УДК 621.369.67.01

В. В. ДОЛЖИКОВ, канд. физ.-мат. наук

О СТАТИСТИЧЕСКОМ СИНТЕЗЕ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ

При решении задач статистического синтеза антенны по заданной диаграмме направленности (ДН), как правило, находят регулярное амплитудно-фазовое распределение (АФР) источников, которое при наличии заданных флуктуаций уровня амплитуды и фазы источников создает ДН по полю, в среднем наименее уклоняющиеся в некотором смысле от заданной [1]. Это фактически детерминированно-статистический синтез, ибо хотя задача формулируется в статистической постановке, но определяется детерминированная величина – регулярное АФР, а статистика флуктуаций его считается заданной. Однако, при статистическом синтезе, более естественным представляется нахождение оптимальных в определенном смысле статистических характеристик АФР источников, подверженных флуктуациям с заданным законом распределения плотности вероятности. Например, среднего (или регулярного) АФР и дисперсии флуктуаций фазы и амплитуды. Более того, определение указанных величин является важным и с практической точки зрения, ибо при этом в зависимости от требуемой точности воспроизведения заданной ДН определяются не только среднее или регулярное АФР, но и требования к точности установки и поддержания его. В данной работе применительно к линейной непрерывной антенне рассматривается постановка и решение задачи синтеза, позволяющие определить статистические характеристики оптимального АФР: среднее АФР и дисперсию флуктуаций амплитуды и фазы, обеспечивающие минимум математического ожидания квадратичного уклонения синтезируемой ДН от заданной.

Исходные соотношения. Рассмотрим линейную антенну (линейную систему непрерывно распределенных идентичных и одинаково ориентированных источников) длиной L. Амплитудно-фазовое распределение (АФР) при наличии флуктуаций будем характеризовать функцией $i(x)$

$$i(x) = i_0(x)e^{B(x)+j\varphi(x)} = i_0(x)q(x), \tag{1}$$

среднее значение которой равно

$$\bar{i} = i_0(x)p(x), \tag{2}$$

где $i_0(x)$ – АФР в отсутствие флуктуаций; $x = 2z/L,\ x \in [-1,1]$ – безразмерная продольная координата; $B(x)$ и $\varphi(x)$ – случайные, однородные в широком смысле функции, описывающие флуктуации уровня амплитуды и фазы источников соответственно; черта означает усреднение по реализациям однотипных антенн или по времени в зависимости от природы флуктуаций, $p(x) = \overline{e^{B(x)+j\varphi(x)}}$.

Множитель системы, в дальнейшем просто диаграмма направленности, также будет случайной функцией [2]

$$f(u) = Ai = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} i(x)e^{jux}\,dx, \tag{3}$$

где $u = (\pi L/\lambda)\cos\theta = a \cdot cos\theta$ – обобщенный угол; θ – угол, отсчитываемый от нормали к оси антенны, λ – длина волны в свободном пространстве; A – интегральный оператор с областью определения $D_A = L^2[-1,1]$ и областью значений $R_A = L_g^2(-\infty,\infty)$. Функция $f(u)$ описывает ДН только на интервале $[-a,a]$, который часто называют областью видимости (областью видимых углов) [3].

Будем считать, что ДН и АФР являются элементами гильбертовых пространств $L_g^2(-\infty,\infty)$ и $L_i^2(-1,1)$ соответственно, со скалярными произведениями

$$(f_1(u), f_2(u)) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)f_1(u)f_2^*(u)du, \tag{4}$$

$$\left(i_1(x), i_2(x)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} i_1(x) i_2^*(x) \quad dx, \tag{5}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение, $g(u)$ – неотрицательная во всей области интегрирования весовая функция.

Расстояние между двумя ДН f_1 и f_2 определим в виде математического ожидания квадрата нормы разности этих диаграмм в $L_g^2(-a,a)$

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\left\| f_1 - f_2 \right\|^2_{L_g^2(-a,a)}} = \overline{\left(f_1 - f_2, f_1 - f_2\right)} . \tag{6}$$

Тогда уклонение случайной ДН $f(u)$ от некоторой заданной в области видимости диаграммы $F_0(u)$, в общем случае не принадлежащей R_A, можно записать в следующем виде:

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\left\| F_0(u) - f(u) \right\|^2_{L_g^2[-a,a]}} = \left\| F_0 \right\|^2_{L_g^2[-a,a]} + \overline{(Ai, Ai)}_{L_g^2[-a,a]} - 2\mathrm{Re}\left(F_0, A\bar{i}\right)_{L_g^2[-a,a]}. \tag{7}$$

