

## ТРЕУГОЛЬНИК ЧИСЕЛ ПАСКАЛЯ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТКАХ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

Целью работы является решение задачи о рассеянии электромагнитных волн на специальных сложных пространственных решетках малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер, пространственное распределение которых подчинено треугольнику чисел Паскаля [1]. Длина рассеиваемой волны может быть соизмерима с постоянными решетки.

Рассмотрим сложную пространственную решетку, состоящую из  $C$  подрешеток ( $c \in C$ ), эти подрешетки порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{c,s} &= [s - 0,5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1}x_{c,s=0} & (s = \pm[j - |t|]), \\ y_{c,t} &= [t - 0,5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1}y_{c,t=0} & (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j), \\ z_{c,p} &= [p - 0,5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1}z_{c,p=0} & (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left[ \frac{j!}{(j-|t|)!|t|!} - 1 \right]), \end{aligned} \quad (1)$$

где значения  $p, s, t$  зависят от номера строк  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$  треугольника чисел Паскаля, величины  $d, h, l$  определяются условиями  $x = 0, x = d; y = 0, y = h; z = 0, z = l$ , а  $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$  – координаты узла подрешетки  $c$ , находящегося внутри области (рис.1)

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{c,s=0} \leq d, \\ 0 &\leq y_{c,t=0} \leq h, \\ 0 &\leq z_{c,p=0} \leq l. \end{aligned} \quad (2)$$

Координаты  $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}$  – определяют положение узлов подрешетки  $c$  вне пределов области (2) и являются функциями координат  $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ . В координатное представление (1) можно ввести зависимость от времени, если  $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$  считать некоторыми функциями времени. Каждому узлу пространственной подрешетки  $c$  (1) сопоставляется упорядоченная тройка чисел  $u = c(p, s, t)$ , выделенный узел решетки будем обозначать  $u' = c'(p', s', t')$ , а узел внутри области (2) –  $c(p = 0, s = 0, t = 0)$ . Задавая максимальное значение для номера  $j$  строки треугольника чисел Паскаля в (1), можно рассматривать конечные и бесконечные решетки.

Нужный тип элементарной ячейки решетки (примитивную, объемноцентрированную, гранецентрированную и другие) формируют из  $C$  узлов внутри области (2), которую повторит за пределами области (2) координатное представление (1) в виде пространственной решетки определенного вида.

На (рис.2) представлено пространственное распределение узлов решетки, когда порождающий узел решетки находится в центре области (2), для случая  $-j = 0, 1, 2, 3, 4$  и  $z > 0$ .

Распределение сфер вдоль оси  $z$  подчинено треугольнику чисел Паскаля (рис.3). Каждой тройке чисел  $(p = 0, s, t)$  плоскости  $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$  ставится в соответствие определенное число треугольника Паскаля, например, точке  $(p = 0, s = -3, t = -2)$  соответствует число 10, точке  $(p = 0, s = -2, t = 2)$  – число 6, а точке  $(p = 0, s = 4, t = 1)$  – число 5.



