контуров деталей, работающих в условиях обтекания, возникает задача обеспечения в узловых точках гладкости первой степени, т. е. наличия общих первых производных. Детали такой сложной конфигурации, обрабатываемые СПВД, описываются довольно сложными аналитическими уравнениями. Кроме аналитического описания профиля детали или его отдельных участков, обычно, задаются координаты граничных точек, а сами аналитические уравнения могут быть заданы как в явной $y = f(x)$, так и в неявной формах

$$\varphi(y) = f(x). \quad [6]$$

В последнее время широкое применение находят методы интерполяции при помощи сплайнов [7] и парабол третьей степени. Однако они могут дать ненужные флуктуации контура, т. е. условия, когда знак кривизны на участке меняется, и по этой причине не всегда

применимы. Метод интерполяции параболами второй степени достаточно точен и менее сложен, чем метод парабол более высокой степени. В ряде работ, например [8], предлагаются такие алгоритмы, однако они имеют тот недостаток, что необходимо определять аналитические уравнения аппроксимирующих парабол, что усложняет алгоритмы.

В работе [9] рассмотрен способ расчета эквидистанты, который не требует отыскания её аналитического уравнения и является достаточно простым и точным. Здесь в качестве аппроксимирующего выбран полином второй степени. Выбор параболической интерполяции обусловлен, с одной стороны, тем, что она является промежуточным звеном (по простоте и точности) между линейной интерполяцией и интерполяцией параболами третьей степени, а с другой стороны: применение параболической интерполяции не требует аналитического задания параболы; да и сам алгоритм [9] имеет наиболее лёгкую программную реализацию.

Преимущества использования интерполяции кривыми второго порядка детально представлены авторами в [10] и проиллюстрированы рис. 3. Так, если при круговой интерполяции профиля кулачка (рис 2.1) необходимо четыре окружности, то при эллиптической – достаточно лишь одного эллипса, в то время как при линейной число точек расчётной траектории является функцией от длины кривой и её конфигурации (рис. 4).

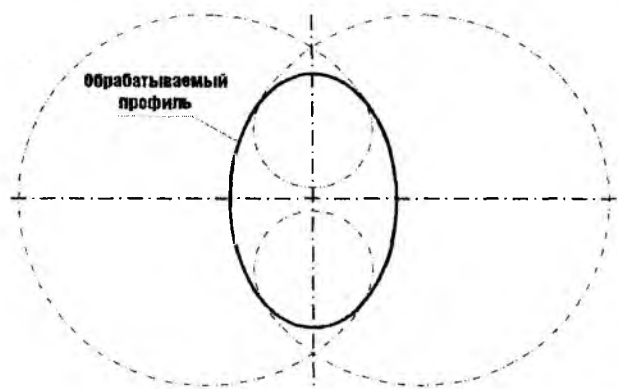


Рис. 3. Круговая интерполяция эллиптического профиля

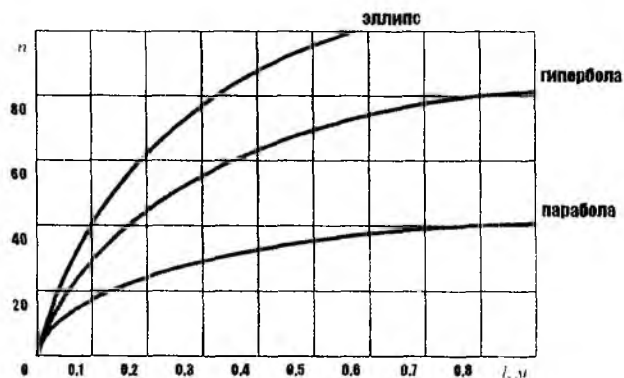


Рис. 4. Зависимость числа точек n от длины кривой l и её конфигурации при линейной интерполяции

Таким образом, кроме существующих преимуществ, обеспечиваемых параболической интерполяцией, предлагаемый в статье метод интерполяции кривых второго порядка (при котором определение конкретного вида кривой происходит в процессе анализа коэффициентов её аналитического уравнения) должен будет удовлетворить ряд дополнительных требований:

- сокращенное число входных данных;
- возможность обработки кривых на плоскости и в пространстве;
- интерполируемые кривые могут быть смещены и повернуты относительно осей координат;
- наличие промежуточного контроля обрабатываемой траектории в интересующих точках.