Величина $\overline{\varepsilon^2}$ является естественным обобщением используемого в теории детерминированного синтеза квадратичного отклонения ε^2 и широко применяется в задачах статистического синтеза антенн по заданной ДН [1,4]. Однако, как будет ясно из последующего, более удобным является другое представление функционала (7), к которому можно прийти после несложных преобразований

$$\overline{\varepsilon^2} = \left\| F_0 - A\bar{i} \right\|^2_{L_g^2[-a,a]} + \alpha_f . \tag{8}$$

Первое слагаемое в (8) – усреднённый по всей области $[-a,a]$ видимых углов квадрат взвешенной невязки средней ДН, второе – усредненное по той же области значение дисперсии ДН с учетом весовой функции $g(u)$

$$\alpha_f = \sigma_f^2 = \left(\bar{i}, S\bar{i}\right).$$

Здесь S – интегральный оператор с областью определения $D_S = L^2[-1,1]$

$$S\bar{i} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \overline{i(x_1)} R(x, x_1) K(x, x_1) dx_1, \tag{9}$$

где

$$R(x, x_1) = \overline{\left\{ \left[\frac{q(x)}{p(x)} - 1 \right] \left[\frac{q^*(x_1)}{p^*(x_1)} - 1 \right] \right\}}, \tag{10}$$

$$K(x, x_1) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} g(u) e^{ju(x - x_1)} du. \tag{11}$$

На основании (1) и (2) нетрудно увидеть, что квадратная скобка в (10) определяет относительную ошибку в АФР $\delta i(x)$, вводимую следующим образом

$$\delta i(x) = \frac{i(x) - \overline{i(x)}}{\overline{i(x)}} = \left[\frac{q(x)}{p(x)} - 1 \right] \tag{12}$$

и, следовательно, $R(x, x_1)$ является корреляционной функцией случайной величины $\delta i(x)$.

Таким образом, из (8) следует, что матожидание квадратичного уклонения случайной ДН по полю от заданной детерминированной ДН можно представить в виде суммы усредненных по области видимости квадрата невязки средней диаграммы по полю и дисперсии флуктуаций ДН, которая, как известно, характеризует среднюю интенсивность флуктуаций поля излучения. Кроме того, видно, что $\overline{\varepsilon^2}$ наиболее простым и естественным образом выражается через среднее АФР.

Будем считать, что $B(x)$ и $\varphi(x)$ – нормально распределенные взаимно независимые случайные функции. Тогда, в практически наиболее важном случае малых флуктуаций ($\alpha << 1$), с точностью до величин первого порядка малости по α и в предположении одинакового вида коэффициентов корреляции $r_B(x,x_1) = r_\varphi(x,x_1) = r(x,x_1)$, функция $R(x,x_1)$ и оператор S могут быть записаны в следующем виде:

$$R(x.x_1) = \mu(\alpha_B, \alpha_\varphi) \cdot r(x,x_1),$$
$$S = \mu(\alpha_B, \alpha_\varphi) \cdot S_1(x,x_1),$$

где $\mu(\alpha_B, \alpha_\varphi) = \alpha_B + \alpha_\varphi$ – суммарная дисперсия; $\alpha_B = \sigma_B^2$, $\alpha_\varphi = \sigma_\varphi^2$ – дисперсии уровня амплитуды и фазы соответственно; оператор S_1 определяется соотношением

$$S_1 \bar{i} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \overline{i(x_1)} r(x,x_1) K(x,x_1) dx_1 . \tag{13}$$

Для дальнейшего удобно (8) записать в несколько ином виде, введя оператор A^*, сопряженный оператору A,

$$\overline{\varepsilon^2} = \|F_0\|^2_{L_g^2[-a,a]} + \left(\bar{i}, \left[A^* A + \mu S_1\right]\bar{i}\right)_{L^2[-1,1]} - 2\,\mathrm{Re}\left(A^* F_0, \bar{i}\right)_{L^2[-1,1]}. \tag{14}$$

Величина $\mu(\alpha_B, \alpha_\varphi)$ при этом является параметром функционала $\overline{\varepsilon^2}$.

Постановка и общее решение задачи

Функционал (8) позволяет рассмотреть в статистической постановке два типа задач синтеза линейной антенны по заданной комплексной ДН.

К задачам первого типа можно отнести задачи, когда статистика флуктуаций (т.е. все параметры, характеризующие флуктуации уровня амплитуды и фазы: средние значения, дисперсия и радиус корреляции) полностью известна. В этом случае параметр μ известен и задача синтеза требуемой диаграммы $F_0(u)$ формулируется следующим образом.

