РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Вып. 18 Приборы и системы автоматики 1971

О СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАДИЕНТА В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В. В. Авраменко, А. А. Волков, В. Ф. Шостак

Харьков

В системах автоматической оптимизации обычно возникает задача определения градиента показателя эффективности y в функции вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ входных переменных объекта.

При наличии в системе естественных или искусственных случайных стационарных возмущений, используемых в качестве поисковых сигналов, значение градиента может быть определено [1, 2] из выражения

$$\operatorname{grad} y = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cong \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i x_i}(\tau)\, d\tau}, \qquad (1)$$

где x_i — независимые входные переменные объекта;

$\vec{e}_i$ — единичные векторы.

$R_{x_i y}(\tau)$, $R_{x_i x_i}(\tau)$ — соответственно взаимно-корреляционные и автокорреляционные функции.

Вычисление градиента указанным способом позволяет устранить погрешности, вызываемые изменением динамических характеристик объекта и случайными помехами, некоррелированными с поисковыми воздействиями.

Для вычисления текущих значений оценок интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i x_i}(\tau)\, d\tau$$

известна [1] весьма простая схема (рис. 1), использующая так называемый «статический фильтр» с целью вычисления текущего среднего

$$X_i(t) = \frac{1}{\tau_\Phi} \int_0^{\tau_\Phi} x_i(t-\tau)\, d\tau. \qquad (2)$$

На выходе схемы при достаточном количестве RC-цепочек статического фильтра формируется сигнал, определяемый выражением

$$\frac{1}{\tau_\Phi} \int_0^{\tau_\Phi} \frac{1}{T_н} \int_{t-T_н}^{t} x_i(t-\tau)\, y(t)\, dt d\tau \cong \frac{1}{\tau_\Phi} \int_0^{\tau_\Phi} M^t [x_i(t-\tau)\, y(t)]\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\tau_\Phi} \int_0^{\tau_\Phi} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau, \qquad (3)$$

где τ_Φ — время усреднения сигнала статическим фильтром;

$T_н$ — время интегрирования произведения.

Указанная схема может быть использована для вычисления $\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i x_i}(\tau)\,d\tau$ и $\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\,d\tau$ в случае, если $R_{x_i y}(\tau) \cong 0$ при $\tau < 0$ и $\tau > \tau_\Phi$. Величина τ_Φ определяется параметрами статического фильтра,

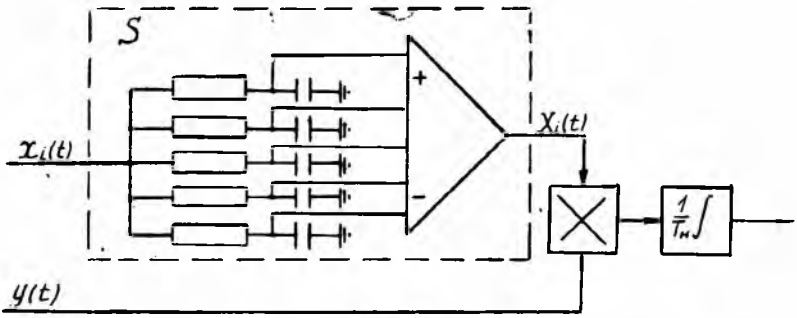


Рис. 1.

исходя из максимального значения интервала корреляции, обычно известного из предварительных исследований. Если $R_{x_i y}(\tau) \neq 0$ при $\tau < 0$, то применение рассмотренной схемы нецелесообразно вследствие погрешностей, резко возрастающих при смещении графика корреляционной функции в область $\tau < 0$. Для этого случая можно предложить модифицированную схему вычислительного устройства, представленную на рис. 2.

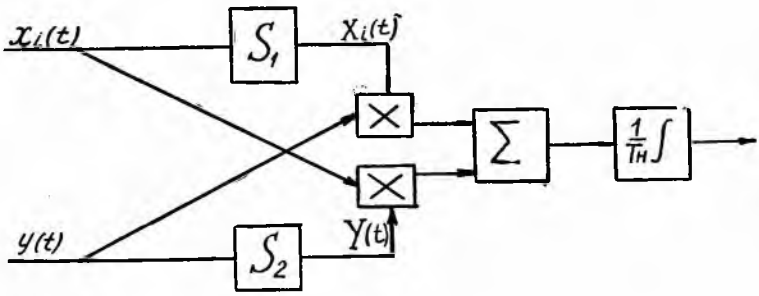


Рис. 2.

