

УДК 621.396.62

# АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ В РАДИОТРАКТЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ НЕЛИНЕЙНОСТИ



К.А. СЕЛИВАНОВ,

Н.В. МОСКАЛЕЦ,

Т.В. НИКИТЕНКО

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

*Розглянуто різні підходи до оцінки нелінійних ефектів на основі характеристики гістерезису, функцій Нуссбаума і рядів Вольтерра. Одержані вирази відгуків нелінійного ланцюга для різних видів дій, що дає можливість розрахувати коефіцієнт гармонік з більшою мірою точності.*

*Different approaches as evaluated by nonlinear effects on the basis of description of hysteresis, the Nussbauma functions and the Volterra series are considered. Expressions of responses of nonlinear chain for different types of influences are got, that enables to expect the coefficient of accordions from by a greater degree exactness.*

*Рассмотрены различные подходы к оценке нелинейных эффектов на основе характеристики гистерезиса, функций Нуссбаума и рядов Вольтерра. Получены выражения откликов нелинейной цепи для различных видов воздействий, что дает возможность рассчитать коэффициент гармоник с большей степенью точности.*

## Введение

В современных радиоприемных устройствах систем мобильной связи и абонентского радиодоступа используется значительная часть элементов, амплитудно-фазовые характеристики которых не являются идеально линейными. Входной усилитель, смеситель, элементы промежуточного радиотракта проявляют нелинейные свойства в той или иной мере, что приводит к возникновению нелинейных искажений разного рода. Нелинейные искажения сигналов в приемопередающих трактах оказывают существенное влияние на ряд важных технических показателей качества радиотехнических устройств: точность воспроизведения сигналов, разрешающую и пропускную способность, помехозащищенность и т.д.

В беспроводных телекоммуникационных технологиях особо остро стоит проблема обеспечения электромагнитной совместимости как внутрисистемного, так и межсистемного характера. Особое деструктивное воздействие оказывают нелинейные искажения, возникающие в нелинейных цепях, свойства которых заключаются в порождении новых колебаний в спектрах, проходящих через них полезных сигналов и сигналов помех, что существенно усложняет вид сигнала ошибки и методику его определения. Повышение линейности радиотрактов способствует решению проблемы электромагнитной совместимости как в самой телекоммуникационной системе, так и радиоэлектронной аппаратуре в частности.

Для точного анализа факторов воздействия нелинейных эффектов необходимо рассматривать совокупность нелинейных элементов радиотракта как систему, ко-

торая является стохастической и динамической, что в таком представлении делает актуальной задачу разработки методики по оценке нелинейных искажений данной системы с высокой степенью точности.

## I. Математические модели нелинейных элементов

Исследование нелинейной динамической системы задача весьма сложная, так как в общем случае она характеризуется нелинейными дифференциальными уравнениями, связывающими входное воздействие и отклик в неявном виде. На практике нелинейную динамическую систему принято рассматривать в виде соединения двух частей – линейной инерционной части, описываемой линейными дифференциальными уравнениями, и нелинейного элемента (НЭ) [1].

НЭ является безынерционным, и его входная  $x$  и выходная  $y$  величины связаны между собой нелинейными алгебраическими уравнениями вида:

$$y = f(x). \quad (1)$$

Оценка нелинейных свойств радиотрактов может быть проведена по степени искажения определенных сигналов, проходящих через радиотракт, и по характеристикам оператора передачи радиотракта. Оценка нелинейного воздействия по степени искажения сигнала производится, когда на вход радиотракта поступает тестовый сигнал, по искажениям которого судят о нелинейных свойствах радиотракта.

Оценку нелинейных свойств по характеристикам оператора передачи радиотракта принято оценивать независимо от свойств передаваемых или тестовых сигналов. В этом случае оператор передачи тракта (1) аппроксимируется удобным и по возможности простым выражением, параметры которого одновременно характеризуют степень нелинейности [1].

Для анализа продуктов нелинейности радиотрактов можно ограничиться описанием системы только при помощи характеристики НЭ. Такая идеализация достаточно точна, если характерное время изменения входного сигнала значительно превышает время установления процесса внутри самого НЭ. Таким образом, нелинейность рассматриваемых систем обусловлена нелинейностью статической характеристики одного из ее элементов. Если система содержит несколько НЭ, то ее в некоторых случаях можно свести к рассматриваемому классу, заменив нелинейные элементы одной из результирующих статических характеристик [1]. Например, при параллельном, последовательном или встречно-параллельном соединении нелинейных элементов такое сведение выполнимо.