2. Решение поставленной проблемы

2.1. Формирование исходных данных

Плоские кривые второго порядка (или конические сечения) определяются уравнением второй степени относительно декартовых прямоугольных координат x и y . Общее уравнение второй степени относительно x и y имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1)$$

где A, B, C, D, E, F – заданные коэффициенты, причём предполагается, что $B \neq 0$.

В работе [11] доказано, что кривая второго порядка вполне определяется пятью своими независимыми точками, четыре из которых не должны лежать на одной прямой. Кроме того,

кривая второго порядка (1) вырождается в том и только в том случае, когда три из заданных точек лежат на одной прямой.

Тогда, применительно к пространственной зоне обслуживания СПВД, предположим, что кривая второго порядка задана пятью различными последовательно пронумерованными точками:

$$r_1 = (x_1, y_1, z_1), r_2 = (x_2, y_2, z_2), r_3 = (x_3, y_3, z_3), r_4 = (x_4, y_4, z_4), r_5 = (x_5, y_5, z_5) \quad (2)$$

в некоторой абсолютной (неподвижной) правосторонней декартовой прямоугольной системе координат (СК) $OXYZ$, связанной, например, с основанием СПВД (рис. 5). Предполагается, что точки r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 не совпадают и никакие четыре из них не лежат на одной прямой.

В результате получим пять радиус-векторов в абсолютной СК $OXYZ$ (см. рис. 5):

$$\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}, \vec{r}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}, \vec{r}_4 = \{x_4, y_4, z_4\}, \vec{r}_5 = \{x_5, y_5, z_5\}. \quad (3)$$

Сформируем движение РО СПВД по кривой второго порядка, описываемой уравнением вида (1), применительно к двум постановкам задач (ПЗ):

ПЗ 1. Сформировать движение РО из заданной начальной точки r_1 в заданную конечную точку r_5 , проходя последовательно заданные промежуточные точки r_2, r_3 и r_4 , со средней угловой (или линейной) скоростью $\omega_{ср.,зад}$ (или $V_{ср.,зад}$). Определить требуемое время $t_{расч}$ перемещения РО по рассчитанной траектории: из точки r_1 в r_5 .

ПЗ 2. Сформировать такой же маршрут движения РО, но за заданное время $t_{зад}$. Определить $\omega_{ср.,расч}$ (или $V_{ср.,расч}$) перемещения РО по рассчитанной траектории: из начальной точки в конечную.

Обе постановки задачи предполагают предварительный расчёт центрального фокусного угла θ_{15} дуги кривой второго порядка, заключённого между радиус-векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_5 , а также, при необходимости, расчёт длины l_{15} отрезка кривой, заключённого между заданными точками r_1 и r_5 [12]. Кроме того, в результате решения поставленных задач, должны быть определены текущие координаты положения конца РО [13] (точки $r^*(t_i)$) на линии второго порядка, в каждый заданный дискретный момент времени t_i ($i = \overline{0, N}$), в процессе движения от точки r_1 до точки r_5 . Здесь N – количество интервалов дискретизации, $t_0 = 0$.

Тогда определим следующую последовательность формирования текущих координат подвижной точки r_i^* (конца РО), принадлежащей кривой второго порядка (см. рис. 5, 6):

