

ПИРАМИДАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТКАХ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

Целью работы является решение задачи о рассеянии электромагнитных волн на специальных сложных пространственных решетках малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер, пространственное распределение которых подчинено пирамидальным числам – фигурным числам [1]. В этой задаче длина рассеиваемой волны может быть соизмерима с постоянными решетки, что позволяет учесть влияние решеточных структурных резонансов электромагнитного взаимодействия сфер на внутренние резонансы сфер решетки и их тонкую структуру, а также изучить особенности областей аномальной дисперсии решетки.

Постановка и решение задачи

Рассмотрим сложную пространственную решетку, состоящую из C подрешеток ($c \in C$). Эти подрешетки порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{c,s} &= [s - 0,5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1}x_{c,s=0} \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y_{c,t} &= [t - 0,5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1}y_{c,t=0} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_{c,p} &= [p - 0,5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1}z_{c,p=0} \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left\{ \frac{(|t|+1)(|t|+2)}{3!} [3 + (|s|+1)|t|] - 1 \right\}), \end{aligned} \quad (1)$$

где величины d, h, l определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h; z = 0, z = l$, а $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ – координаты узла, порождающего подрешетку c и находящегося внутри области (рис. 1)

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{c,s=0} \leq d, \\ 0 &\leq y_{c,t=0} \leq h, \\ 0 &\leq z_{c,p=0} \leq l. \end{aligned} \quad (2)$$

Координаты $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}$ – определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (2) и являются функциями координат $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$. В координатное представление (1) можно ввести зависимость от времени, если координаты $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ считать некоторыми функциями времени. Каждому узлу пространственной подрешетки c (1) сопоставляется упорядоченная тройка чисел $u = c(p, s, t)$, выделенный узел решетки будем обозначать $u' = c'(p', s', t')$, а узел внутри области (2) – $c(p = 0, s = 0, t = 0)$. Задавая максимальные значения для чисел (p, s, t) в (1), можно рассматривать конечные и бесконечные решетки.

Нужный тип элементарной ячейки решетки (примитивную, объемноцентрированную, гранецентрированную и другие) формируют из C узлов внутри области (2), которую повторит за пределами области (2) координатное представление (1) в виде пространственной решетки определенного вида.

На (рис. 1) представлено пространственное распределение узлов решетки, когда порождающий узел решетки находится в центре области (2), для случая: $p = 0, 1, 2, 3, 4; s, t = 0, \pm 1$.

Распределение узлов вдоль оси z подчинено таблице пирамидальных чисел (рис.2). Каждой тройке чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ ставится в соответствие определен-

ное число таблицы (рис. 2), например, точке $(p = 0, s = -3, t = -3)$ соответствует число 50, точке $(p = 0, s = -5, t = 4)$ – число 135, а точке $(p = 0, s = 4, t = 3)$ – число 60.

Эти числа и определяют число узлов вдоль оси z (1) для заданной точки $(p = 0, s, t)$ (рис. 2). Между тройкой чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ (1) и числом таблицы пирамидальных чисел существует связь, определяемая функцией

$$\frac{(|t|+1)(|t|+2)}{3!} [3 + (|s|+1)|t|].$$

Отсюда числа p , определяющие координаты узлов вдоль оси z (1), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left\{ \frac{(|t|+1)(|t|+2)}{3!} [3 + (|s|+1)|t|] - 1 \right\},$$

где $|s|, |t| = 0, 1, 2, 3, \dots$

Если изменять координаты узлов в области (2), то положения узлов вне области (2) будут также соответствующим образом смещаться и будет происходить перестройка ячеек и формирование пространственной конфигурации решетки.

Расстояние между узлами определим (1)

$$r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)} = \sqrt{(x_{c',s'} - x_{c,s})^2 + (y_{c',t'} - y_{c,t})^2 + (z_{c',p'} - z_{c,p})^2}. \quad (3)$$

Если в центре области (2) находится один порождающий узел решетки, то для случая, когда $(p, s = 0, t)$, из (1) получим плоскую решетку с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным трехсторонним пирамидальным числам $(1, 4, 10, 20, 35, 56, \dots)$ (рис. 3).

Если $(p, s = 1, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным четырехсторонним пирамидальным числам $(1, 5, 14, 30, 55, 91, \dots)$ (рис. 4).

