УДК 621.396.551.533

Н. И. КРАВЧЕНКО, д-р техн. наук, Д. В. ЛЕНЧУК

СРЕДНИЙ КВАДРАТ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ПОГРЕШНОСТИ МНОГОКАНАЛЬНОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ С УЧЕТОМ ДИСКРЕТНОЙ И СЛУЧАЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Получены соотношения для среднего квадрата σ_{Σ}^2 разности истинного значения измеряемого параметра $F_и$ и оценки $\hat{F}$, выдаваемой многоканальным измерителем, с учетом случайной и дискретной составляющих ошибок.

В литературе [1] обычно рассматривают два класса ошибок: случайные и систематические. Есть еще один класс особых ошибок, присущий многоканальным аналоговым и цифровым измерителям, содержащим M каналов и схему выбора максимума (СВМ). Таким измерителям характерна ошибка дискретности $\sigma_д$, обусловленная дискретностью съема информации. При повторных измерениях неизменного по величине параметра сигнала, когда другие факторы отсутствуют, ошибка дискретности остается постоянной, что характерно для систематических ошибок. Однако, если изменить величину измеряемого параметра, то изменится и ошибка дискретности. При измерениях в присутствии случайных ошибок результирующая ошибка не равна сумме дискретной и случайной составляющих, т.е. случайная и дискретная составляющие не аддитивны. По указанным причинам необходимо рассмотреть задачу нахождения результирующей ошибки многоканального измерителя. Примером такого измерителя может быть многоканальный измеритель частоты (рис. 1).

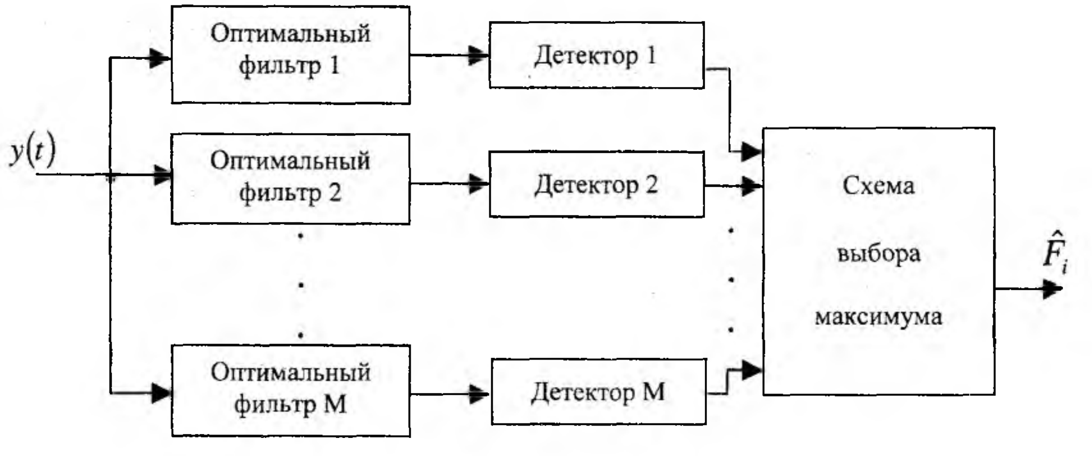

Рис. 1

Измеритель частоты пачки из N когерентных радиоимпульсов, следуемых с частотой повторения $F_п$, содержит $M \geq N$ взаимно расстроенных фильтров, полоса пропускания которых $\Delta F = F_п / N$ (по нулям $2F_п / N$). Их амплитудно-частотные характеристики изображены на рис.2.

Когда $M = N$, то взаимная расстройка соседних фильтров Δ равна ΔF, т.е. $\Delta = F_п / N$.

В многоканальных измерителях в качестве оценки максимального правдоподобия $\hat{F}$ принимают частоту настройки канала (фильтра), в котором сигнал достигает максимального значения. Таким образом, выдаваемые оценки могут принимать только дискретные значения $F_i = i \cdot \Delta \ \left(i = \overline{0,\ N-1}\right)$.