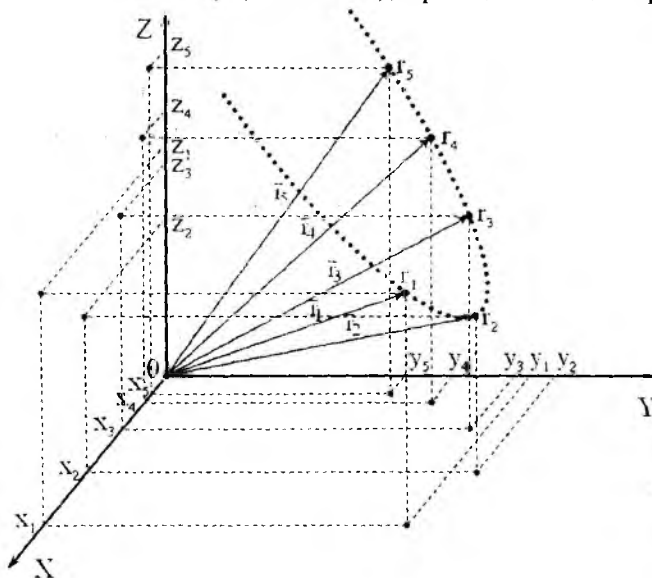


Рис. 5. Исходные точки r_1, r_2, r_3, r_4 и r_5 , заданные в АСК СПВД. Общий вид

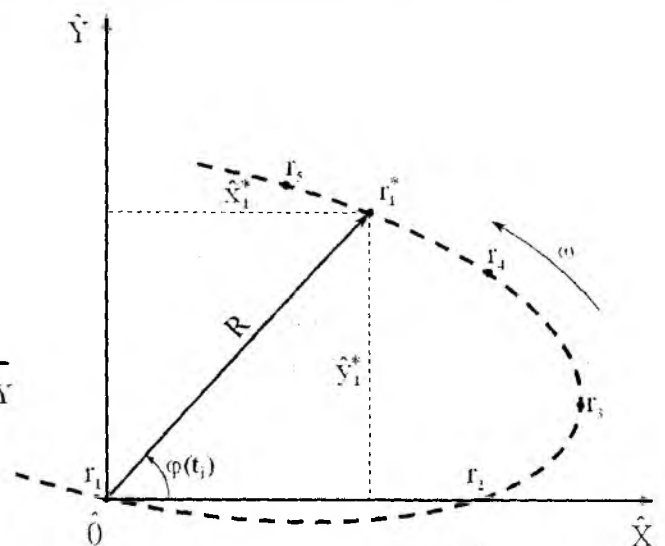


Рис. 6. К определению относительных текущих координат конца РО СПВД на кривой второго порядка в ОСК

Шаг 1. Задать относительную (подвижную) прямоугольную СК $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$, связанную с положением РО в пространстве АСК и сохраняющую ту же ориентацию, что и АСК $OXYZ$.

Шаг 2. Определить матрицы \bar{T} и \bar{T}^{-1} преобразования декартовых СК $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$.

Шаг 3. Определить заданный вид кривой второго порядка (дуги конического сечения).

Шаг 4. Выбрать направление движения РО по дуге кривой второго порядка и рассчитать центральный фокусный угол θ_{15} дуги кривой.

Шаг 5. Получить уравнение дуги конического сечения в полярных координатах.

Шаг 6. Определить необходимые соотношения для расчёта длины l_{15} отрезка кривой второго порядка, заключённого между заданными точками r_1 и r_5 .

Шаг 7. Определить текущие координаты $(x'_i)^*, (y'_i)^*$ и $(z'_i)^*$ подвижной точки $r_i^* = r^*(t_i)$ кривой второго порядка в ОСК $O'X'Y'Z' \forall i = \overline{0, N}$.

Для реализации движения РО в соответствии с «ПЗ 1» или «ПЗ 2» свяжем с исходными точками r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 (2) плоскую декартову прямоугольную относительную СК (ОСК)

$\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$, лежащую в плоскости кривой второго порядка, проходящей через эти точки. Для определённости совместим начало \hat{O} СК $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$ с одной из заданных точек, например, с точкой $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$ (рис. 6).

Шаг 8. С помощью формул и матрицы \bar{T} обратного преобразования СК рассчитать x_i^*, y_i^*, z_i^* подвижной точки $r_i^* = r^*(t_i)$ кривой второго порядка в АСК $OXYZ \forall i = \overline{0, N}$.

2.2. Принцип задания подвижной декартовой прямоугольной СК

Зададим подвижную СК $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ следующим образом: начало СК $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ поместим в точку $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Ось $\hat{O}\hat{X}$ проведём через r_3 ; тогда для базисного вектора

$$\bar{e}_1 = \{e_{1,x}, e_{1,y}, e_{1,z}\} = \overline{r_3} - \overline{r_1}. \quad (4)$$

Ось $\hat{O}\hat{Y}$ зададим, используя значения координат любых трёх заданных точек, например координаты r_1, r_2 и r_3 . Ось $\hat{O}\hat{Z}$ проведём через r_1 , перпендикулярно плоскости $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$, проходящей через пять исходных точек r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 . При этом необходимо следить, чтобы ориентация прямоугольной ОСК $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$, так же, как и АСК $OXYZ$, была правосторонней, что определяется выбором направления оси $\hat{O}\hat{Z}$.