Когда $(p, s = 2, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным пятисторонним пирамидальным числам $(1, 6, 18, 40, 75, 126, \dots)$ (рис. 5).

Если $(p = 0, s, t = 0)$, то имеем линейную решетку вдоль оси x .

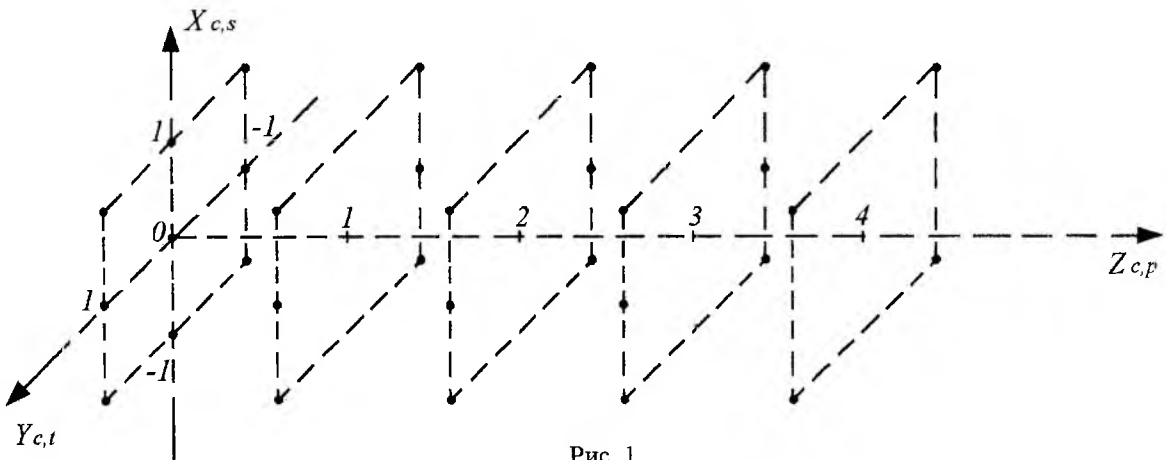


Рис. 1

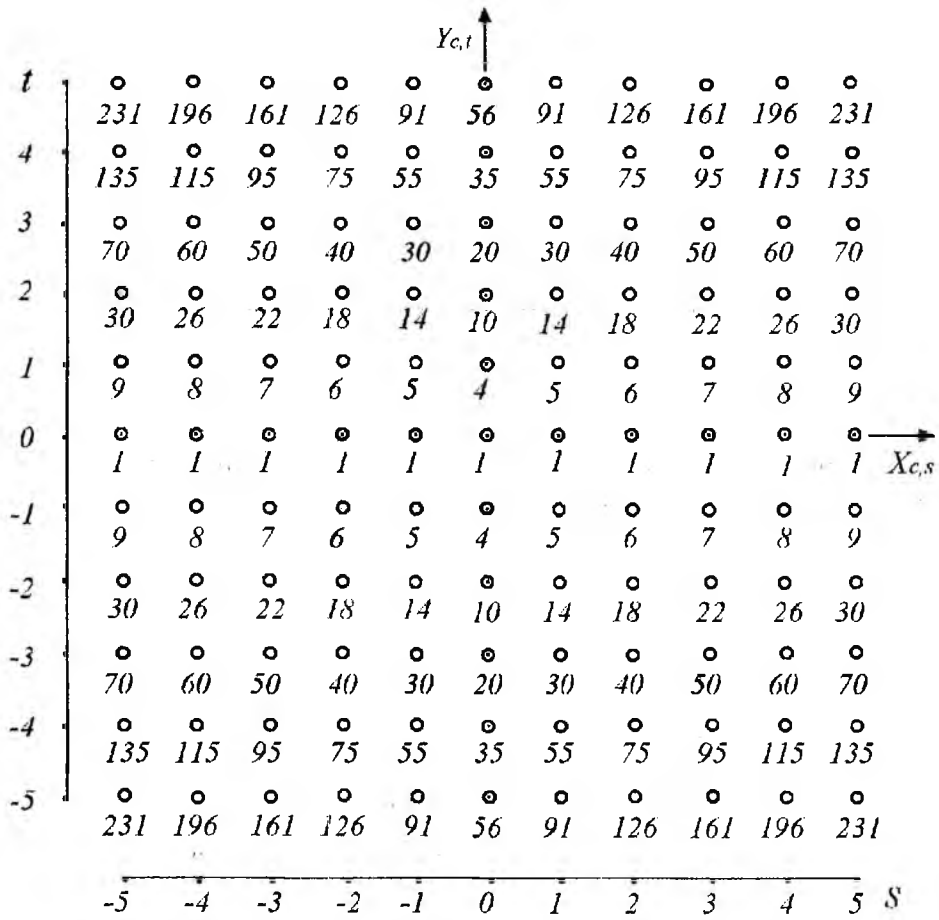


Рис. 2

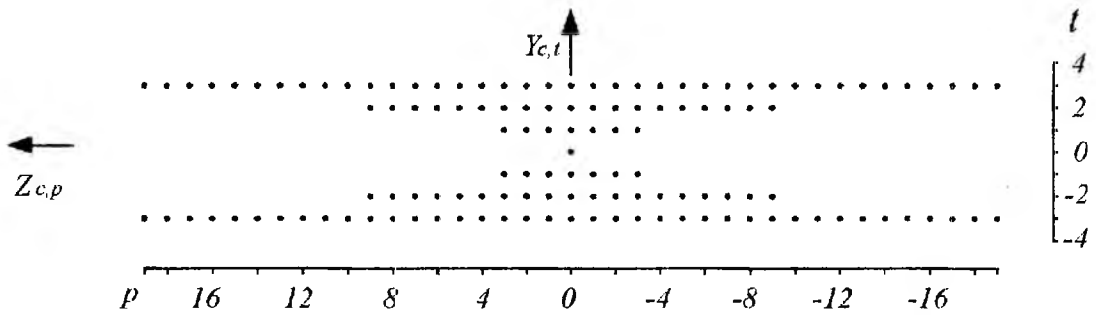


Рис. 3