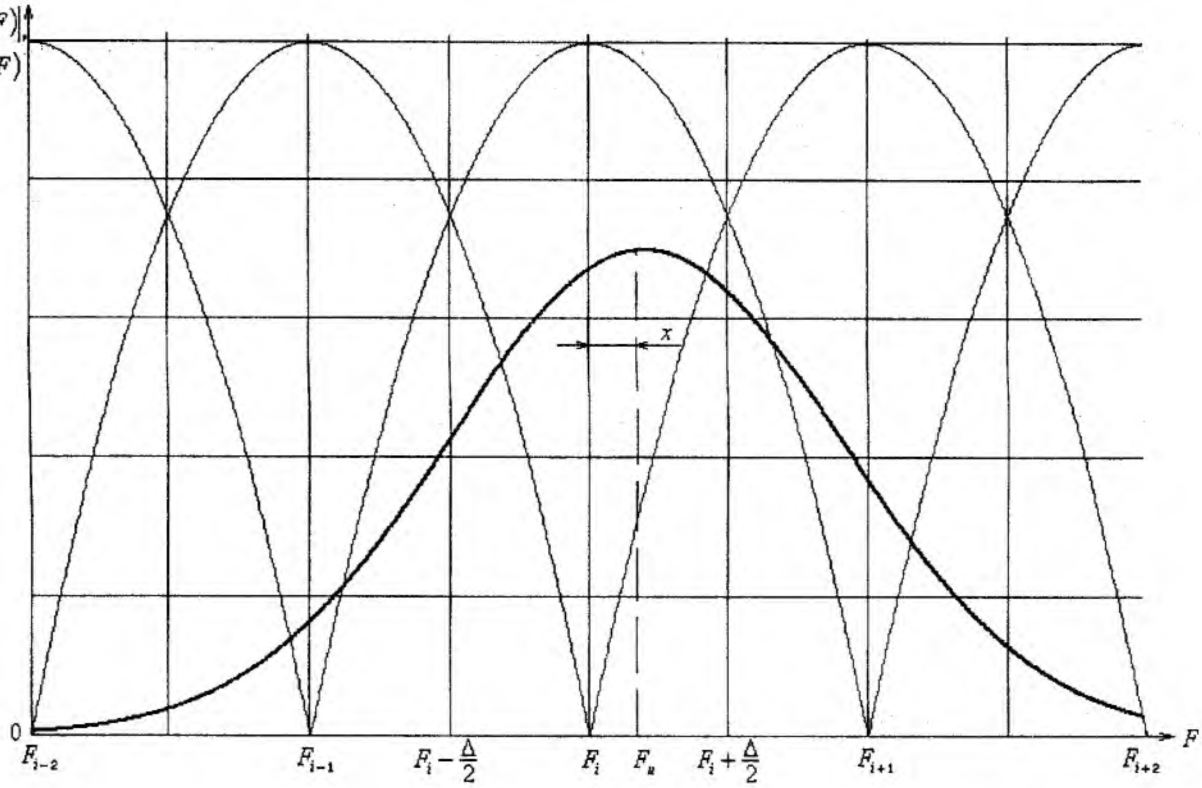

Рис. 2

В случае отсутствия шумов, выдаваемые оценки F_i отличаются от истинного значения F_u на величину $\delta_\partial = \hat{F}_i - F_u = \hat{F}_i - (F_i + x)$, которая может изменяться в интервале $\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$, что видно из рис. 3. Эта ошибка, обусловленная дискретностью съема, называется ошибкой дискретности.

Полагая, что расстояние x от F_u до ближайшего значения F_i распределено равномерно в интервале $\left(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right)$, т.е. $W(x) = \begin{cases} 1/\Delta \ \textit{при} \ -\Delta/2 < x < \Delta/2, \\ 0 \ \textit{при} \ x < -\Delta/2, \ x > \Delta/2, \end{cases}$ имеем $\overline{\delta}_\partial = \int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2} xW(x)dx = 0$, $\overline{\delta_\partial^2} = \sigma_\partial^2 = \int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x^2 W(x)dx = \frac{\Delta^2}{12}$.