Для получения уравнения оси $\hat{O}\hat{X}$, положительное направление которой совпадает с направлением \bar{e}_1 , выберем на этой оси некоторую произвольную точку $r_x(r_{x,x}, r_{x,y}, r_{x,z})$ и соединим ее с r_1 вектором $\overline{r_1 r_x}$. Тогда имеем

$$\overline{r_1 r_x} = \rho \bar{e}_1, \quad (5)$$

где ρ – произвольно заданный скаляр. Из условия (5) коллинеарности двух векторов \bar{e}_1 и $\overline{r_1 r_x}$, запишем, с учётом (4), каноническое уравнение оси $\hat{O}\hat{X}$, проходящей через точку r_1 :

$$\frac{r_{x,x} - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{r_{x,y} - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{r_{x,z} - z_1}{z_2 - z_1} = \rho, \quad \rho \geq 0. \quad (6)$$

Поскольку все пять точек r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 , принадлежащие кривой второго порядка, лежат в одной плоскости $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$, то сама плоскость, может быть задана любыми тремя из них, например: r_1, r_2 и r_3 . Уравнение этой плоскости, проходящей через три данные точки: r_1, r_2 и r_3 с однородными координатами $r_1(x_1, y_1, z_1, 1)$, $r_2(x_2, y_2, z_2, 1)$ и $r_3(x_3, y_3, z_3, 1)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, представим уравнение (7) в более удобном виде (8) или (9):

$$\mathbf{A}_1 x - \mathbf{B}_1 y - \mathbf{C}_1 z - \mathbf{D}_1 = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \mathbf{C}_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \mathbf{D}_1 = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

причём, определители $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1$ и \mathbf{C}_1 не равны нулю одновременно.

При выполнении (9) предполагается, что три точки r_1, r_2 и r_3 не лежат на одной прямой, то есть для них выполняется:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \neq \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}, \quad \text{или} \quad [\overline{r_1 r_3}, \overline{r_1 r_2}] \equiv (\overline{r_3 - r_1}) \times (\overline{r_2 - r_1}) \neq 0. \quad (10)$$

Так как плоскость $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$ определяется уравнением первой степени (8), то нормальный вектор этой плоскости имеет координаты:

$$\overline{N}_{\hat{X}\hat{O}\hat{Y}} = \left\{ N_{\hat{X},x}, N_{\hat{X},y}, N_{\hat{X},z} \right\} = \{ \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1 \}, \quad (11)$$

и каноническое уравнение оси $\hat{O}\hat{Z}$, проходящей через точку r_1 и для которой этот вектор является базисным, т. е. $\vec{e}_3 = \{e_{3,x}, e_{3,y}, e_{3,z}\} = \overline{N}_{\hat{X}\hat{O}\hat{Y}}$, может быть записано в виде

$$\frac{r_{z,x} - x_1}{\mathbf{A}_1} = \frac{r_{z,y} - y_1}{\mathbf{B}_1} = \frac{r_{z,z} - z_1}{\mathbf{C}_1} = \rho, \quad \rho > 0, \quad (12)$$

где $r_{z,x}, r_{z,y}, r_{z,z}$ – декартовы координаты в АСК $OXYZ$ произвольной точки r_z на оси $\hat{O}\hat{Z}$.

Для определения базисного вектора \vec{e}_2 , соединим r_1 и r_3 вектором $\overline{r_1 r_3}$. Тогда, учитывая то, что r_1, r_2 и r_3 плоскости $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$ не лежат на одной прямой и вектор $\overline{r_1 r_2} = \vec{e}_1$, для вектора \vec{e}_2 можно записать [14]:

$$\vec{e}_2 = \{e_{2,x}, e_{2,y}, e_{2,z}\} = \overline{r_1 r_3} + \lambda \cdot \overline{r_1 r_2} = \overline{r_1 r_3} + \lambda \cdot \vec{e}_1, \quad (13)$$

где λ – действительное число; выберем λ так, чтобы для \vec{e}_1 и \vec{e}_2 выполнялось условие

$$(\overline{r_1 r_3} + \lambda \overline{e_1, e_1}) = (\overline{r_1 r_3}, \overline{e_1}) + \lambda(\overline{e_1}, \overline{e_1}) = 0,$$

откуда с учётом (4) :

$$\lambda = -\frac{(\overline{r_1 r_3}, \overline{e_1})}{(\overline{e_1}, \overline{e_1})} = -\frac{(\overline{r_3} - \overline{r_1})(\overline{r_2} - \overline{r_1})}{(\overline{r_2} - \overline{r_1})(\overline{r_2} - \overline{r_1})} = -\frac{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1) + (z_3 - z_1)(z_2 - z_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (14)$$

И каноническое уравнение оси, проходящей через точку r_1 , для которой вектор $\overline{e_2}$ (13) является базисным, примет вид (15), где $r_{y,x}$, $r_{y,y}$, $r_{y,z}$ – декартовы прямоугольные координаты в АСК OXYZ произвольной точки r_y оси $\hat{O}\hat{Y}$.