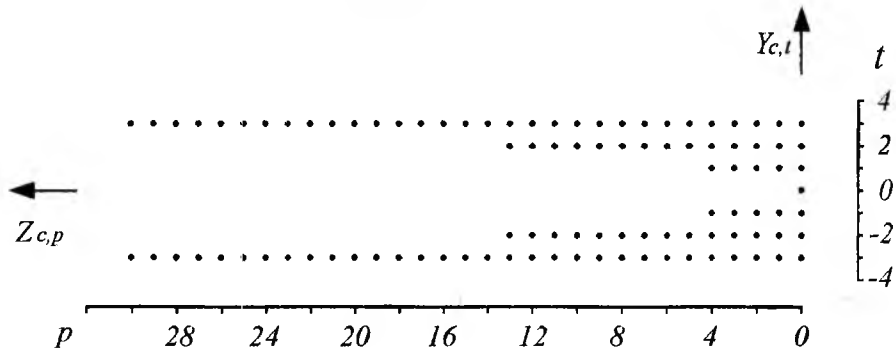


Рис. 4

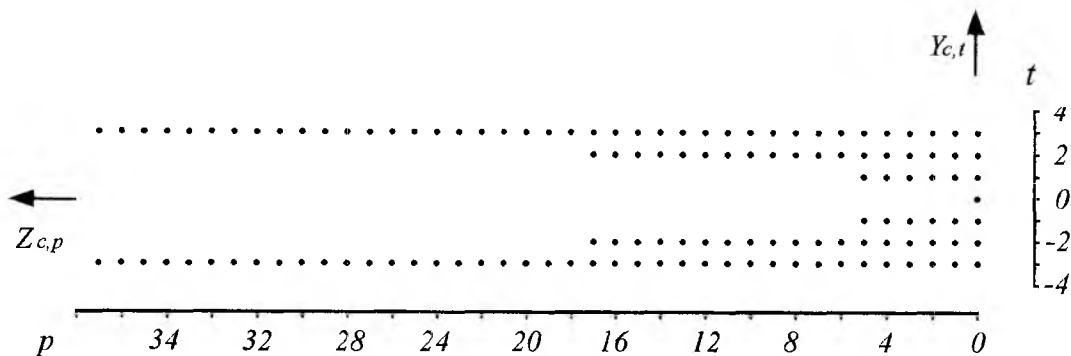


Рис. 5

Производя соответствующие сечения этого распределения узлов (1), можно получить различного вида плоские перестраиваемые решетки. Если в области (2) сформирована элементарная ячейка, то вместо одиночных узлов в решетках (рис.3,4,5) будут находиться уже ячейки из области (2).