Для анализа адаптивных систем управления часто бывает необходимо иметь математические модели НЭ с характеристикой гистерезиса. Такая модель рассмотрена в работе [2]. Характеристику такого НЭ запишем в виде системы уравнений:

$$y = \begin{cases} kx - kC_1 - k\varepsilon \operatorname{sign}\left(\frac{dy}{dt}\right), & \text{если } \left(\frac{dy}{dt}\right) \neq 0 \text{ и } 0 \leq y \leq k(C_2 - C_1); \\ kx + kC_1 - k\varepsilon \operatorname{sign}\left(\frac{dy}{dt}\right), & \text{если } \left(\frac{dy}{dt}\right) \neq 0 \text{ и } -k(C_2 - C_1) \leq y \leq 0; \\ \operatorname{const} \begin{cases} \text{если } |y - kx + kC_1| \leq k\varepsilon \text{ и } 0 \leq y \leq k(C_2 - C_1); \\ \text{либо } |y - kx - kC_1| \leq k\varepsilon \text{ и } k(C_2 - C_1) \leq y \leq 0; \end{cases} \\ k(C_2 - C_1)\operatorname{sign}(y), & \text{если } |x| \geq C_2 + \varepsilon; \\ 0, & \text{если } |x| \leq C_1 - \varepsilon \text{ и } C_1 > \varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (2) описывают нелинейную характеристику, представляющую сочетание типовых нелинейностей – зону нечувствительности, насыщение (ограничение), гистерезисную петлю люфта. Изменяя коэффициенты  $k$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\varepsilon$ , можно получить различные виды нелинейности. Если один или два коэффициента  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\varepsilon$  обращаются в нуль, получаются более простые математические модели. Кроме модели НЭ (2), имеющей характеристику ограничителя, можно также использовать модель, предложенную в [3]. В ряде работ в качестве универсальной нелинейной модели используются функции, так называемые усилители Нуссбаума [4]. Функция  $f(x)$  из этого класса должна быть интегрируемой и обладать такими свойствами [4]:

$$\sup_{x>0} \left( \frac{1}{x} \int_0^x xf(x)dx \right) = +\infty, \quad \inf_{x>0} \left( \frac{1}{x} \int_0^x xf(x)dx \right) = -\infty.$$

Примеры усилителей Нуссбаума:  $x^2 \cos(x^2)$ ,  $x^2 \cos(x)$ ,  $\operatorname{sign}(\cos(x))$ ,  $\operatorname{erf}(x)$  и др.

В радиоприемных трактах усилительные элементы имеют характеристику сглаженного ограничителя, соответствующую модели Нуссбаума и описываемую функцией [4]

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x/l}{\sigma} \int_0^{\frac{x}{l\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (3)$$

где  $x$  – входной сигнал с дисперсией  $\sigma^2$ ;  $l$  – параметр, указывающий на особенности нелинейностей функции и определяющий угол наклона кривой  $\alpha$ :

$$l = 1/k = 1/\operatorname{tg} \alpha', \quad (4)$$

где  $k$  – коэффициент усиления элемента.

При  $l \rightarrow 0$  функция (3) переходит в выражение для идеального симметричного ограничителя. На рис. 1 показано семейство характеристик симметричного ограничителя при  $l = 0,5 \dots 5$ . Изменяя параметр  $l$ , можно регулировать как коэффициент усиления, так и величину динамического диапазона радиоприемного тракта.

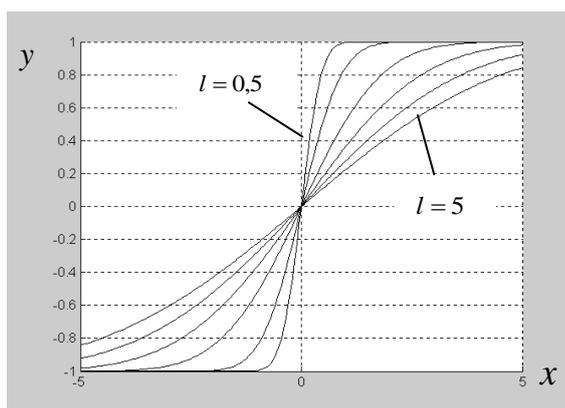


Рис. 1. Семейство характеристик симметричного ограничителя при  $l = 0,5...5$

## II. Оценка нелинейных искажений на примере вычисления коэффициента гармоник на основе имитационного моделирования

Вследствие прохождения входного сигнала через НЭ, из-за нелинейности характеристик которого возникают нежелательные эффекты, приводящие к обогащению спектра дополнительными частотными составляющими, которые необходимо учитывать и оценивать, что является чрезвычайно важной задачей.

Из теории оценки нелинейных искажений известны следующие критерии: коэффициент нелинейных искажений, коэффициент гармоник, затухание нелинейности, оценки для нелинейных искажений сосредоточенной помехи (коэффициент блокирования, коэффициент перекрестной модуляции, коэффициент интермодуляции, интермодуляционная селективность) [1]. Перечисленные эффекты учитываются при решении задач радиочастотного мониторинга, анализа электромагнитной обстановки размещаемых и вновь вводимых радиоэлектронных средств телекоммуникационных беспроводных сетей.