$$\frac{r_{y,x} - x_1}{e_{2,x}} = \frac{r_{y,y} - y_1}{e_{2,y}} = \frac{r_{y,z} - z_1}{e_{2,z}} = \rho, \quad \rho > 0. \quad (15)$$

Из (4), (11), и (13) для системы базисных векторов $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ и $\overline{e_3}$, найдём:

$$\begin{aligned} \overline{e_1} &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \\ \overline{e_2} &= \{(x_3 - x_1) - \lambda(x_2 - x_1), (y_3 - y_1) - \lambda(y_2 - y_1), (z_3 - z_1) - \lambda(z_2 - z_1)\}, \\ \overline{e_3} &= \{A_1, B_1, C_1\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для полного задания ориентированного положения $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ с центром в точке $\hat{O} = r_1(x_1, y_1, z_1)$ необходимо определить значения направляющих косинусов её осей координат относительно осей координат OXYZ [15]. Для этого воспользуемся значениями скалярных произведений векторов: ортов \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} соответственно, осей OX, OY и OZ прямоугольной АСК OXYZ, и базисных векторов $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ и $\overline{e_3}$ соответствующих осей $\hat{O}\hat{X}, \hat{O}\hat{Y}$ и $\hat{O}\hat{Z}$ прямоугольной ОСК $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$:

$$\begin{aligned} (\overline{e_1}, \vec{i}) &= |\overline{e_1}| |\vec{i}| \cos \alpha_x = e_{1,x}, & (\overline{e_2}, \vec{i}) &= |\overline{e_2}| |\vec{i}| \cos \alpha_y = e_{2,x}, & (\overline{e_3}, \vec{i}) &= |\overline{e_3}| |\vec{i}| \cos \alpha_z = e_{3,x}, \\ (\overline{e_1}, \vec{j}) &= |\overline{e_1}| |\vec{j}| \cos \beta_x = e_{1,y}, & (\overline{e_2}, \vec{j}) &= |\overline{e_2}| |\vec{j}| \cos \beta_y = e_{2,y}, & (\overline{e_3}, \vec{j}) &= |\overline{e_3}| |\vec{j}| \cos \beta_z = e_{3,y}, \\ (\overline{e_1}, \vec{k}) &= |\overline{e_1}| |\vec{k}| \cos \gamma_x = e_{1,z}; & (\overline{e_2}, \vec{k}) &= |\overline{e_2}| |\vec{k}| \cos \gamma_y = e_{2,z}; & (\overline{e_3}, \vec{k}) &= |\overline{e_3}| |\vec{k}| \cos \gamma_z = e_{3,z}, \end{aligned} \quad (17)$$

откуда, с учётом (16), найдём: $\alpha_x(\alpha_y, \alpha_z)$, $\beta_x(\beta_y, \beta_z)$, $\gamma_x(\gamma_y, \gamma_z)$ – направляющие углы (или углы Эйлера) между каждой осью ОСК и, соответственно, осями OX, OY и OZ АСК OXYZ; для расчёта значений направляющих косинусов осей координат ОСК.

Заметим, что при правильном расчёте значений направляющих косинусов должно выполняться

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \beta_x + \cos^2 \gamma_x = \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \beta_y + \cos^2 \gamma_y = \cos^2 \alpha_z + \cos^2 \beta_z + \cos^2 \gamma_z = 1. \quad (18)$$

2.3. Преобразование систем координат

Поскольку предполагается, что обе СК АСК и ОСК – правосторонние, то относительно системы ОСК, ось OX имеет направляющие косинусы $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}$, ось OY – $\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23}$, ось OZ – $\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33}$ [16]. Тогда формулы преобразования СК, связывающие абсолютные

$x^*, y^*, z^*, 1$ и относительные $\hat{x}^*, \hat{y}^*, \hat{z}^*, 1$ однородные координаты подвижной точки r^* , имеют вид:

$$\begin{aligned}
\hat{x}^* &= \tau_{11}(x^* - x_1) + \tau_{21}(y^* - y_1) + \tau_{31}(z^* - z_1); & x^* &= \tau_{11}\hat{x}^* + \tau_{12}\hat{y}^* + \tau_{13}\hat{z}^* + x_1; \\
\hat{y}^* &= \tau_{12}(x^* - x_1) + \tau_{22}(y^* - y_1) + \tau_{32}(z^* - z_1); & y^* &= \tau_{21}\hat{x}^* + \tau_{22}\hat{y}^* + \tau_{23}\hat{z}^* + y_1; \\
\hat{z}^* &= \tau_{13}(x^* - x_1) + \tau_{23}(y^* - y_1) + \tau_{33}(z^* - z_1); & z^* &= \tau_{31}\hat{x}^* + \tau_{32}\hat{y}^* + \tau_{33}\hat{z}^* + z_1; \\
1 &= 1; & 1 &= 1;
\end{aligned} \tag{19}$$