В узлы подрешеток (1) помещаются центры сфер с проницаемостями $\epsilon_{c(p,s,t)}, \mu_{c(p,s,t)}$ и радиусами $a_{c(p,s,t)}$, далее будем обозначать – ϵ_c, μ_c, a_c . Сферы решетки находятся в свободном пространстве.

Будем считать, что вне сферы $a/\lambda \ll 1$, но внутри сферы возможен резонансный случай $a/\lambda_g \sim 1$, где λ – длина волны в свободном пространстве, а λ_g – длина волны в сфере [2].

Для решения задачи будем использовать интегральные уравнения [3] и решаем её в два этапа. На первом этапе найдем внутреннее поле рассеивающих сфер, а на втором этапе найдем поле, рассеянное пространственной решеткой сфер. Поля представим в виде $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}, \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$.

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^{\mathcal{E}}$ и магнитный $\vec{\Pi}^{\mathcal{M}}$ потенциалы Герца

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{расс}} &= (\nabla\nabla + k^2\epsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^{\mathcal{E}} - ik\mu_0[\nabla, \vec{\Pi}^{\mathcal{M}}], \\ \vec{H}_{\text{расс}} &= (\nabla\nabla + k^2\epsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^{\mathcal{M}} + ik\epsilon_0[\nabla, \vec{\Pi}^{\mathcal{E}}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Потенциалы Герца рассеянного поля имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}^{\mathcal{E}} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \vec{E}^0(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) dV, \\ \vec{\Pi}^{\mathcal{M}} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}^0(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) dV, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\vec{E}^0(\vec{r}'), \vec{H}^0(\vec{r}')$ – внутренние поля рассеивателя; V – объем рассеивателя; ϵ_0, μ_0 – проницаемости заполнения свободного пространства; функция $f(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ является решением уравнения

$$\Delta f(|\vec{r} - \vec{r}'|) + k^2\epsilon_0\mu_0 f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -4\pi\delta(|\vec{r} - \vec{r}'|),$$

удовлетворяющего условию излучения на бесконечности, и имеет вид

$$f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{e^{-ki\sqrt{\epsilon_0\mu_0}|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6)$$

Вычислим вначале внутреннее поле рассеивателей для случая, когда отношение $a/\lambda_g \ll 1$ внутри и $a/\lambda \ll 1$ вне сферы, а потом результаты вычислений обобщим и на резонансный случай, когда $a/\lambda_g \sim 1$ внутри сферы. Можно показать, что для внешних точек сферы ($r > r'$) интеграл по объему сферы от функции Грина для свободного пространства (6) имеет вид

$$W(\vec{r}) = \int_V \frac{e^{-ik\sqrt{\epsilon_0\mu_0}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \frac{e^{-ik_1 r}}{r}, \quad (7)$$

где $k_1 = k\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, $k = 2\pi/\lambda$, а r – определяет расстояние от центра до внешних точек сферы.

Внутреннее поле $c'(p', s', t')$ – сферы найдем из системы квазистационарных неоднородных уравнений, которые построим, опираясь на интегральные уравнения [3]. Входящие в эту систему неоднородные уравнения для произвольной выделенной сферы имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{E}_{0c'}(p', s', t')(\vec{r}', t) = & \left\{ \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\epsilon_{c'}}{\epsilon_0} - 1 \right) \right] \bar{E}_{c'}^0(p', s', t')(\vec{r}', t) - \right. \\ & - \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \epsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_{c'}}{\epsilon_0} - 1 \right) W_{c'(p, s, t)}^\vartheta(\vec{r}) \bar{E}_{c'(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) - \right. \\ & c'(p, s, t) \neq c'(p', s', t') \\ & \left. \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'(p, s, t)}^M(\vec{r}) \bar{H}_{c'(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right\} - \\ & - \sum_{c=1}^C \left\{ \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \epsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} - 1 \right) W_{c(p, s, t)}^\vartheta(\vec{r}) \bar{E}_{c(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) - \right. \right. \\ & (c \neq c') \\ & \left. \left. - ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_c}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p, s, t)}^M(\vec{r}) \bar{H}_{c(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{0c'}(p', s', t')(\vec{r}', t) = & \left\{ \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) \right] \bar{H}_{c'}^0(p', s', t')(\vec{r}', t) - \right. \\ & - \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \epsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'(p, s, t)}^M(\vec{r}) \bar{H}_{c'(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) + \right. \\ & c'(p, s, t) \neq c'(p', s', t') \\ & \left. \left. + ik\epsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_{c'}}{\epsilon_0} - 1 \right) W_{c'(p, s, t)}^\vartheta(\vec{r}) \bar{E}_{c'(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right\} - \\ & - \sum_{c=1}^C \left\{ \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \epsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_c}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p, s, t)}^M(\vec{r}) \bar{H}_{c(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) + \right. \right. \\ & (c \neq c') \\ & \left. \left. + ik\epsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} - 1 \right) W_{c(p, s, t)}^\vartheta(\vec{r}) \bar{E}_{c(p, s, t)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right\}, \end{aligned}$$