Как известно, коэффициент высших гармоник показывает отношение (в процентах) действующих значений высших гармоник, появившихся в выходном токе, к действующему значению тока основной гармоники. А коэффициент субгармоник показывает отношение действующих значений субгармоник, появившихся в выходном токе к действующему значению тока основной гармоники. В общем виде можно записать:

$$K_2 = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \dots}}{A_1} \times 100. \quad (5)$$

На примере расчета коэффициента высших гармоник и коэффициента субгармоник  $K_2$  проведена оценка нелинейных искажений при воздействии на НЭ одного гармонического колебания. С помощью имитационного моделирования получены оценки величины нелинейных искажений сигналов при прохождении их через нелинейные элементы, математические модели которых представлены зависимостями (2) и (3). Для модели (2) получена зависимость коэффициента субгармоник от величины зоны люфта. График данной зависимости представлен на рис. 2.

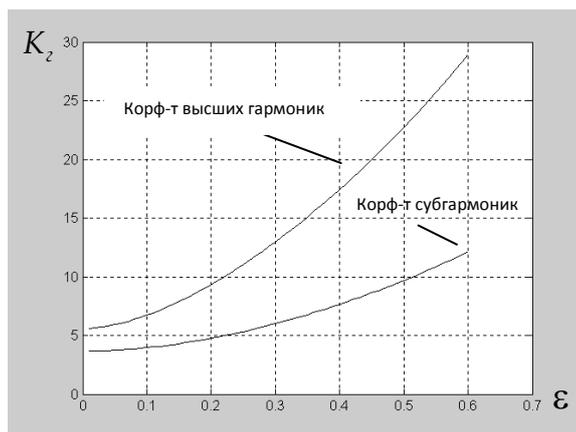


Рис. 2. Зависимость коэффициента гармоник от величины зоны люфта

Из данного графика (рис. 2) видно, что при значениях зоны люфта от 0,001 до 0,2 нелинейные искажения составляют не более пяти процентов. При этом систему можно считать квазилинейной. При значениях зоны люфта от 0,2 до 0,5 нелинейные искажения составляют от пяти до десяти процентов. При значениях зоны люфта больше 0,5 наблюдаются большие нелинейные искажения. Коэффициент высших гармоник несколько выше и составляет более пяти процентов во всем исследуемом диапазоне. Из данного графика видно, что при значениях зоны люфта от 0,001 до 0,2 нелинейные искажения составляют не более десяти процентов, что во многих случаях допустимо, и систему можно считать квазилинейной.

Для модели (3) получены зависимости коэффициентов гармоник от параметра  $l$  (рис. 3). Отметим, что с увеличением  $l$  уменьшается коэффициент усиления, характеристика усиления становится более полой.

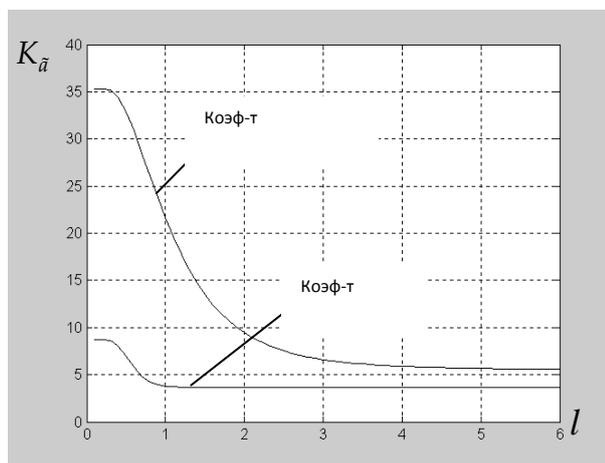


Рис. 3. Зависимости коэффициентов гармоник от параметра  $l$

В данном случае наблюдается обратное явление: при увеличении параметра  $l$  коэффициенты гармоник уменьшаются. Так, при значениях  $l$  от 0,01 до 1,5 наблюдаются большие нелинейные искажения, коэффициент высших гармоник составляет более десяти процентов. При значениях  $l$  от 1,5 до 3 нелинейные искажения составляют от пяти до десяти процентов. При значениях  $l$  больше трех нелинейные искажения составляют около пяти процентов, и систему можно считать линейной. Ко-

эффицентом субгармоник практически можно пренебречь уже при  $l \geq 1$ . Из данного графика видно, что субгармоники появляются при  $l \ll 1$ .

Также необходимо отметить, что указанное деление на квазилинейный случай, случай небольших нелинейных искажений, и случай больших нелинейных искажений совпадают с делениями, рассмотренными в [6].