или в матричной форме:

$$\vec{\hat{r}}^* = \vec{\bar{T}}^{-1} \vec{r}^* \quad \text{и} \quad \vec{r}^* = \vec{\bar{T}} \vec{\hat{r}}^*, \tag{20}$$

где

$$\vec{\bar{T}} = \left\| \begin{array}{ccc|c} \mathbf{T} & & & \vec{\bar{\eta}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad \vec{\bar{T}}^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc|c} \mathbf{T}^T & & & -\mathbf{T}^T \vec{\bar{\eta}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{\bar{\eta}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \tag{21}$$

а \vec{r}^* и $\vec{\hat{r}}^*$ – радиус-векторы подвижной точки r^* соответственно в АСК $OXYZ$ и ОСК $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$.

Из (19) следует, что ОСК сохраняет правостороннюю ориентацию тогда, когда $\det \mathbf{T}^T = 1$,

Применяя матрицу $\vec{\bar{T}}^{-1}$ (21) аналогично преобразованию (20), можно определить относительные координаты всех пяти исходных точек r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 :

$$r_1(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1) \equiv r_1(0, 0, 0), r_2(\hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{z}_2) \equiv r_2(x_2, 0, 0), r_3(\hat{x}_3, \hat{y}_3, \hat{z}_3) \equiv r_3(x_3, y_3, 0), \dots, r_5(\hat{x}_5, \hat{y}_5, \hat{z}_5) \equiv r_5(x_5, y_5, 0). \tag{22}$$

В результате запишем четыре радиус-вектора в ОСК:

$$\vec{\hat{r}}_2\{\hat{x}_2, 0, 0\} = \left\{ \hat{r}_2(\hat{x}_2, 0, 0) - \hat{r}_1(0, 0, 0) \right\}; \vec{\hat{r}}_3\{\hat{x}_3, \hat{y}_3, 0\}; \vec{\hat{r}}_4\{\hat{x}_4, \hat{y}_4, 0\}; \vec{\hat{r}}_5\{\hat{x}_5, \hat{y}_5, 0\}. \tag{23}$$

Учитывая, что кривая второго порядка проходит через начало координат ОСК, т. е. через точку $\hat{O} = \hat{r}_1$, считая, по-прежнему, что $B \neq 0$ и принимая во внимание (22), найдём, что коэффициент $F = 0$. Тогда общее уравнение второй степени (1), относительно координат \hat{x} и \hat{y}

ОСК $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ примет вид

$$A\hat{x}^2 + B\hat{x}\hat{y} + C\hat{y}^2 + D\hat{x} + E\hat{y} = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) кривой второго порядка, проходящей через пять точек r_1, r_2, r_3, r_4 и r_5 , может быть задано и в другом виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \hat{x}^2 & \hat{x}\hat{y} & \hat{y}^2 & \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{x}_2^2 & \hat{x}_2\hat{y}_2 & \hat{y}_2^2 & \hat{x}_2 & \hat{y}_2 \\ \hat{x}_3^2 & \hat{x}_3\hat{y}_3 & \hat{y}_3^2 & \hat{x}_3 & \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4^2 & \hat{x}_4\hat{y}_4 & \hat{y}_4^2 & \hat{x}_4 & \hat{y}_4 \\ \hat{x}_5^2 & \hat{x}_5\hat{y}_5 & \hat{y}_5^2 & \hat{x}_5 & \hat{y}_5 \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Разлагая определитель Δ по элементам первой строки, запишем (25) в виде

$$\Delta = M_{11} \hat{x}^2 - M_{12} \hat{x} \hat{y} + M_{13} \hat{y}^2 - M_{14} \hat{x} + M_{15} \hat{y} = 0, \quad (26)$$

где $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}$ и M_{15} – миноры определителя Δ , соответствующие элементам его первой строки: $\hat{x}^2, \hat{x} \hat{y}, \hat{y}^2, \hat{x}$ и \hat{y} .