Статические фильтры S_1 и S_2 соответственно формируют сигналы

$$X_i(t) = \frac{1}{\tau_\Phi}\int_0^{\tau_\Phi} x_i(t-\tau)\,d\tau,$$

$$Y(t) = \frac{1}{\tau_\Phi}\int_0^{\tau_\Phi} y(t-\tau)\,d\tau$$

и на выходе схемы вычисляется оценка величины

$$M^t[Y(t)\,x_i(t) + X_i(t)\,y(t)] = \frac{1}{\tau_\Phi}\int_0^{\tau_\Phi} M^t[x_i(t)\,y(t-\tau)]\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{\tau_\Phi}\int_0^{\tau_\Phi} M^t[x_i(t-\tau)\,y(t)]\,d\tau = \frac{1}{\tau_\Phi}\int_0^{\tau_\Phi} R_{yx_i}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{\tau_\Phi}\int_0^{\tau_\Phi} R_{x_i y}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\tau_\Phi}\int_{-\tau_\Phi}^{\tau_\Phi} R_{x_i y}(\tau)\,d\tau. \qquad (4)$$

Значения $\tau_ф$ должны удовлетворять условию

$$\tau_ф > |\tau_{min}| \text{ и } \tau_ф > |\tau_{max}|.$$

Здесь τ_{min} и τ_{max} — граничные значения интервала взаимной корреляции. Очевидно,

$$\frac{1}{\tau_ф}\int_{-\tau_ф}^{\tau_ф} R_{x_i y}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\tau_ф}\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\,d\tau.$$

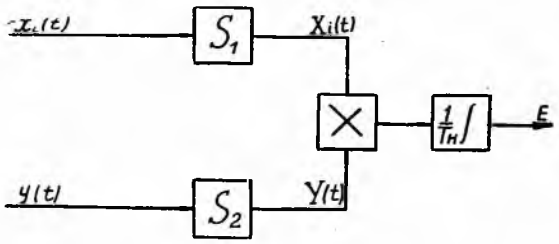


Рис. 3.

Модифицированная схема сложнее схемы, приведенной на рис. 1. Это усложнение особенно проявляется при вычислении градиента функции многих переменных. В то же время она значительно точнее, так как учитывает $\int_{-\infty}^{0} R_{x_i y}(\tau)\,d\tau$. Стремление объединить точность модифицированной схемы с простотой первой схемы (рис. 1) привело к разра-

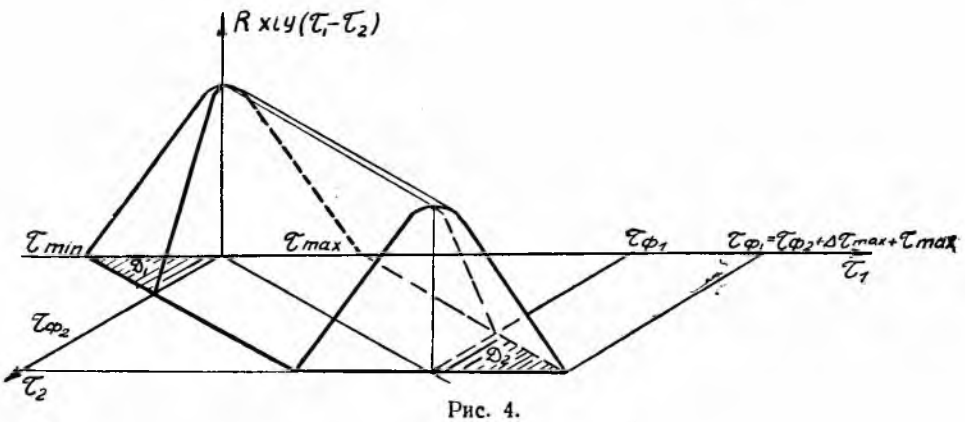


Рис. 4.