### III. Оценка нелинейных искажений на примере вычисления коэффициента гармоник на основе метода рядов Вольтерра

Последнее время большое количество работ посвящено оценке нелинейных искажений на основе аппарата функциональных рядов Вольтерра. В результате развития данного метода анализа НИ созданы удобные способы получения нелинейной передаточной характеристики тракта, связывающей входное воздействие и отклик в явном виде. Опыт применения метода как зарубежными исследователями, так и отечественными показал его эффективность и универсальность для анализа и синтеза широкого класса трактов с малой степенью нелинейности, что представляет большой практический интерес для радиоприемной техники.

Будем использовать представление функционального ряда Вольтерры в виде следующего выражения [1]:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_n(f_1, \dots, f_n) \times \prod_{i=1}^n X(f_i) \exp(i2\pi f_i t) df_i, \quad (6)$$

где  $\underline{H}_n(f_1, \dots, f_n)$  – нелинейная передаточная функция  $n$ -го порядка, а  $X(f_i)$  – преобразование Фурье входного воздействия  $x(t)$ .

Для вычисления коэффициентов гармоник через нелинейные передаточные функции будем использовать методику, представленную в работах [7, 8].

Пусть отклик на выходе нелинейной инерционной цепи представляется рядом

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t), \quad (7)$$

где

$$y_n(t) = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_n(f_1, \dots, f_n) \times \prod_{i=1}^n X(f_i) \exp(i2\pi f_i t) df_i. \quad (8)$$

Индекс  $n$  называют порядком отклика, например, отклик 1-го порядка

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_1 X(f_i) \exp(i2\pi f_i t) df, \quad (9)$$

отклик 2-го порядка

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_2(f_1, f_2) X(f_1) X(f_2) \exp(i2\pi(f_1 + f_2)t) df_1 df_2 \quad (10)$$

и т.д.

Для более наглядного примера рассмотрим три входных воздействия в исследуемой цепи:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad (11)$$

$$x(t) = A^2 \cos^2(2\pi f_0 t), \quad (12)$$

$$x(t) = A^3 \cos^3(2\pi f_0 t). \quad (13)$$

В работе [7] получены в аналитическом виде отклики первого, второго, третьего и более высоких порядков для входного воздействия (11). Далее представим методику по определению выражений откликов на входные воздействия (11)-(13). Наиболее удобное представление входного воздействия рассматривается в виде преобразования Фурье. Для входного воздействия (11) преобразование Фурье имеет вид:

$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)], \quad (14)$$

где  $\delta(f - f_0)$  и  $\delta(f + f_0)$  – дельта-функции.

Предположим, что  $H_n(f_1, \dots, f_n)$ , во-первых, являются симметричными, т.е. их значения не зависят от перестановки аргументов, и, во-вторых, являются четными [7]:

$$H_n \left( \underbrace{f_0, \dots, f_0}_k, \underbrace{-f_0, \dots, -f_0}_m \right) = H_n \left( \underbrace{-f_0, \dots, -f_0}_k, \underbrace{f_0, \dots, f_0}_m \right). \quad (15)$$

Учитывая вышеперечисленное, можно преобразование Фурье (14) подставить в выражение (8), получая отклик первого порядка:

$$y_1(t) = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(f) [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \cdot e^{i2\pi \cdot f \cdot t} df, \quad (16)$$

где  $n$  и есть порядок отклика, который в данном случае равен единице. Кроме того, используем фильтрующее свойство дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (17)$$

Учитывая все вышеизложенное, получаем результат аналитического выражения для первого отклика:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(f) [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \cdot e^{i2\pi \cdot f \cdot t} df = \frac{A}{2} [H_n(f_0) \cdot e^{i2\pi \cdot f_0 \cdot t} + H_n(-f_0) \cdot e^{-i2\pi \cdot f_0 \cdot t}] = \\ &= AH_n(f_0) \cdot \cos 2\pi f_0 t, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $H_n(f) = H_n(-f)$ .

Аналогично распишем подробно второй и третий отклики:

$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_2(f_1, f_2) \frac{A^2}{4} [\delta(f_1 - f_0) + \delta(f_1 + f_0)] \times [\delta(f_2 - f_0) + \delta(f_2 + f_0)] \exp(i2\pi(f_1 + f_2)t) df_1 df_2 = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_2(f_1, f_2) \frac{A^2}{4} [\delta(f_1 - f_0) + \delta(f_1 + f_0)] [\underline{H}_2(f_1, f_0) \exp(i2\pi(f_1 + f_0)t) + \underline{H}_2(f_1, -f_0) \times \\
 &\times \exp(i2\pi(f_1 - f_0)t)] df_1 = \frac{A^2}{8} [\underline{H}_2(f_0, f_0) \exp(i2\pi 2f_0 t) + \underline{H}_2(-f_0, f_0) \exp(0) + \underline{H}_2(f_0, -f_0) \exp(0) = \\
 &= \frac{A^2}{8} [\underline{H}_2(f_0, f_0) \exp(i2\pi 2f_0 t) + \underline{H}_2(-f_0, -f_0) \exp(-i2\pi 2f_0 t) + \underline{H}_2(-f_0, f_0) \exp(0) + \\
 &\quad + \underline{H}_2(f_0, -f_0) \exp(0)] = \frac{A^2}{4} \underline{H}_2(f_0, f_0) \cos(2\pi 2f_0 t) + \frac{A^2}{4} \underline{H}_2(f_0, -f_0); \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_3(t) &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_3(f_1, f_2, f_3) \frac{A^3}{8} [\delta(f_1 - f_0) + \delta(f_1 + f_0)] \times [\delta(f_2 - f_0) + \delta(f_2 + f_0)] \times [\delta(f_3 - f_0) + \\
 &+ \delta(f_3 + f_0)] \exp(i2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t) df_1 df_2 df_3 = \frac{A^3}{48} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(f_1 - f_0) + \delta(f_1 + f_0)] \cdot [\delta(f_2 + f_0) + \delta(f_2 - \right. \\
 &\quad \left. - f_0)] [\underline{H}_3(f_1, f_2, f_0) \exp(i2\pi(f_1 + f_2 + f_0)t) + \underline{H}_3(f_1, f_2, -f_0) \exp(i2\pi(f_1 + f_2 - f_0)t)] df_1 df_2 = \\
 &= \frac{A^3}{48} \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(f_1 - f_0) + \delta(f_1 + f_0)] [\underline{H}_3(f_1, f_0, f_0) \exp(i2\pi(f_1 + 2f_0)t) + \underline{H}_3(f_1, -f_0, f_0) \exp(i2\pi f_1 t) + \\
 &\quad + \underline{H}_3(f_1, f_0, -f_0) \exp(i2\pi f_1 t) + \underline{H}_3(f_1, -f_0, -f_0) \exp(i2\pi(f_1 - 2f_0)t)] df_1 = \frac{A^3}{48} [\underline{H}_3(f_0, f_0, f_0) \times \\
 &\quad \times \exp(i2\pi 3f_0 t) + \underline{H}_3(-f_0, f_0, f_0) \exp(i2\pi f_0 t) + \underline{H}_3(f_0, -f_0, f_0) \exp(i2\pi f_0 t) + \underline{H}_3(-f_0, -f_0, f_0) \times \\
 &\quad \times \exp(-i2\pi f_0 t) + \underline{H}_3(f_0, f_0, -f_0) \exp(i2\pi f_0 t) + \underline{H}_3(-f_0, f_0, -f_0) \exp(-i2\pi f_0 t) + \underline{H}_3(f_0, -f_0, -f_0) \times \\
 &\quad \times \exp(-i2\pi f_0 t) + \underline{H}_3(-f_0, -f_0, -f_0) \exp(-i2\pi 3f_0 t) = \frac{A^3}{24} \underline{H}_3(f_0, f_0, f_0) \cos(i2\pi 3f_0 t) + \frac{A^3}{8} \times \\
 &\quad \times \underline{H}_3(f_0, f_0, -f_0) \cos(i2\pi f_0 t). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Поскольку при этом вычисления становятся более трудоемкими, то для меньшего нагромождения формул дальнейшие вычисления опускаем и приводим окончательный результат для откликов высших порядков [7]:

$$y_4(t) = \frac{A^4}{192} \underline{H}_4(f_0, f_0, f_0, f_0) \cos(2\pi 4f_0 t) + \frac{A^4}{48} \underline{H}_4(f_0, f_0, -f_0, -f_0) \cos(2\pi 3f_0 t); \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 y_5(t) &= \frac{A^5}{1920} \underline{H}_5(f_0, f_0, f_0, f_0, f_0) \cos(2\pi 5f_0 t) + \frac{A^5}{384} \underline{H}_5(f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0) \cos(2\pi 3f_0 t) + \\
 &\quad + \frac{A^5}{192} \underline{H}_5(f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0) \cos(2\pi f_0 t). \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_6(t) &= \frac{A^6}{46080} \underline{H}_6(f_0, f_0, f_0, f_0, f_0, f_0) \cos(2\pi 6f_0 t) + \frac{A^6}{7680} \underline{H}_6(f_0, f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0) \times \cos(2\pi 4f_0 t) + \\
 &\quad + \frac{A^6}{3072} \underline{H}_6(f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0) \cos(2\pi 3f_0 t) + \frac{A^6}{1536} \underline{H}_6(f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0, -f_0) \cos(2\pi 3f_0 t). \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$y_7(t) = \frac{A^7}{325120} \underline{H}_7(f_0, f_0, f_0, f_0, f_0, f_0, f_0) \cos(2\pi 7 f_0 t) + \frac{A^7}{92160} \times \\ \underline{H}_7(f_0, f_0, f_0, f_0, f_0, f, -f_0) \times \cos(2\pi 5 f_0 t) + \frac{A^7}{30720} \underline{H}_7(f_0, f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0) \times \\ \times \cos(2\pi 3 f_0 t) + \frac{A^7}{9216} \underline{H}_7(f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0, -f_0) \cos(2\pi f_0 t). \quad (24)$$