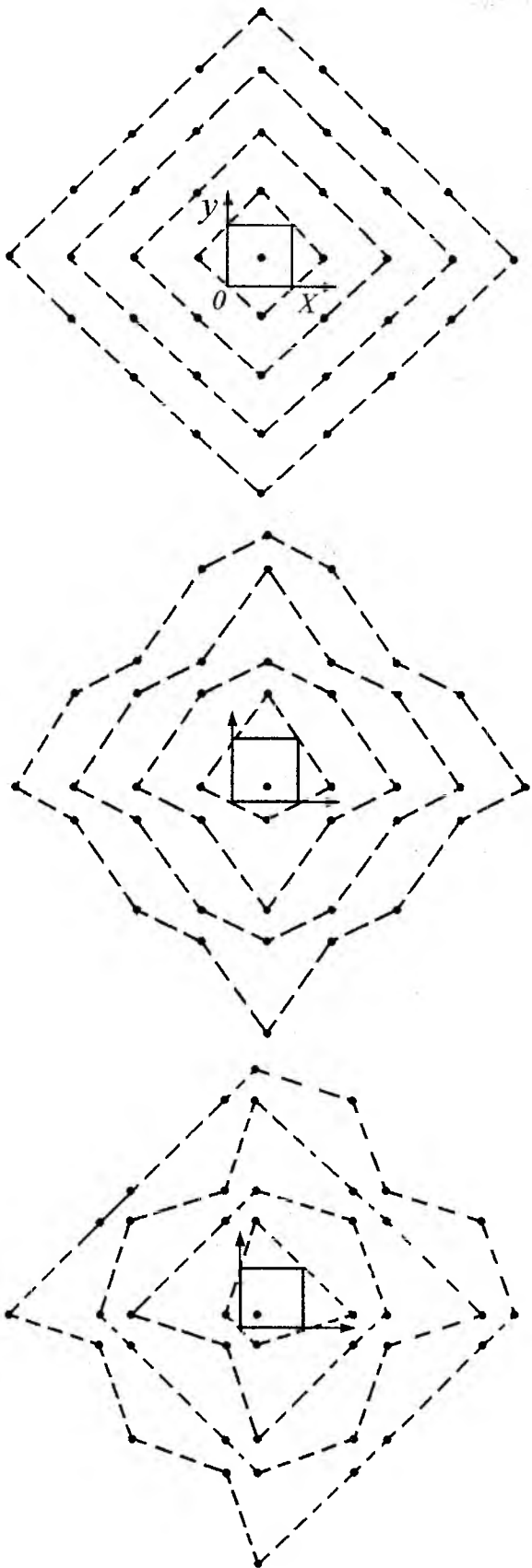


Рис. 4

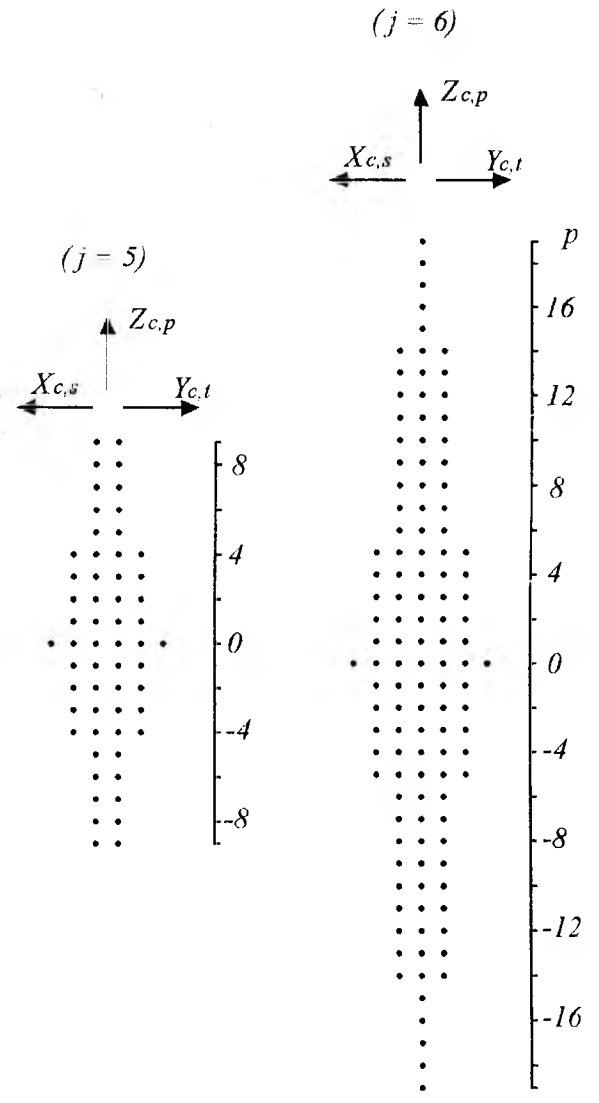


Рис. 5

Эти числа и определяют число сфер вдоль оси  $z$  (1) для заданной точки  $(p=0, s, t)$  (рис.3). Между тройкой чисел  $(p=0, s, t)$  плоскости  $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$  (1) и числом треугольника Паскаля существует связь, определяемая функцией

$$\frac{j!}{(j-|t|)!|t|!},$$

которая является биномиальным коэффициентом.