ботке упрощенной схемы (рис. 3), реализующей приближенное вычисление

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\,d\tau.$$

Сигнал на выходе этой схемы определяется выражением

$$E = \frac{1}{\tau_{ф_1}\tau_{ф_2}T_н}\int_0^{T_н}\int_0^{\tau_{ф_1}}\int_0^{\tau_{ф_2}} x_i(t-\tau_1)\,y(t-\tau_2)\,d\tau_2 d\tau_1 dt \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{\tau_{ф_1}\tau_{ф_2}}\int_0^{\tau_{ф_1}}\int_0^{\tau_{ф_2}} R_{x_i y}(\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2 d\tau_1. \qquad (5)$$

На рис. 4 величина двойного интеграла в правой части (5) представлена в пространстве координат τ_1, τ_2 и $R_{x_i y}(\tau_1-\tau_2)$ в виде объема $V_в$, обра-

зованного при пересечении цилиндрической поверхности $R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)$ с плоскостями $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$, $\tau_1 = \tau_{\Phi_1}$ и $\tau_2 = \tau_{\Phi_2}$,

$$V_u = \int_0^{\tau_{\Phi_1}} \int_0^{\tau_{\Phi_2}} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1 = \int_{-\tau_{\min}}^{\tau_{\Phi_1}} \int_0^{\tau_{\Phi_2}} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1 -$$

$$- \iint_{D_1} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1 - \iint_{D_2} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1. \qquad (6)$$

Из рис. 4 видно, что искомое значение

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau$$

определяется выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\tau_{\Phi_2}} \int_{-\tau_{\min}}^{\tau_{\Phi_1}} \int_0^{\tau_{\Phi_2}} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1 \qquad (7)$$

при

$$\tau_{\Phi_1} \geqslant \tau_{\Phi_2} + \tau_{\max}.$$

В случае использования упрощенной схемы (рис. 3) интеграл корреляционной функции определяется выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau \approx \frac{V_u}{\tau_{\Phi_2}}.$$

При этом появляется дополнительная погрешность δ вследствие неучтенных объемов

$$\iint_{D_1} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1$$

и

$$\iint_{D_2} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1:$$

$$\delta = \frac{\tau_{\Phi_2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau - V_u}{\tau_{\Phi_2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau} = \frac{\iint_{D_1} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1 + \iint_{D_2} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1}{\tau_{\Phi_2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau}. \qquad (8)$$

Задача сводится к определению таких значений τ_{Φ_1} и τ_{Φ_2}, при которых дополнительная погрешность не превысит допустимой величины. Выбор τ_{Φ_1} определяется простым соотношением (9), при котором

$$\iint_{D_2} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1 = 0,$$

$$\tau_{\Phi_1} = \tau_{\Phi_2} + \tau_{\max} + \Delta\tau_{\max}, \qquad (9)$$

где $\Delta\tau_{\max}$ — максимальное смещение кривой в сторону $\tau > 0$ вследствие изменения динамических свойств объекта.

При выполнении условия (9) величина δ определяется только выбором τ_{Φ_2} согласно (8), где

$$\iint_{D_1} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1 = \int_{-\tau_{\min}}^{0} \int_{-\tau_{\min}+\tau_1}^{0} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1. \qquad (10)$$

Величина τ_{Φ_2} находится из (8) после подстановки в него ориентировоч-

ных значений функции $R_{x_i y}(\tau)$, обычно известных из предварительных исследований,

$$\tau_{\phi_2} = \frac{\int\limits_{-\tau_{\min}}^{0} \int\limits_{-\tau_{\min}+\tau_1}^{0} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1}{\delta \int\limits_{-\tau_{\min}}^{\tau_{\phi_1}} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau}. \qquad (11)$$

В процессе работы при изменении транспортного запаздывания фактические значения $R_{x_i y}(\tau)$ могут сдвигаться вдоль оси τ и существенно изменять требуемое значение τ_{ϕ_2}. Поэтому в (11) нужно подставлять значения $R_{x_i y}(\tau)$, соответствующие минимальной величине транспортного запаздывания, при которой $\iint\limits_{D_1} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1$ принимает максимальное значение.

Экспериментальные значения $R_{x_i y}(\tau)$ удобно аппроксимировать суммой треугольных корреляционных функций [3]

$$R_{x_i y}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} R_{0i}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_{0i}}\right).$$

Пусть известно

$$R_{x_i y}(\tau) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} R_{0i}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_{0i}}\right) & \text{при } \tau < 0, \\ \sum\limits_{i=m+1}^{n-(m+1)} R_{0i}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_{0i}}\right) & \text{при } \tau > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\tau_{\phi_2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau = \int\limits_{-\tau_{\min}}^{\tau_{\phi_1}} \int\limits_{0}^{\tau_{\phi_2}} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1 = \frac{1}{2}\tau_{\phi_2} \sum_{i=1}^{n} R_{0i} |\tau_{0i}|.$$

Из (10) и (11)

$$\iint\limits_{D_1} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 d\tau_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{m} R_{0i}\tau_{0i}^2,$$

$$\tau_{\phi_2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} R_{0i}\tau_{0i}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} R_{0i} |\tau_{0i}|\, 3\delta}. \qquad (12)$$

Пример. Пусть $R_{x_i y}(\tau)$ — треугольная функция, симметричная относительно $\tau = 0$, $\Delta\tau_{\max} = |\tau_{02}|$ и $\delta = 0{,}05$. В этом случае $m = 1$, $n = 2$, $R_{01} = R_{02} = R$, $|\tau_{01}| = |\tau_{02}| = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2}$.