Первый член ряда (7) –  $y_1(t)$  (18) содержит первую гармонику частоты  $f_0$ ; второй –  $y_2(t)$  (19) – вторую гармонику частоты  $f_0$  и постоянную составляющую; третий –  $y_3(t)$  (20) – третью гармонику частоты  $f_0$  и первую гармонику  $f_0$ .

После подстановки амплитуд гармоник из (18)-(24) в выражение для вычисления коэффициента  $i$ -й гармоники (5) формулы для коэффициентов гармоник по второй и третьей гармоникам примут вид [7]:

$$K_{\Gamma_2} \approx \frac{\left| \frac{A^2}{4} \underline{H}_2(f_0, f_0) + \frac{A^4}{48} \underline{H}_4(f_0, f_0, f_0, -f_0) + \frac{A^6}{1536} \underline{H}_6(f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0) \right|}{\left| A \underline{H}_1(f_0) + \frac{A^3}{8} \underline{H}_3(f_0, f_0, -f_0) + \frac{A^5}{192} \underline{H}_5(f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0) + \frac{A^7}{9216} \underline{H}_7(f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0, -f_0) \right|}, \quad (25)$$

$$K_{\Gamma_3} \approx \frac{\left| \frac{A^3}{24} \underline{H}_3(f_0, f_0, f_0) + \frac{A^5}{384} \underline{H}_5(f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0) + \frac{A^7}{1536} \underline{H}_7(f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0, -f_0) \right|}{\left| A \underline{H}_1(f_0) + \frac{A^3}{8} \underline{H}_3(f_0, f_0, -f_0) + \frac{A^5}{192} \underline{H}_5(f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0) + \frac{A^7}{9216} \underline{H}_7(f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0, -f_0, -f_0) \right|}. \quad (26)$$

Выражения (25) и (26) позволяют получить более точные результаты, чем результаты, которые дают соответствующие формулы, в которых передаточные функции в числителе не выше 3-го порядка коэффициента гармоники [1]:

$$K_{\Gamma_2} \approx \frac{\left| \frac{A^2}{4} \underline{H}_2(f_0, f_0) \right|}{\left| A \underline{H}_1(f_0) \right|}, \quad (27)$$

$$K_{\Gamma_3} \approx \frac{\left| \frac{A^3}{24} \underline{H}_3(f_0, f_0, f_0) \right|}{\left| A \underline{H}_1(f_0) \right|}. \quad (28)$$

Как уже упоминалось, в работе [7] были вычислены отклики для входного воздействия (11). Авторами предлагается вывод аналитических выражений для первого, второго и третьего отклика для входных воздействий вида (12) и (13). Перед тем, как вычислить отклики воздействия (12), необходимо привести его к более приемлемому виду:

$$x(t) = A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{A^2 (1 + \cos(4\pi f_0 t))}{2} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2 \cos(4\pi f_0 t)}{2}. \quad (29)$$

Понизив степень косинуса можно легко найти преобразование Фурье:

$$\frac{A^2}{2} \cos(2\omega_0 t) \rightarrow \frac{A^2}{2} \sqrt{2\pi} \frac{[\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)]}{2}, \quad (30)$$

$$\frac{A^2}{2} \rightarrow \frac{A^2}{2} \sqrt{2\pi} \delta(\omega). \quad (31)$$

Учитывая выражения (30) и (31), можем записать преобразование Фурье для воздействия (29):

$$X(f) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \frac{A^2}{2} \left[ \delta(f) + \frac{[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]}{2} \right]. \quad (32)$$

Для вычисления откликов необходимо учитывать, что

$$\int f(x)\delta(x) = f(0), \quad (33)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0, \quad (34)$$

$$\int x(t)e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int x(t)e^{-j2\pi f_0 t} dt. \quad (35)$$

Итак, отклик первого порядка выражения (29):

$$y_1(t) = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_1(f) \frac{A^2}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \left[ \delta(f) + \frac{\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)}{2} \right] \cdot e^{i2\pi \cdot f \cdot t} df_0 = \frac{A^2 \sqrt{2\pi}}{4\pi} \underline{H}_1(2f_0) \times \cos(2\pi f_0 t). \quad (36)$$