Отсюда числа  $p$ , определяющие координаты сфер вдоль оси  $z$  (1), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left( \frac{j!}{(j-|t|)!|t|!} - 1 \right),$$

где  $j=0, 1, 2, 3, \dots; |t|=0, 1, 2, 3, \dots, j$ .

Если изменять координаты узлов в области (2), то положения узлов вне области (2) также соответствующим образом смещаются и происходит перестройка ячеек и формирование пространственной конфигурации решетки (рис.4).

Расстояние между узлами определим (1)

$$r_{c'(p', s', t'), c(p, s, t)} = \sqrt{(x_{c', s'} - x_{c, s})^2 + (y_{c', t'} - y_{c, t})^2 + (z_{c', p'} - z_{c, p})^2}. \quad (3)$$

Если в центре области (2) находится один порождающий узел решетки, то для случая, когда  $j=5$  и  $j=6$  из (1) получим плоские решетки с расположением сфер вдоль оси  $z$ , подчиняющимся биномиальным коэффициентам (рис.5).

Производя соответствующие сечения этого распределения узлов (1), можно получить различного вида плоские перестраиваемые решетки. Если в области (2) сформирована элементарная ячейка, то вместо одиночных узлов в решетках (рис.5) будут находиться ячейки из области (2).

В узлы подрешеток (1) помещаются центры сфер с проницаемостями  $\epsilon_{c(p, s, t)}, \mu_{c(p, s, t)}$  и радиусами  $a_{c(p, s, t)}$ , далее обозначаем –  $\epsilon_c, \mu_c, a_c$ . Сферы решетки находятся в свободном пространстве.

Будем считать, что вне сфер  $a/\lambda \ll 1$ , но внутри сферы возможен резонансный случай  $a/\lambda_g \sim 1$ , где  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве, а  $\lambda_g$  – длина волны в сфере [2].

Для решения задачи используем интегральные уравнения [3] и решаем её в два этапа. На первом этапе найдем внутреннее поле рассеивающих сфер, а на втором этапе находим поле, рассеянное пространственной решеткой сфер. Поля представим в виде  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$ ,  $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$ .

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический  $\vec{\Pi}^E$  и магнитный  $\vec{\Pi}^M$  потенциалы Герца

$$\begin{aligned} \vec{E}_{racc} &= (\nabla\nabla + k^2\epsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^E - ik\mu_0[\nabla, \vec{\Pi}^M], \\ \vec{H}_{racc} &= (\nabla\nabla + k^2\epsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^M + ik\epsilon_0[\nabla, \vec{\Pi}^E]. \end{aligned} \quad (4)$$

Потенциалы Герца рассеянного поля имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}^{\text{э}} &= \frac{1}{4\pi V} \int \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \bar{E}^0(\bar{r}') f(|\bar{r} - \bar{r}'|) dV, \\ \bar{\Pi}^{\text{м}} &= \frac{1}{4\pi V} \int \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \bar{H}^0(\bar{r}') f(|\bar{r} - \bar{r}'|) dV,\end{aligned}\quad (5)$$

где  $\bar{E}^0(\bar{r}')$ ,  $\bar{H}^0(\bar{r}')$  – внутренние поля рассеивателя,  $V$  – объем рассеивателя,  $\varepsilon_0, \mu_0$  – проницаемости заполнения свободного пространства, функция  $f(|\bar{r} - \bar{r}'|)$  является решением уравнения

$$\Delta f(|\bar{r} - \bar{r}'|) + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 f(|\bar{r} - \bar{r}'|) = -4\pi \delta(|\bar{r} - \bar{r}'|),$$

удовлетворяющего условию излучения на бесконечности и имеет вид

$$f(|\bar{r} - \bar{r}'|) = \frac{e^{-ki\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|}. \quad (6)$$

Вычислим вначале внутреннее поле рассеивателей для случая, когда отношение  $a/\lambda_g \ll 1$  внутри и  $a/\lambda \ll 1$  вне сферы, а потом результаты вычислений обобщим и на резонансный случай, когда  $a/\lambda_g \sim 1$  внутри сферы. Можно показать, что для внешних точек сферы ( $r > r'$ ) интеграл по объему сферы от функции Грина для свободного пространства (6) имеет вид

$$W(\bar{r}) = \int_V \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \frac{e^{-ik_1 r}}{r}, \quad (7)$$

где  $k_1 = k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $r$  – определяет расстояние от центра до внешних точек сферы.