Определить регулярное АФР $i_0(x)$, которое при наличии флуктуаций с заданными параметрами (дисперсиями и радиусами корреляции) обеспечило бы ДН по полю, близкую в среднеквадратичном смысле к заданной. Аналитически задача сводится к задаче минимизации квадратичного функционала (14) по вектору $\bar{i}$ при известном параметре μ, решение которой имеет вид

$$\bar{i}_{опт} = \left(A^* A + \mu S_1\right)^{-1} A^* F_0 . \tag{15}$$

Затем по (2) определяется искомое регулярное АФР

$$i_{0,опт} = \frac{1}{p(x)} \left(A^* A + \mu S_1\right)^{-1} A^* F_0, \tag{16}$$

где $p(x) = \exp[B_0 + 0.5(\alpha_B - \alpha_\varphi)]$.

Эта задача равносильна задаче минимизации непосредственно по вектору i_0 функционала (7). Именно такого типа задачи синтеза по заданной ДН в основном и рассматривались в СТА [1,4].

К задачам второго типа можно отнести задачи, когда заранее нет информации о значениях дисперсии флуктуаций в распределении источников (т.е. отсутствует полная информация о статистических параметрах флуктуаций) и при решении задачи синтеза, кроме регулярного АФР, необходимо определить ещё и дисперсии уровня амплитуды и фазы. В этом случае параметр μ становится неизвестным. Его можно определить, если ввести дополнительное ограничение на невязку средней ДН по полю

$$\left\| F_0 - A\bar{i} \right\|^2_{L^2_g[-a,a]} \le \delta , \qquad (17)$$

где δ – заданная точность синтеза требуемой ДН.

Задачу синтеза формулируется следующим образом. Найти i_0 и дисперсию уровня амплитуды и фазы, обеспечивающие минимум $\overline{\varepsilon^2}$ при условии (17). Решение определяется соотношениями (15) и (16). Параметр μ находится из условия (17), взятого со знаком равенства и затем вычисляются значения дисперсий.

Заметим, что μ в данном случае играет роль множителя Лагранжа, и сформулированная задача эквивалентна следующей задаче условной минимизации: определить $\bar{i}_{опт}$, обеспечивающее минимум функционала $(\bar{i}, S_1 \bar{i})$, при условии (17). Характерно, что уравнение (14) получается не искусственно в результате сведения задачи условной минимизации к задаче безусловной минимизации функционала $\overline{\varepsilon^2}$, а естественным образом вследствие того, что задача формулировалась в статистической постановке.

Таким образом, в задачах второго типа определяется не только оптимальное среднее АФР, но дисперсии уровня амплитуды и фазы. В такой постановке задача представляет наибольший интерес с практической точки зрения и, насколько известно, ранее не рассматривалась.

Численные результаты

Рассмотрим антенну длиной $L = 1.5\lambda$. Требуемую ДН выберем в виде секторной диаграммы

$$F(u) = \begin{cases} 1, & \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \\ 0, & \theta \notin [-\theta_0, \theta_0], \end{cases}$$

где θ – угол между нормалью к оси антенны и вектором, направленным в точку наблюдения, $\theta_0 = 1.25$. В качестве весовой функции $g(u)$ возьмём кусочно-постоянную функцию

$$g(u) = \begin{cases} 1, & \theta \in [-\theta_0, \theta_0]; \\ g_0, & \theta \notin [-\theta_0, \theta_0]. \end{cases}$$

Будем считать, что имеют место только фазовые флуктуации, т.е. $\mu = \alpha_\varphi$, а требуемое значение $\delta = 0.015$. Представим искомое среднее АФР $\bar{i}(x)$ в виде разложения по полной системе собственных функций $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ оператора $A^* A$ [5]

$$\bar{i}(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n \psi_n(a, ax). \qquad (19)$$

Средняя ДН, соответствующая $\bar{i}(x)$, тогда имеет вид

$$\bar{f}(u) = A\bar{i}(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n \nu_n \psi_n(a, u), \qquad (20)$$

где $\nu_n(a) = j^n \sqrt{\lambda_n(a)/2\pi a}$, $\lambda_n(a)$ – собственные значения оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, упорядоченные таким образом, что $\lambda_0(a) > \lambda_1(a) > \ldots > 0)$.