В литературе слабо освещен вопрос о месте ошибок дискретности, как ими оперировать, давая характеристику точности измерителя в целом при наличии других составляющих ошибок. В частности, возникает вопрос о методике нахождения среднего квадрата ошибки $\sigma_\Sigma^2 = \left\langle \left(\hat{F}_i - F_u\right)^2 \right\rangle$ многоканального измерителя при наличии погрешностей, обусловленных шумами и другими факторами.

Рассмотрим задачу нахождения среднего квадрата ошибки $\sigma_\Sigma^2 = \left\langle \left(\hat{F}_i - F_u\right)^2 \right\rangle$ для случая наличия случайной ошибки δ_c. Пусть измеряемый параметр $F_u = F_i + x$ находится внутри интервала $\left(F_i - \frac{\Delta}{2}, F_i + \frac{\Delta}{2}\right)$, т.е. $F_i - \frac{\Delta}{2} < F_u < F_i + \frac{\Delta}{2}$ или $-\frac{\Delta}{2} < x < \frac{\Delta}{2}$ (рис. 2).

При наличии флуктуационной составляющей ошибки δ_c максимум смеси сигнала с шумом смещается на величину δ_c и его положение на оси измеряемого параметра составит

$F_u + \delta_c = F_i + x + \delta_c$. Так как нормальное распределение $W(\delta_c)$ симметрично относительно точки $F_u = F_i + x$, то $W(\delta_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2}}$,

где $\sigma^2 = \overline{\delta_c^2}$ – дисперсия случайной составляющей, распределенной по нормальному закону.

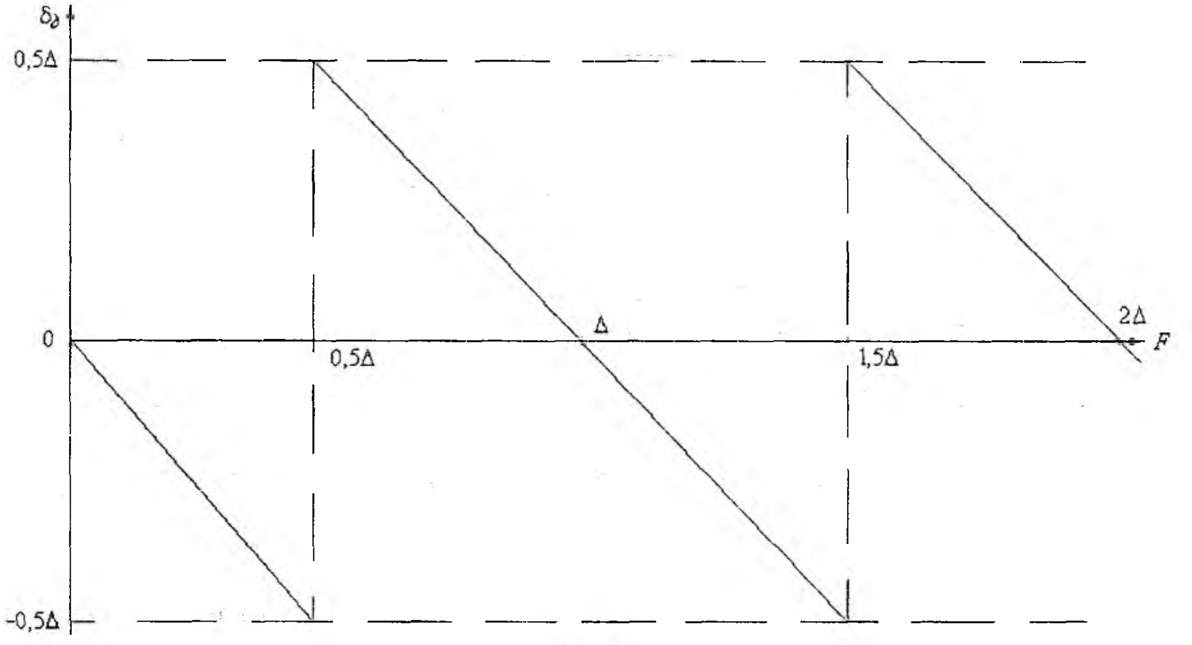

Рис. 3

В зависимости от величины $(x + \delta_c)$ выдаваемые оценки $\hat{F}$ будут: $\hat{F} = F_i$, если $F_i - \frac{\Delta}{2} < (F_i + x) + \delta_c < F_i + \frac{\Delta}{2}$ или $-\frac{\Delta}{2} < x + \delta_c < \frac{\Delta}{2}$, или $-0{,}5\Delta - x < \delta_c < 0{,}5\Delta - x$, что происходит при данном значении x с вероятностью:

$$P_0 = \int_{-0,5\Delta-x}^{0,5\Delta-x} W(\delta_c) d\delta_c = \int_{-0,5\Delta-x}^{0,5\Delta-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2}} d\delta_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{0,5\Delta-x}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{-0,5\Delta-x}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{0{,}5\Delta - x}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{0{,}5\Delta + x}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – табулированный интеграл вероятности. При написании выражения для P_0 учитывалось, что $\Phi(-\xi) = -\Phi(\xi)$;

$\hat{F} = F_i - \Delta$, если $-1{,}5\Delta - x < \delta_c < -0{,}5\Delta - x$ с $P_{-1} = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1{,}5\Delta + x}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{0{,}5\Delta + x}{\sigma}\right)$,

$\hat{F} = F_i + \Delta$, если $0{,}5\Delta - x < \delta_c < 1{,}5\Delta - x$ с $P_1 = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1{,}5\Delta - x}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{0{,}5\Delta - x}{\sigma}\right)$,

$\hat{F} = F_i - 2\Delta$, если $-2{,}5\Delta - x < \delta_c < -1{,}5\Delta - x$ с $P_{-2} = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{2{,}5\Delta + x}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1{,}5\Delta + x}{\sigma}\right)$;

$\hat{F} = F_i + 2\Delta$, если $1{,}5\Delta - x < \delta_c < 2{,}5\Delta - x$ с $P_2 = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{2{,}5\Delta - x}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1{,}5\Delta - x}{\sigma}\right)$;

$$\hat{F}=F_i-3\Delta \text{, если } -3{,}5\Delta-x<\delta_c<-2{,}5\Delta-x \text{ с } P_{-3}=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{3{,}5\Delta+x}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{2{,}5\Delta+x}{\sigma}\right);$$

$$\hat{F}=F_i+3\Delta \text{, если } 2{,}5\Delta-x<\delta_c<3{,}5\Delta-x \text{ с } P_{3}=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{3{,}5\Delta-x}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{2{,}5\Delta-x}{\sigma}\right).$$

Тогда выдаваемая оценка $\hat{F}$, усредненная по возможным значениям флуктуационной составляющей δ_c, смещена относительно истинного значения $F_u=F_i+x$ на величину

$$\delta(x)=\hat{F}-F_u=\hat{F}-(F_i+x),$$
$$\delta(x)=\{F_iP_0+(F_i-\Delta)P_{-1}+(F_i+\Delta)P_1+(F_i-2\Delta)P_{-2}+(F_i+2\Delta)P_2+\ldots\}-(F_i+x),$$
$$\delta(x)=F_i(P_0+P_{-1}+P_1+P_{-2}+P_2+\ldots)-\Delta[(P_{-1}-P_1)+2(P_{-2}-P_2)+\ldots]-(F_i+x),$$
$$\delta(x)=-x-\Delta[(P_{-1}-P_1)+2(P_{-2}-P_2)+\ldots].$$

Как и ожидалось, при $x=0$ $\delta(x)=\delta(0)=0$.

Ошибка $\delta(x)$, усредненная по возможным значениям x, равномерно распределенным в интервале $\left(-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right)$, $\overline{\delta(x)}=\delta=\int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2}\delta(x)W(x)dx=\frac{1}{\Delta}\int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2}\{-x+\Delta[(P_{-1}-P_1)+2(P_{-2}-P_2)+\ldots]\}dx=0$.