Отклик второго порядка:

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_2(f_1, f_2) \left( \frac{A^2 \sqrt{2\pi}}{4\pi} \right)^2 \left[ \delta(f_1) + \frac{\delta(f_1 - 2f_0) + \delta(f_1 + 2f_0)}{2} \right] \times \left[ \delta(f_2) + \frac{\delta(f_2 - 2f_0) + \delta(f_2 + 2f_0)}{2} \right] \exp(i2\pi(f_1 + f_2)t) df_1 df_2 = \frac{A^4}{32\pi} \underline{H}_2(2f_0, 2f_0) \cos(2\pi 4f_0 t) + \frac{A^4}{32\pi} \underline{H}_2(2f_0, -2f_0). \quad (37)$$

И отклик третьего порядка:

$$y_3(t) = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_3(f_1, f_2, f_3) \left( \frac{A^2 \sqrt{2\pi}}{4\pi} \right)^3 \left[ \delta(f_1) + \frac{\delta(f_1 - 2f_0) + \delta(f_1 + 2f_0)}{2} \right] \times \left[ \delta(f_2) + \frac{\delta(f_2 - 2f_0) + \delta(f_2 + 2f_0)}{2} \right] \times \left[ \delta(f_3) + \frac{\delta(f_3 - 2f_0) + \delta(f_3 + 2f_0)}{2} \right] \exp(i2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t) df_1 df_2 df_3 = \frac{A^6 \sqrt{2\pi}}{768\pi^2} \underline{H}_3(2f_0, 2f_0, 2f_0) \cos(2\pi 6f_0 t) + \frac{A^6 \sqrt{2\pi}}{256\pi^2} \underline{H}_3(-2f_0, 2f_0, 2f_0) \cos(2\pi 2f_0 t). \quad (38)$$

Аналогично вычислим отклики для воздействия (13), перед этим понизив степень выражения

$$x(t) = A^3 \cos^3(2\pi f_0 t) = \frac{A^3}{4} [3\cos(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)]. \quad (39)$$

Учитывая выражения (34) и (35), можно записать преобразование Фурье:

$$X(f) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \frac{A^3}{4} [3[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + [\delta(f - 3f_0) + \delta(f + 3f_0)]] \quad (40)$$

Отклик первого порядка для воздействия (39) имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_1(f) \frac{3A^3}{4} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \frac{A^3}{4} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} [\delta(f - 3f_0) + \delta(f + 3f_0)] \cdot e^{i2\pi \cdot f \cdot t} df_0 = \\ &= \frac{3A^3 \sqrt{2\pi}}{4\pi} \underline{H}_1(f_0) \cos(2\pi f_0 t) + \frac{A^3 \sqrt{2\pi}}{4\pi} \underline{H}_1(3f_0) \cos(2\pi 3f_0 t). \end{aligned} \quad (41)$$

Отклик второго порядка для воздействия (39):

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_2(f_1, f_2) \left[ \frac{3A^3 \sqrt{2\pi}}{8\pi} [\delta(f_1 - f_0) + \delta(f_1 + f_0)] + \frac{A^3 \sqrt{2\pi}}{8\pi} [\delta(f_1 - 3f_0) + \delta(f_1 + 3f_0)] \right] \times \\ &\times \left[ \frac{3A^3 \sqrt{2\pi}}{8\pi} [\delta(f_2 - f_0) + \delta(f_2 + f_0)] + \frac{A^3 \sqrt{2\pi}}{8\pi} [\delta(f_2 - 3f_0) + \delta(f_2 + 3f_0)] \right] \exp(i2\pi(f_1 + f_2)t) df_1 df_2 = \\ &= \frac{25A^6}{48\pi} \underline{H}_2(f_0, f_0) \cos(2\pi 2f_0 t) + \frac{3A^6}{16\pi} \underline{H}_2(f_0, 3f_0) \cos(2\pi 4f_0 t) + \frac{A^6}{32\pi} \underline{H}_2(3f_0, 3f_0) \cos(2\pi 6f_0 t) + \\ &\quad + \frac{35A^6}{96\pi} \underline{H}_2(f_0, -f_0). \end{aligned} \quad (42)$$