где $\vec{E}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$, $\vec{H}_{0c'(p',s',t')}(\vec{r}',t)$ и $\vec{E}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t)$, $\vec{H}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t)$ – поле падающей волны и внутреннее поле $c'(p',s',t')$ – сферы, а $\vec{E}_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)$, $\vec{H}_{c(p,s,t)}(\vec{r}',t)$ – внутренние поля остальных сфер.

Величины $W_{c(p,s,t)}^{\mathcal{E}}(\vec{r}')$, $W_{c(p,s,t)}^{\mathcal{M}}(\vec{r}')$ имеют вид (3,7,8)

$$W_{c(p,s,t)}^{\mathcal{E}}(\vec{r}') = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}},$$

$$W_{c(p,s,t)}^{\mathcal{M}}(\vec{r}') = -\frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}.$$

Первые слагаемые справа в уравнениях (8) связаны с внутренним полем $c'(p',s',t')$ – сферы без учета влияния всех остальных сфер, оставшиеся слагаемые учитывают влияние на $c'(p',s',t')$ – рассеиватель всех остальных сфер.

Уравнения (8) представляют систему $2N = 2 \sum_{c=1}^C N_c$ векторных неоднородных уравнений, где N – общее число сфер решетки, а N_c – число сфер подрешетки c . Решение этой системы уравнений для выделенной сферы имеет вид:

$$\vec{E}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{\mathcal{EM}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\hat{g}_u^{\mathcal{E}u'} \vec{E}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}',t) + \hat{\beta}_u^{\mathcal{E}u'} \vec{H}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}',t) \right] \right), \quad (9)$$

$$\vec{H}_{c'(p',s',t')}^0(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{\mathcal{EM}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\hat{\beta}_u^{\mathcal{M}u'} \vec{H}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}',t) + \hat{g}_u^{\mathcal{M}u'} \vec{E}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}',t) \right] \right),$$

$$\hat{g}_u^{\mathcal{E}u'} = \begin{bmatrix} g_{xxu}^{\mathcal{E}u'} & g_{xyu}^{\mathcal{E}u'} & g_{xzu}^{\mathcal{E}u'} \\ g_{yxu}^{\mathcal{E}u'} & g_{yyu}^{\mathcal{E}u'} & g_{yzu}^{\mathcal{E}u'} \\ g_{z xu}^{\mathcal{E}u'} & g_{zyu}^{\mathcal{E}u'} & g_{zzu}^{\mathcal{E}u'} \end{bmatrix}; \quad \hat{\beta}_u^{\mathcal{E}u'} = \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{\mathcal{E}u'} & \beta_{xyu}^{\mathcal{E}u'} & \beta_{xzu}^{\mathcal{E}u'} \\ \beta_{yxu}^{\mathcal{E}u'} & \beta_{yyu}^{\mathcal{E}u'} & \beta_{yzu}^{\mathcal{E}u'} \\ \beta_{z xu}^{\mathcal{E}u'} & \beta_{zyu}^{\mathcal{E}u'} & \beta_{zzu}^{\mathcal{E}u'} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\beta}_u^{\mathcal{M}u'} = \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{\mathcal{M}u'} & \beta_{xyu}^{\mathcal{M}u'} & \beta_{xzu}^{\mathcal{M}u'} \\ \beta_{yxu}^{\mathcal{M}u'} & \beta_{yyu}^{\mathcal{M}u'} & \beta_{yzu}^{\mathcal{M}u'} \\ \beta_{z xu}^{\mathcal{M}u'} & \beta_{zyu}^{\mathcal{M}u'} & \beta_{zzu}^{\mathcal{M}u'} \end{bmatrix}; \quad \hat{g}_u^{\mathcal{M}u'} = \begin{bmatrix} g_{xxu}^{\mathcal{M}u'} & g_{xyu}^{\mathcal{M}u'} & g_{xzu}^{\mathcal{M}u'} \\ g_{yxu}^{\mathcal{M}u'} & g_{yyu}^{\mathcal{M}u'} & g_{yzu}^{\mathcal{M}u'} \\ g_{z xu}^{\mathcal{M}u'} & g_{zyu}^{\mathcal{M}u'} & g_{zzu}^{\mathcal{M}u'} \end{bmatrix},$$