Внутреннее поле  $c'(p', s', t')$  сферы найдем из системы квазистационарных неоднородных уравнений, которые построим, опираясь на интегральные уравнения [3]. Входящие в эту систему неоднородные уравнения для произвольной выделенной сферы имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{E}^0_{c'}(p', s', t')(\bar{r}', t) &= \left[ \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \right\} \bar{E}^0_{c'}(p', s', t')(\bar{r}', t) - \right. \\ &- \sum_{p s t} \sum_{p' s' t'} \left\{ \left( \nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'}^{\text{э}}(p, s, t)(\bar{r}) \bar{E}^0_{c'}(p', s', t')(\bar{r}', t) - \right. \\ &c'(p, s, t) \neq c'(p', s', t') \\ &- ik\mu_0 \left[ \nabla, \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'}^{\text{м}}(p, s, t)(\bar{r}) \bar{H}^0_{c'}(p', s', t')(\bar{r}', t) \right] \left. \right\} - \\ &- \sum_{c=1}^C \left( \sum_{p s t} \sum_{p' s' t'} \left\{ \left( \nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'}^{\text{э}}(p, s, t) \bar{E}^0_{c'}(p', s', t')(\bar{r}', t) - \right. \right. \\ &(c \neq c')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -ik\mu_0 \left[ \nabla, \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\mu_c}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}') \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \right] \Bigg\}, \quad (8) \\
& \bar{H}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}', t) = \left[ \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) \right] \bar{H}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}', t) - \right. \\
& - \sum_{p \ s \ t} \sum_{c'(p,s,t) \neq c'(p',s',t')} \left[ \left( \nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'(p,s,t)}^M(\vec{r}) \bar{H}_{c'(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) + \right. \\
& \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left[ \nabla, \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'(p,s,t)}^\vartheta(\vec{r}) \bar{E}_{c'(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \right] \right] \right] - \\
& - \sum_{c=1}^C \left[ \sum_{p \ s \ t} \sum_{(c \neq c')} \left[ \left( \nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\mu_c}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}) \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) + \right. \right. \\
& \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left[ \nabla, \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^\vartheta(\vec{r}) \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \right] \right] \right] \Bigg\},
\end{aligned}$$

где  $\bar{E}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}', t)$ ;  $\bar{H}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}', t)$  и  $\bar{E}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}', t)$ ;  $\bar{H}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}', t)$  – поле падающей волны и внутреннее поле  $c'(p', s', t')$  сферы, а  $\bar{E}_{c(p,s,t)}(\vec{r}', t)$ ;  $\bar{H}_{c(p,s,t)}(\vec{r}', t)$  – внутренние поля остальных сфер.

Величины  $W_{c(p,s,t)}^\vartheta(\vec{r}')$ ;  $W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}')$  имеют вид (3,7,8)

$$\begin{aligned}
W_{c(p,s,t)}^\vartheta(\vec{r}') &= \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}, \\
W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}') &= -\frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}.
\end{aligned}$$

Первые слагаемые справа в уравнениях (8) связаны с внутренним полем  $c'(p', s', t')$  сферы без учета влияния всех остальных сфер, оставшиеся слагаемые учитывают влияние на  $c'(p', s', t')$  рассеиватель всех остальных сфер.

Уравнения (8) представляют систему  $2N = 2 \sum_{c=1}^C N_c$  векторных неоднородных уравнений, где  $N$  – общее число сфер решетки, а  $N_c$  – число сфер подрешетки  $c$ . Решение этой системы уравнений для выделенной сферы имеет вид:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta_{\varepsilon M}} \sum_{c=1}^C \left[ \sum_u \left[ \hat{g}_u^{\varepsilon u'} \bar{E}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}', t) + \hat{\beta}_u^{\varepsilon u'} \bar{H}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}', t) \right] \right], \quad (9) \\
\bar{H}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta_{\varepsilon M}} \sum_{c=1}^C \left[ \sum_u \left[ \hat{\beta}_u^{\mu u'} \bar{H}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}', t) + \hat{g}_u^{\mu u'} \bar{E}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}', t) \right] \right],
\end{aligned}$$