Подставив соотношения (19), (20) в (14) и приравняв затем нулю первую вариацию по вектору неизвестных коэффициентов $b\rangle$, получим следующее матричное уравнение

$$[(\mathbf{A} + \mu\mathbf{H}_0) + \mu\mathbf{H}']b\rangle = d\rangle, \qquad (21)$$

где $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}$ – квадратные матрицы с элементами

$$\begin{aligned} \Lambda_{nm} &= \left(A^{*} A\psi_m, \psi_n\right)_{L^2[-1,1]} = \lambda_n^2 \delta_{nm}; \\ H_{onm} &= \left(S_1 \psi_m, \psi_n\right)_{L^2[-1,1]} = \lambda_n J_{nm} \delta_{nm}; \\ H_{nm} &= \left(S_1 \psi_m, \psi_n\right)_{L^2[-1,1]}\left(1 - \delta_{nm}\right) = j^{n-m}\left(1 - \delta_{nm}\right)\sqrt{\lambda_n \lambda_m} J_{nm}, \end{aligned} \tag{22}$$

а $d\rangle$ – вектор-столбец с элементами $d_n = \left(F_0, \psi_n\right)_{L_g^2(-a,a)} / \lambda_n$; δ_{mn} – символ Кронекера.

Входящая в формулы (22) величина $J_{mn}(a)$ определяется выражением

$$J_{nm}(a) = \frac{j^{(m-n)}}{2\pi k_n(a) k_m(a)} \int_{-1}^{1}\int S_{on}(a,x) S_{om}(a,x_1) R(x,x_1) K(x,x_1) dx dx_1,$$

где $S_{0n}(a,x)$ – вытянутые угловые сфероидальные функции, нормированные по Фламмеру [5], $k_n(a)$ – коэффициент нормировки

$$k_n^2(a) = \int_{-1}^{1} S_{0n}(a,x) S_{0n}(a,x) dx.$$

Матрицы $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{H}_0$ – диагональные, а матрица $\mathbf{H}$ – с нулевой диагональю. Кроме того, можно показать, что $\left[(\mathbf{\Lambda} + \mu\mathbf{H}_0) + \mu\mathbf{H}\right]$ и $\left[(\mathbf{\Lambda} + \mu\mathbf{H}_0) - \mu\mathbf{H}\right]$ – положительно определенные матрицы.

Для решения (21) можно воспользоваться методом Якоби (вариант метода простой итерации при выделении диагональной матрицы). Условие положительной определенности матриц $\left[(\mathbf{\Lambda} + \mu\mathbf{H}_0) \pm \mu\mathbf{H}\right]$ является необходимым и достаточным для сходимости итерационной процедуры Якоби [6].

Искомый вектор коэффициентов разложений среднего тока имеет вид

$$b\rangle = \left\{\mathbf{E} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[(\mathbf{\Lambda} + \mu\mathbf{H}_0)^{-1}\mu\mathbf{H}\right]^k\right\}(\mathbf{\Lambda} + \mu\mathbf{H}_0)^{-1} d\rangle,$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Значение дисперсии флуктуаций фазы, найденное из решения (17) при заданном δ, равно 0.01.
На рис. 1 показаны синтезированные квадрат нормированной средней ДН по полю $\overline{F(\theta)}$ – кривая 1, средняя ДН по мощности $\overline{F^2(\theta)}$ – кривая 3 и угловое распределение дисперсии ДН α_f по полю – кривая 2.

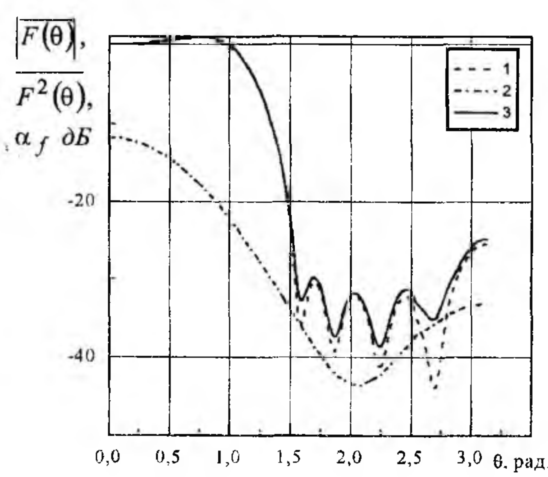

Рис. 1

В заключение отметим, что рассмотренный подход к статистическому синтезу в полной мере применим и к антенным решеткам.

Список литературы. 1. *Корниенко Л.Г., Шифрин Я.С.* Статис-тический синтез антенн // Проблемы антенной техники. М.: Радио и связь, 1989. С. 275-297. 2. *Шифрин Я.С.* Вопросы статис- тической теории антенн. М.: Сов. Радио, 1970. 3. *Минкович Б.М., Яковлев В.П.* Теория синтеза антенн. М.: Сов.радио, 1969. 4. *Шифрин Я.С., Должиков В.В.* Статистический синтез линейной непрерывной антенны по заданной диаграмме направленности // Радиотехника и электроника. 1994. Т.39, №8-9. С. 1329-1335. 5. *Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике* / Пер. и науч. обработка М.К. Размахнина, В.П. Яковлева. М.: Сов. Радио, 1971. 6. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 15.05.2001