Это следует из того, что $\overline{x}=0$, а

$$\overline{P_{-1}}=\int\limits_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}P_{-1}(x)W(x)dx=\int\limits_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}\left[\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1{,}5\Delta+x}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{0{,}5\Delta+x}{\sigma}\right)\right]\frac{dx}{\Delta}=\frac{\sigma}{2\Delta}\int\limits_{\frac{\Delta}{\sigma}}^{\frac{2\Delta}{\sigma}}\Phi(t)dt-\frac{\sigma}{2\Delta}\int\limits_{0}^{\frac{\Delta}{\sigma}}\Phi(t)dt,$$

$$\overline{P_{1}}=\int\limits_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}P_{1}(x)W(x)dx=\int\limits_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}}\left[\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1{,}5\Delta-x}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{0{,}5\Delta-x}{\sigma}\right)\right]\frac{dx}{\Delta}=-\frac{\sigma}{2\Delta}\int\limits_{\frac{2\Delta}{\sigma}}^{\frac{\Delta}{\sigma}}\Phi(t)dt+\frac{\sigma}{2\Delta}\int\limits_{\frac{\Delta}{\sigma}}^{0}\Phi(t)dt=\overline{P_{-1}}.$$

Аналогично можно показать, что $\overline{P_{-2}}=\overline{P_2}$.

Найдем соотношение для квадрата ошибки $\delta^2(x)=\sigma_\Sigma^2(x)$. Ошибки при текущем измерении из-за различных значений флуктуационной составляющей δ_c могут оказаться равными $\hat{F}-F_u=F_i-(F_i+x)=-x$ с вероятностью P_0, $\hat{F}-F_u=(F_i-\Delta)-(F_i+x)=-\Delta-x$ с вероятностью P_{-1}, $\hat{F}-F_u=(F_i+\Delta)-(F_i+x)=\Delta-x$ с вероятностью P_1, $\hat{F}-F_u=(F_i-2\Delta)-(F_i+x)=-2\Delta-x$ с вероятностью P_{-2}, $\hat{F}-F_u=(F_i+2\Delta)-(F_i+x)=2\Delta-x$ с вероятностью P_2 и т.д. Тогда при $F_u=F_i+x$ средний квадрат ошибки

$$\sigma_\Sigma^2(x)=(-x)^2P_0+(-\Delta-x)^2P_{-1}+(\Delta-x)^2P_1+(-2\Delta-x)^2P_{-2}+(2\Delta-x)^2P_2+\ldots=$$
$$=x^2(P_0+P_{-1}+P_1+P_{-2}+P_2)+\Delta^2\left[(P_{-1}+P_1)+2^2(P_{-2}+P_2)+3^2(P_{-3}+P_3)+\ldots\right]+$$
$$+2\Delta x[(P_{-1}-P_1)+2(P_{-2}-P_2)+3(P_{-3}-P_3)+\ldots]=$$
$$=x^2+\Delta^2\left[(P_{-1}+P_1)+2^2(P_{-2}+P_2)+3^2(P_{-3}+P_3)+\ldots\right]+2\Delta x[(P_{-1}-P_1)+2(P_{-2}-P_2)+3(P_{-3}-P_3)+\ldots].$$

Представляет интерес значение квадрата ошибки $\delta^2(x)=\sigma_\Sigma^2(x)$, усредненное по возможным значениям x (отклонение истинной частоты сигнала от настройки ближайшего канала), равномерно распределенным в интервале $\left(-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right)$:

$$\overline{\delta^2(x)}=\overline{\sigma_\Sigma^2(x)}=\sigma_\Sigma^2=\int\limits_{-\Delta/2}^{\Delta/2}\sigma_\Sigma^2(x)W(x)dx;$$

$$\sigma_\Sigma^2 = \overline{x^2} + \Delta^2\left[\left(\overline{P_{-1}} + \overline{P_1}\right) + 2^2\left(\overline{P_{-2}} + \overline{P_2}\right) + 3^2\left(\overline{P_{-3}} + \overline{P_3}\right) + \ldots\right] + \\ + 2\Delta\left[\overline{x(P_{-1} - P_1)} + 2\overline{x(P_{-2} - P_2)} + 3\overline{x(P_{-3} - P_3)} + \ldots\right]. \qquad (3)$$

Величина σ_Σ^2 характеризует средний квадрат результирующей ошибки многоканального измерителя. Она учитывает как случайные ошибки, так и ошибки дискретности.