2.4. Определение заданного вида кривой второго порядка

Рассмотрим общее уравнение второй степени (24), описывающее кривую второго порядка, проходящую через начало координат ОСК. Покажем, прежде всего, что при помощи поворота координатных осей уравнение (24) можно привести к виду, не содержащему член с произведением переменных. Повернём координатные оси ОСК $\hat{O} \hat{X} \hat{Y} \hat{Z}$ вокруг оси $\hat{O} \hat{Z}$ на некоторый угол θ , который выберем впоследствии [17]. Пусть \bar{x}, \bar{y} – координаты некоторой точки r кривой второго порядка, относительно новой декартовой прямоугольной СК $\bar{O} \bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$ с осью $\bar{O} \bar{Z} \equiv \hat{O} \hat{Z}$, расположенной, относительно системы $\hat{O} \hat{X} \hat{Y} \hat{Z}$ таким образом, что угол $\hat{X} \hat{O} \bar{X}$ между осью $\hat{O} \hat{X}$ и осью $\hat{O} \bar{X}$ равен θ (рис. 7).

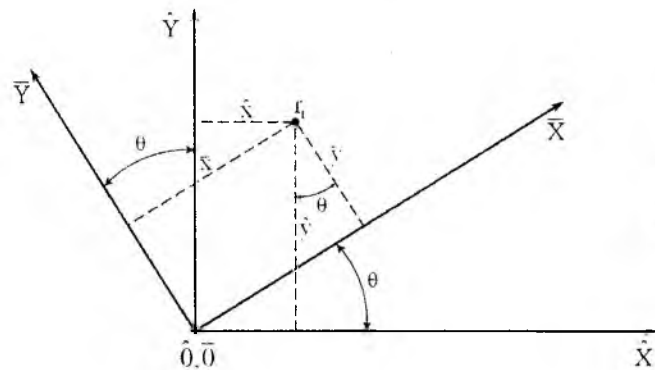


Рис. 7. Поворот координатных осей ОСК на некоторый угол θ

При одинаковых единицах масштаба на осях (см. рис. 7), координаты \bar{x}, \bar{y} связаны с координатами \hat{x}, \hat{y} точки r следующими формулами преобразования:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta, & \bar{y} &= -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta; \\ \hat{x} &= \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta, & \hat{y} &= \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя (27) в (24) и выполняя необходимые преобразования, получим общее уравнение кривой второго порядка в новых координатах \bar{x}, \bar{y} в таком виде:

$$\bar{A} \bar{x}^2 + \bar{B} \bar{x} \bar{y} + \bar{C} \bar{y}^2 + \bar{D} \bar{x} + \bar{E} \bar{y} = 0, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta; & \bar{B} &= 2(C - A) \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta); \\ \bar{C} &= A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta; & \bar{D} &= D \cos \theta + E \sin \theta; & \bar{E} &= -D \sin \theta + E \cos \theta. \end{aligned} \quad (29)$$

Выберем угол θ так, чтобы коэффициент \bar{B} обратился в нуль, т. е. чтобы

$$2(C - A) \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0. \quad (30)$$

Учитывая, что $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ и $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$, перепишем уравнение (30)

в виде

$$(C - A) \sin 2\theta - B \cos 2\theta = 0. \quad (31)$$

Заметим, что $\sin 2\theta \neq 0$, так как в противном случае равнялось бы нулю и B , что противоречит условию. Поэтому уравнение (31) разделим на $\sin 2\theta$:

$$(C - A) - B \operatorname{ctg} 2\theta = 0, \quad (32)$$

откуда

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{A - C}{B}. \quad (33)$$

Из (32) следует, что всегда можно выбрать угол θ так, что после поворота координатных осей ОСК вокруг оси на этот угол, в уравнении кривой второго порядка (24) исчезнет член с произведением переменных. Угол θ необходимо выбирать так, чтобы $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$.

Вычислив $\operatorname{ctg} 2\theta$ по формуле (33), воспользуемся известной из тригонометрии формулой (в силу выбора θ знаки $\cos 2\theta$ и $\operatorname{ctg} 2\theta$ одинаковы) $\cos 2\theta = \frac{\operatorname{ctg} 2\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\theta}}$, и далее по

формулам

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \quad \text{и} \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} \quad (34)$$

найдем $\sin \theta$ и $\cos \theta$, что позволит вычислить по (29) новые коэффициенты \bar{A} , \bar{C} , \bar{D} и \bar{E} .