$\Delta^{\mathcal{EM}}$ – детерминант основной матрицы системы уравнений (8).

Компоненты внутреннего поля сферы (9) представим в виде:

$$E_{xu}^0(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{\mathcal{EM}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[g_{xxu}^{\mathcal{E}u'} \vec{E}_{0xu}(\vec{r}',t) + g_{xyu}^{\mathcal{E}u'} E_{0yu}(\vec{r}',t) + g_{xzu}^{\mathcal{E}u'} E_{0zu}(\vec{r}',t) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \beta_{xxu}^{\mathcal{E}u'} H_{0xu}(\vec{r}',t) + \beta_{xyu}^{\mathcal{E}u'} H_{0yu}(\vec{r}',t) + \beta_{xzu}^{\mathcal{E}u'} H_{0zu}(\vec{r}',t) \right] \right),$$

$$E_{yu}^0(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{\mathcal{EM}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[g_{yxu}^{\mathcal{E}u'} \vec{E}_{0xu}(\vec{r}',t) + g_{yyu}^{\mathcal{E}u'} E_{0yu}(\vec{r}',t) + g_{yzu}^{\mathcal{E}u'} E_{0zu}(\vec{r}',t) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \beta_{yxu}^{\mathcal{E}u'} H_{0xu}(\vec{r}',t) + \beta_{yyu}^{\mathcal{E}u'} H_{0yu}(\vec{r}',t) + \beta_{yzu}^{\mathcal{E}u'} H_{0zu}(\vec{r}',t) \right] \right),$$

$$\begin{aligned}
E_{zu}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[g_{z xu}^{\text{эу}'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{zyu}^{\text{эу}'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{zzu}^{\text{эу}'} E_{0zu}(\vec{r}', t) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta_{z xu}^{\text{эу}'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{zyu}^{\text{эу}'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{zzu}^{\text{эу}'} H_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right), \\
H_{xu}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\beta_{xxu}^{\text{му}'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{xyu}^{\text{му}'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{xzu}^{\text{му}'} H_{0zu}(\vec{r}', t) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g_{xxu}^{\text{му}'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{xyu}^{\text{му}'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{xzu}^{\text{му}'} E_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right), \\
H_{yu}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\beta_{yxu}^{\text{му}'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{yyu}^{\text{му}'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{yzu}^{\text{му}'} H_{0zu}(\vec{r}', t) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g_{yxu}^{\text{му}'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{yyu}^{\text{му}'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{yzu}^{\text{му}'} E_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right), \\
H_{zu}^0(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\beta_{z xu}^{\text{му}'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{zyu}^{\text{му}'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{zzu}^{\text{му}'} H_{0zu}(\vec{r}', t) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g_{z xu}^{\text{му}'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{zyu}^{\text{му}'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{zzu}^{\text{му}'} E_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right).
\end{aligned}$$

Полученные решения (9) справедливы, когда $a_c/\lambda \ll 1$ снаружи и $a_c/\lambda_g \ll 1$ внутри сферы. Но их можно обобщить на резонансный случай $a_c/\lambda_g \sim 1$, если вместо проницаемостей ϵ_c и μ_c сферы ввести эффективные проницаемости [4, 2]

$$\begin{aligned}
\epsilon_{c\text{эф}} &= \epsilon_c F(ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}), \\
\mu_{c\text{эф}} &= \mu_c F(ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}),
\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$F(ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}) = \frac{2(\sin ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} - ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} \cos ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c})}{(k^2 a_c^2 \epsilon_c \mu_c - 1) \sin ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} + ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} \cos ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}}.$$