$$\hat{g}_u^{\varepsilon u'} = \begin{bmatrix} g_{xxu}^{\varepsilon u'} & g_{xyu}^{\varepsilon u'} & g_{xzu}^{\varepsilon u'} \\ g_{yxu}^{\varepsilon u'} & g_{yyu}^{\varepsilon u'} & g_{yzu}^{\varepsilon u'} \\ g_{z xu}^{\varepsilon u'} & g_{zyu}^{\varepsilon u'} & g_{zzu}^{\varepsilon u'} \end{bmatrix}, \quad \hat{\beta}_u^{\varepsilon u'} = \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{\varepsilon u'} & \beta_{xyu}^{\varepsilon u'} & \beta_{xzu}^{\varepsilon u'} \\ \beta_{yxu}^{\varepsilon u'} & \beta_{yyu}^{\varepsilon u'} & \beta_{yzu}^{\varepsilon u'} \\ \beta_{z xu}^{\varepsilon u'} & \beta_{zyu}^{\varepsilon u'} & \beta_{zzu}^{\varepsilon u'} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\beta}_u^{\mu u'} = \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{\mu u'} & \beta_{xyu}^{\mu u'} & \beta_{xzu}^{\mu u'} \\ \beta_{yxu}^{\mu u'} & \beta_{yyu}^{\mu u'} & \beta_{yzu}^{\mu u'} \\ \beta_{z xu}^{\mu u'} & \beta_{zyu}^{\mu u'} & \beta_{zzu}^{\mu u'} \end{bmatrix}, \quad \hat{g}_u^{\mu u'} = \begin{bmatrix} g_{xxu}^{\mu u'} & g_{xyu}^{\mu u'} & g_{xzu}^{\mu u'} \\ g_{yxu}^{\mu u'} & g_{yyu}^{\mu u'} & g_{yzu}^{\mu u'} \\ g_{z xu}^{\mu u'} & g_{zyu}^{\mu u'} & g_{zzu}^{\mu u'} \end{bmatrix}.$$

а  $\Delta^{\varepsilon M}$  – детерминант основной матрицы системы уравнений (8).

Компоненты внутреннего поля сферы (9) представим в виде:

$$E_{xu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\varepsilon M}} \sum_{c=1}^C \left( \sum_u \left[ g_{xxu}^{\varepsilon u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{xyu}^{\varepsilon u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{xzu}^{\varepsilon u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) + \beta_{xxu}^{\varepsilon u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{xyu}^{\varepsilon u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{xzu}^{\varepsilon u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right),$$

$$E_{yu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\varepsilon M}} \sum_{c=1}^C \left( \sum_u \left[ g_{yxu}^{\varepsilon u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{yyu}^{\varepsilon u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{yzu}^{\varepsilon u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) + \beta_{yxu}^{\varepsilon u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{yyu}^{\varepsilon u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{yzu}^{\varepsilon u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right),$$

$$E_{zu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\varepsilon M}} \sum_{c=1}^C \left( \sum_u \left[ g_{z xu}^{\varepsilon u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{zyu}^{\varepsilon u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{zzu}^{\varepsilon u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) + \beta_{z xu}^{\varepsilon u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{zyu}^{\varepsilon u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{zzu}^{\varepsilon u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right),$$

$$H_{xu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\varepsilon M}} \sum_{c=1}^C \left( \sum_u \left[ \beta_{xxu}^{\mu u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{xyu}^{\mu u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{xzu}^{\mu u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) + g_{xxu}^{\mu u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{xyu}^{\mu u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{xzu}^{\mu u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right),$$

$$H_{yu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\varepsilon M}} \sum_{c=1}^C \left( \sum_u \left[ \beta_{yxu}^{\mu u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{yyu}^{\mu u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{yzu}^{\mu u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) + g_{yxu}^{\mu u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{yyu}^{\mu u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{yzu}^{\mu u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right),$$

$$H_{zu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\varepsilon M}} \sum_{c=1}^C \left( \sum_u \left[ \beta_{z xu}^{\mu u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{zyu}^{\mu u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{zzu}^{\mu u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) + g_{z xu}^{\mu u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{zyu}^{\mu u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{zzu}^{\mu u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right).$$