В результате, преобразованное общее уравнение кривой второго порядка (28) примет вид:

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} = 0, \quad (34)$$

где все коэффициенты известны.

Выводы

1. Усовершенствована математическая постановка задачи расчета сложных геометрических контуров, которые описываются кривыми второго порядка;

2. Синтезирован новый способ интерполяции коническими пересечениями за счет однокритериального анализа и установления конкретного вида кривой, наиболее точно воспроизводящей заданную форму обрабатываемого участка;

3. Составлены векторно-матричные модели аналитического представления пространственного размещения сформированных контуров, позволяющие анализировать конфигурацию всей исследуемой траектории;

Практическая значимость заключается в том, что применение данного метода обеспечивает ряд преимуществ, по отношению к используемым методам интерполяции:

- Сокращенное число входных данных;
- Возможность обработки кривых на плоскости и в пространстве;
- Интерполируемые кривые могут быть смещены и повернуты относительно осей координат;
- Наличие промежуточного контроля обрабатываемой траектории в интересующих точках.

На основе полученных результатов можно сформулировать следующие перспективы развития данного направления исследований:

1. Определить проблемно-ориентированные вычислительные средства построения сложных геометрических контуров;
2. Сформировать эффективные алгоритмы применения предложенного метода интерполяции;
3. Выполнить программную реализацию вычислительных алгоритмов, с последующей их оптимизацией, исходя из конкретных конструкторских и технологических требований.

Список литературы: 1. Сосонкин В.Л., Мартынов Г.М. Методика программирования станков с ЧПУ на наиболее полном полигоне вспомогательных G-функций. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2008. 102 с. 2. Перельман Н.И., Таласов Б. И. Об одном алгоритме линейной аппроксимации параболы для станков с числовым программным управлением // Вопросы кибернетики: науч. тр. Ташкент. ун-та. 1978. №103. С. 64 – 69. 3. Шано Ф.С., Шано В.Ф. Основы автоматизированного проектирования циф-

ровых систем: учеб. пособие. Одесса: Реклам-Сервис, 2008. 264 с. 4. *Гарячевская И.В., Кузёмин А.Я.* Формализация проектирования аппаратных и программных средств управления мобильным роботом // Прикладная радиоэлектроника. 2004. Т.3, №3. С. 48 – 53. 5. *Макарычев В.П.* Использование интеллектуальных технологий при построении траекторий роботов в среде с препятствиями // Искусств. интеллект. 2004. №3. С. 742 – 751. 6. *Яцун С.Ф., Мищенко В.Я., Сафаров Д.И.* Исследование движения двухмассового вибрационного робота // Изв. ВУЗов. 2006. №5. С. 32 – 42. 7. *Евсеев В.В., Ганишина А.В.* Применение iges-формата для интеграции САД-систем и САМ-модулей // Радиоэлектроника и молодёжь в XXI веке: матер. X юбил. Междунар. молод. форума. 2006. С. 206. 8. *Карпов Ю.К.* Системы управления чертёжными автоматами. М.: Машиностроение, 1977. 136 с. 9. *Кряжев Д.Ю.* Фрезерная обработка на станках с ЧПУ с системой FANUC: учеб. пособие. СПб.: Ирлен, 2005. 40 с. 10. *Невлюдов И.Ш., Великодний С.С., Андрусевич А.А.* Параболическая интерполяция в системах автоматизированной подготовки управляющих программ для УЧПУ // Электронная компонентная база. Состояние и перспективы развития: сб. науч. тр. I Межд. науч. конф. 2008 С. 191 – 194. 11. *Привалов И.И.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1964. 272 с. 12. *Подчасов Н.П., Сухоручкина О.Н.* Динамические модели простейших движений платформы автомобильного робота как компоненты комплексной системы моделирования его функционирования // Проблемы управления и информатики. 2004. №1. С. 145 – 154. 13. *Астанин В.О., Коган В.Ф.* Внешняя измерительная система для определения пространственного положения рабочих органов // Измерительная техника. 1992. №1. С. 28 – 29. 14. *Корн Г.А., Корн Т.М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: пер. с англ. М.: Наука, 1973. 832 с. 15. *Шахинпур М.* Курс робототехники: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 527 с. 16. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. М.: ГИТТЛ, 1957. 784 с. 17. *Лиферов А.А., Батунер О.Ю., Блюдзе М.Ю.* Техтран – система программирования оборудования с ЧПУ. Л.: Машиностроение, 1987. 109 с.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 05.02.2009