Из (12) $\tau_{\phi_2} = 1{,}67(\tau_{\min} + \tau_{\max})$ и из (9) $\tau_{\phi_1} = 2{,}67(\tau_{\min} + \tau_{\max})$.

При отсутствии ориентировочных значений $R_{x_i y}(\tau)$ желательно определить τ_{ϕ_1} и τ_{ϕ_2} по известному интервалу корреляции $\tau_{\min} + \tau_{\max}$ для предельного вида кривых $R_{x_i y}(\tau)$, чтобы дополнительная максимальная погрешность вычисления оценки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\, d\tau$ была меньше допустимой.

В качестве предельной кривой можно принять прямоугольник с основанием τ_{min} и высотой, равной максимальной ординате $R_{x_i y}(\tau)$ (рис. 5).

Самым неблагоприятным случаем является $\tau_{max} = 0$ и, следовательно, $\int_0^\infty R_{x_i y}(\tau)\,d\tau = 0$ (рис. 5).

Тогда

$$\tau_{\phi_2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\,d\tau = \tau_{\phi_2} R_{max} \tau_{min}.$$

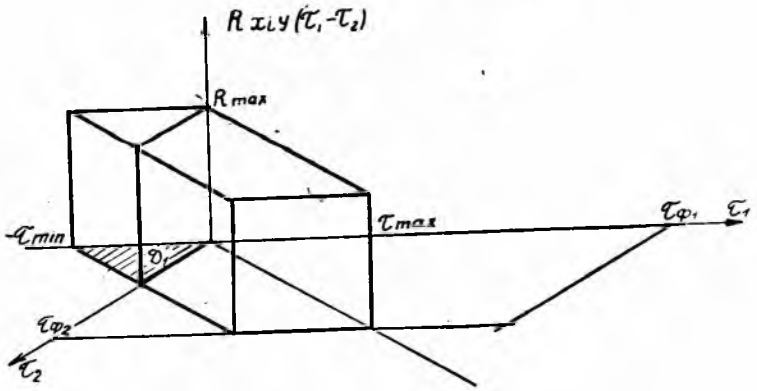


Рис. 5.

Согласно (10) и (11),

$$\iint_{D_1} R_{x_i y}(\tau_1 - \tau_2)\,d\tau_2 d\tau_1 = \frac{1}{2} R_{max} \tau_{min}^2;$$

$$\tau_{\phi_2} = \frac{\tau_{min}}{2\delta}$$

при $\delta = 0{,}05$, $\tau_{\phi_2} = 10\tau_{min}$.

Необходимо отметить, что чрезмерное увеличение τ_{ϕ_1} и τ_{ϕ_2} в упрощенной схеме нежелательно вследствие значительного снижения отношения сигнал-шум на выходе интегратора.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1. Вычисление оценок $\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i y}(\tau)\,d\tau$ при определении градиента в системах автоматической оптимизации целесообразно выполнять с помощью вычислительного устройства (рис. 1), если $R_{x_i y}(\tau) = 0$ при $\tau < 0$.

2. Если $R_{x_i y}(\tau) \neq 0$ при $\tau < 0$, следует применять модифицированную схему, позволяющую избежать ошибки, связанной с неучтенной площадью

$$\int_{-\infty}^{0} R_{x_i y}(\tau)\,d\tau.$$

3. Для этого же случая предложена упрощенная схема (рис. 3), позволяющая приближенно вычислять интеграл взаимно-корреляционной функции с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Гринтен. Использование случайных пробных сигналов в системах автоматической оптимизации. Тр. II конгресса ИФАК. Изд-во «Наука», М., 1965.

2. В. С. Балакирев, Е. Г. Дудников, А. М. Цирлин. Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления. Изд-во «Энергия», М., 1967.

3. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления. Изд-во «Сов. радио», М., 1963.