И наконец, отклик третьего порядка:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}_3(f_1, f_2, f_3) \left[ \left( \frac{3\sqrt{2\pi}A^3}{8\pi} [\delta(f_1 - f_0) + \delta(f_1 + f_0)] + \frac{\sqrt{2\pi}A^3}{8\pi} [\delta(f_1 - 3f_0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta(f_1 + 3f_0)] \right) \times \left( \frac{3\sqrt{2\pi}A^3}{8\pi} [\delta(f_2 - f_0) + \delta(f_2 + f_0)] + \frac{\sqrt{2\pi}A^3}{8\pi} [\delta(f_2 - 3f_0) + \delta(f_2 + 3f_0)] \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{3\sqrt{2\pi}A^3}{8\pi} [\delta(f_3 - f_0) + \delta(f_3 + f_0)] + \frac{\sqrt{2\pi}A^3}{8\pi} [\delta(f_3 - 3f_0) + \delta(f_3 + 3f_0)] \right) \right] \exp(i2\pi(f_1 + f_2 + \\ &\quad + f_3)t) df_1 df_2 df_3 = \frac{129\sqrt{2\pi}A^9}{768\pi^2} \underline{H}_3(f_0, f_0, -f_0) \cos(2\pi f_0 t) + \frac{\sqrt{2\pi}A^9}{16\pi^2} \underline{H}_3(f_0, f_0, f_0) \cos(2\pi 3f_0 t) + \\ &\quad + \frac{11\sqrt{2\pi}A^9}{256\pi^2} \underline{H}_3(f_0, f_0, 3f_0) \cos(2\pi 5f_0 t) + \frac{3\sqrt{2\pi}A^9}{256\pi^2} \underline{H}_3(-f_0, 3f_0, 3f_0) \cos(2\pi 7f_0 t) + \frac{\sqrt{2\pi}A^9}{768\pi^2} \times \\ &\quad \times \underline{H}_3(3f_0, 3f_0, 3f_0) \cos(2\pi 9f_0 t). \end{aligned} \quad (43)$$

Можно заметить, что чем больше порядок отклика, тем меньшую долю вносят его составляющие в общий продукт нелинейности, например, гармоника 3-го порядка в отклике 3-го порядка воздействия (11) имеет амплитуду  $\frac{A^3}{24} \underline{H}_3(f_0, f_0, f_0)$ , а в отклике 5-го порядка –  $\frac{A^5}{384} \underline{H}_5(f_0, f_0, f_0, f_0, -f_0)$ .

## Выводы

Требования к степени линейности характеристик радиоэлектронных устройств связи постоянно ужесточаются, что накладывает определенные ограничения, при которых искажения передаваемых, усиливаемых и преобразуемых сигналов должны быть как можно меньше. Для количественной оценки степени воздействий нелинейных эффектов могут быть применены различные методы, основанные на характеристиках гистерезиса, функций Нуссбаума, рядов Вольтера и др. В работе показана применимость данных методов на примере вычисления коэффициента гармоник.

Проведено имитационное моделирование на основе характеристики гистерезиса НЭ, в результате которого определено, что при малых значениях зоны люфта 0,001 до 0,2 нелинейные искажения составляют не более пяти процентов, что во многих случаях допустимо, и систему можно считать квазилинейной. При значениях зоны люфта более 0,5 наблюдаются большие нелинейные искажения.

При использовании функций Нуссбаума было установлено, что при значениях параметра  $l$  от 0,01 до 1,5, регулирующего как коэффициент усиления, так и величину динамического диапазона радиоприемного тракта, наблюдаются большие нелинейные искажения. При значениях  $l$  более трех нелинейные искажения составляют около пяти процентов, а коэффициентом субгармоник практически можно пренебречь уже при  $l \geq 1$ . Получены выражения откликов нелинейной безынерционной цепи для различных видов гармонических воздействий, что впоследствии даст возможность с применением рядов Вольтерра вычислить коэффициент гармоник с большей степенью точности и разработать методику по оптимальному распределению частот в беспроводной телекоммуникационной системе на основе критериев нелинейности.

## Список литературы:

1. Богданович Б.М. Нелинейные искажения в приемно-усилительных устройствах. – М.: Связь, 1980. – 280с.
2. Нелинейные системы автоматического управления // Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под общ. ред. Е.П. Попова. – М.: Машиностроение, 1971. – 323 с.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
4. Математичні основи теорії телекомунікаційних систем / За заг. ред. В.В. Поповського. – Харків: ТОВ "Компанія СМІТ", 2006. – 564 с.
6. Коляденко Ю.Ю. Преобразование случайных процессов нелинейностью с характеристикой гистерезиса для задач пространственно-временной обработки сигналов // Праці УНДІРТ. – № 2(26). – 2001. – С. 72-75.
7. Кубицкий А.А., Захаров А.М. Методика вычисления коэффициента гармоник с использованием нелинейных передаточных функций // Радиотехника. – 2006. – №2. – С. 42-48.
8. Chong E. The Volterra Series and The Direct Method of Distortion Analysis. – University of Toronto, 2001. – 13 p. – Режим доступа: [http://www.eecg.toronto.edu/~kphang/papers/2001/chong\\_dist.pdf](http://www.eecg.toronto.edu/~kphang/papers/2001/chong_dist.pdf).