Полученные решения (9) справедливы, когда  $a/\lambda \ll 1$  снаружи и  $a/\lambda_g \ll 1$  внутри сферы. Но их можно обобщить на резонансный случай  $a/\lambda_g \sim 1$ , если вместо проницаемостей  $\epsilon_c$  и  $\mu_c$  сферы ввести эффективные проницаемости [4, 2, 5]

$$\begin{aligned}\epsilon_{c\varepsilon\phi} &= \epsilon_c F(ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}), \\ \mu_{c\varepsilon\phi} &= \mu_c F(ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}),\end{aligned}\quad (10)$$

где, рис. 6,

$$F(ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}) = \frac{2(\sin ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} - ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} \cos ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c})}{(k^2 a_c^2 \epsilon_c \mu_c - 1) \sin ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} + ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} \cos ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}}.$$

Потенциалы Герца (5), рассеянного сферами решетки поля, можно представить, учитывая (9) и (10), в виде суперпозиции потенциалов Герца отдельных сфер решетки

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}^{\varepsilon}(\vec{r}, t) &= \sum_{c=1}^C \left[ \sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left( \frac{\epsilon_{c\varepsilon\phi}}{\epsilon_0} - 1 \right) \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right], \\ \bar{\Pi}^{\mu}(\vec{r}, t) &= - \sum_{c=1}^C \left[ \sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left( \frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right].\end{aligned}\quad (11)$$

$$\text{Здесь } r_{c(p,s,t)} = \sqrt{(x - x_{c,s})^2 + (y - y_{c,t})^2 + (z - z_{c,p})^2},$$

где  $(x, y, z)$  – координаты точки наблюдения рассеянного поля вне сфер решетки;  $(x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p})$  – координаты точки нахождения центра рассеивающей сферы решетки (1).

Тогда, учитывая (10), (11), из (4) найдем искомое рассеянное сферами решетки поле:

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\text{расс}} &= \sum_{c=1}^C \left[ \sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left( \frac{\epsilon_{c\varepsilon\phi}}{\epsilon_0} - 1 \right) \hat{L}_c \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - ik\mu_0 \left( \frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{P}_c \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_{c(p,s,t)})} \right], \\ \bar{H}_{\text{расс}} &= \sum_{c=1}^C \left[ \sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left( \frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{L}_c \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + ik\epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_{c\varepsilon\phi}}{\epsilon_0} - 1 \right) \hat{P}_c \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_{c(p,s,t)})} \right],\end{aligned}\quad (12)$$

где  $\hat{L}_c$  и  $\hat{P}_c$  функциональные матрицы вида:

$$\hat{L}_c = \begin{bmatrix} \Psi_{xxc} & \Psi_{xhc} & \Psi_{xzc} \\ \Psi_{yxc} & \Psi_{yhc} & \Psi_{yzc} \\ \Psi_{zxc} & \Psi_{zyc} & \Psi_{zzc} \end{bmatrix}, \quad \hat{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_{zc} & \Psi_{yc}^0 \\ \Psi_{zc}^0 & 0 & \Psi_{xc} \\ \Psi_{yc} & \Psi_{xc}^0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (12), имеют вид (1):

$$\begin{aligned} \Psi_{xx} &= \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \frac{3(x-x_{c,s})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (x-x_{c,s})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x-x_{c,s})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^4}, \\ \Psi_{yy} &= \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \frac{3(y-y_{c,t})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (y-y_{c,t})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(y-y_{c,t})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^4}, \\ \Psi_{zz} &= \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \frac{3(z-z_{c,p})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (z-z_{c,p})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(z-z_{c,p})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^4}, \\ \Psi_{xyc} = \Psi_{yxc} &= \frac{3(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^4}, \\ \Psi_{xzc} = \Psi_{zxc} &= \frac{3(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^4}, \\ \Psi_{yzc} = \Psi_{zyc} &= \frac{3(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^4}, \\ \Psi_{xc} &= \frac{(x-x_{c,s})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(x-x_{c,s})}{r_{c(p,s,t)}^2}, & \Psi_{xc}^0 &= -\Psi_{xc}, \\ \Psi_{yc} &= \frac{(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^2}, & \Psi_{yc}^0 &= -\Psi_{yc}, \\ \Psi_{zc} &= \frac{(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^2}, & \Psi_{zc}^0 &= -\Psi_{zc}. \end{aligned}$$

Поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер, представим в виде (12)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, t),$$

где  $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$  – невозмущенное поле падающей волны.