$$\overline{x(P_{-1} - P_1)} = \left\{\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{x}{2}\left[\Phi\left(\frac{1{,}5\Delta + x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}5\Delta + x}{\sigma}\right)\right]\frac{dx}{\Delta}\right\} - \left\{\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{x}{2}\left[\Phi\left(\frac{1{,}5\Delta - x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}5\Delta - x}{\sigma}\right)\right]\frac{dx}{\Delta}\right\},$$

$$\overline{x(P_{-1} - P_1)} = \frac{\sigma}{\Delta}\left[\int_0^{\frac{2\Delta}{\sigma}} \sigma t\Phi(t)dt - 2\int_0^{\frac{\Delta}{\sigma}} \sigma t\Phi(t)dt - 1{,}5\Delta\int_0^{\frac{2\Delta}{\sigma}} \Phi(t)dt + 2\Delta\int_0^{\frac{\Delta}{\sigma}} \Phi(t)dt\right]. \qquad (4)$$

$$\overline{x(P_{-2} - P_2)} = \frac{\sigma}{\Delta}\left[\int_0^{\frac{3\Delta}{\sigma}} \sigma t\Phi(t)dt - 2\int_0^{\frac{2\Delta}{\sigma}} \sigma t\Phi(t)dt + \int_0^{\frac{\Delta}{\sigma}} \sigma t\Phi(t)dt - 2{,}5\Delta\int_0^{\frac{3\Delta}{\sigma}} \Phi(t)dt + 4\Delta\int_0^{\frac{2\Delta}{\sigma}} \Phi(t)dt - 1{,}5\Delta\int_0^{\frac{\Delta}{\sigma}} \Phi(t)dt\right].$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^a \Phi(t)dt = a\Phi(a) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{a^2}{2}} - 1\right), \quad \int_0^a t\Phi(t)dt = \frac{\Phi(a)}{2}\left(a^2 - 1\right) + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (1), (2), (4), после громоздких вычислений можно получить

$$\sigma_\Sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12} + \sigma^2\{[-\Phi(2\Delta/\sigma) + 2\Phi(\Delta/\sigma)] + 2[-\Phi(3\Delta/\sigma) + 2\Phi(2\Delta/\sigma) - \Phi(\Delta/\sigma)] + \\ + 3[-\Phi(4\Delta/\sigma) + 2\Phi(3\Delta/\sigma) - \Phi(2\Delta/\sigma)] + \ldots\} = \frac{\Delta^2}{12} + \sigma^2 Q.$$

Обозначив $\Delta/\sigma = \gamma$, имеем

$$Q = \{[-\Phi(2\gamma) + 2\Phi(\gamma)] + 2[-\Phi(3\gamma) + 2\Phi(2\gamma) - \Phi(\gamma)] + \\ + 3[-\Phi(4\gamma) + 2\Phi(3\gamma) - \Phi(2\gamma)] + \ldots + N[-\Phi[(N+1)\gamma] + 2\Phi(N\gamma) - \Phi[(N-1)\gamma]] + \ldots\}. \qquad (6)$$

Нетрудно видеть, что Q приближается к 1 ($\Phi(3) = 0{,}9973$; $\Phi(4) = 0{,}99994$; $\Phi(4{,}42) = 0{,}99999$). При $\frac{\Delta^2}{12} = \sigma_\partial^2 = \sigma^2$ (то есть при $\frac{\Delta}{\sigma} \approx 3{,}5$) величина $Q = 2\Phi(\Delta/\sigma) - \Phi(2\Delta/\sigma) = 2\Phi(3{,}5) - \Phi(7) \cong 1$, так как все последующие слагаемые ($2[-\Phi(10{,}5) + 2\Phi(7) - \Phi(3{,}5)]$ и т.д.) практически равны нулю.

При $\Delta/\sigma < 1$ с учетом последующих слагаемых также $Q = 1$. Отсюда следует, что

$$\sigma_\Sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12} + \sigma^2 = \sigma_\partial^2 + \sigma^2. \qquad (7)$$

Как известно, дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий. Из анализа полученных результатов видно, что при любых соотношениях дисперсий флуктуационной и дискретной составляющих средний квадрат результирующей ошибки многоканального измерителя также оказался равным сумме квадратов дисперсий указанных составляющих.

Список литературы: 1. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992. 304 с.: ил.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 30.04.2002