Из детерминанта системы уравнений (8) определяются резонансные условия. Для случая, когда проницаемости  $\varepsilon_c$ ,  $\mu_c$  сфер решетки действительны и  $a/\lambda_g \sim 1$ , эти условия находятся из выражения

$$\det \operatorname{Re} \|\alpha_{sj}\| = 0,$$

где  $\|\alpha_{sj}\|$  – основная матрица системы уравнений (8).

На рис. 6 представлены особенности поведения  $\text{Re}F(\theta)$  (сплошная кривая) и  $\text{Im}F(\theta)$  (пунктирная кривая) в зависимости от  $\text{Re}\theta$  при разных значениях тангенса угла диэлектрических потерь  $\text{tg}\delta_\epsilon$  (1 кривая –  $\text{tg}\delta_\epsilon=0$ ; 2 кривая –  $\text{tg}\delta_\epsilon=0,05$ ; 3 кривая –  $\text{tg}\delta_\epsilon=0,1$ ) и  $\mu_c = 1$ , здесь  $\theta = ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}$ .

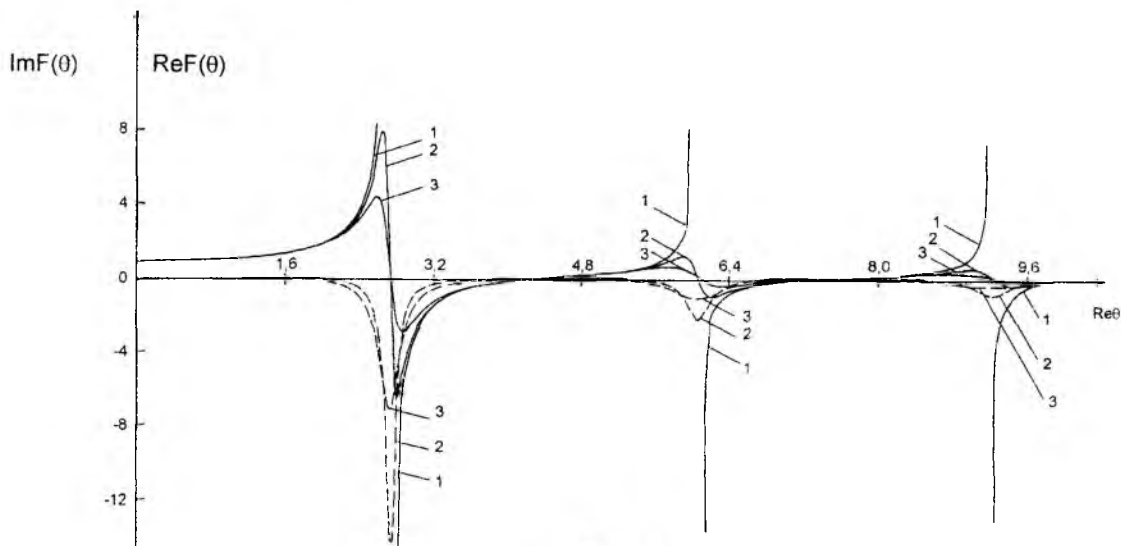


Рис. 6

Список литературы: 1.Бронштейн И.Н, Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука. 1986.С.134. 2.Козарь А.И., Хиженяк Н.А. Отражение электромагнитных волн от резонансной диэлектрической сферы в волноводе // Укр. физ. журн. 1970. Т.15. С.847-849. 3.Хиженяк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев.: Наукова думка, 1986. С.279. 4. Левин Л. Современная теория волноводов. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. С.216. 5. Козарь А.И., Хиженяк Н.А. К вопросу о точном измерении больших значений диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков. // Радиотехника. 1970. Вып. 14. С. 119-128.

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 16.04.2002