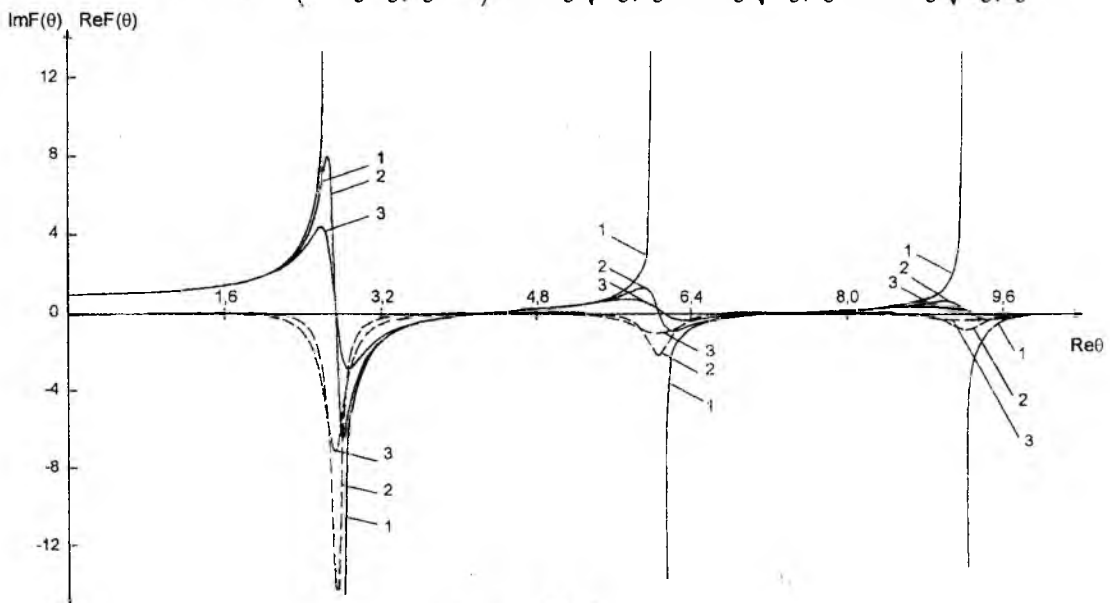


Рис. 6

На рис. 6 представлены особенности поведения $\operatorname{Re} F(\theta)$ (сплошная кривая) и $\operatorname{Im} F(\theta)$ (пунктирная кривая) в зависимости от $\operatorname{Re} \theta$ при разных значениях тангенса угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg} \delta_\epsilon$ (1 – $\operatorname{tg} \delta_\epsilon = 0$; 2 – $\operatorname{tg} \delta_\epsilon = 0,05$; 3 – $\operatorname{tg} \delta_\epsilon = 0,1$) и $\mu_c = 1$, здесь $\theta = ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}$.

Если электромагнитным взаимодействием между сферами решетки пренебречь, то обобщенные выражения для внутреннего поля произвольной сферы решетки (9) будут иметь вид (10)

$$\begin{aligned} \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}',t) &= \frac{3\epsilon_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\epsilon_{c3\phi} + 2\epsilon_0) + \theta_{1c}^2 \epsilon_{c3\phi} + i\theta_{1c}(\epsilon_{c3\phi} + 2\epsilon_0)} \bar{E}_{0c(p,s,t)}(\bar{r}',t), \\ \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}',t) &= \frac{3\mu_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\mu_{c3\phi} + 2\mu_0) + \theta_{1c}^2 \mu_{c3\phi} + i\theta_{1c}(\mu_{c3\phi} + 2\mu_0)} \bar{H}_{0c(p,s,t)}(\bar{r}',t), \end{aligned} \quad (10a)$$

где $\theta_{1c}^2 = k^2 a_c^2 \epsilon_0 \mu_0$.

На рис. 7 представлены кривые для модуля $|\eta^3|$ и аргумента φ^3 выражения для внутреннего электрического поля (10a) диэлектрической сферы ($\mu_c = 1$) от длины падающей волны λ в области первых трех внутренних резонансов электрического типа для случая, когда $a_c = 0,15$ см; $\epsilon_c = 100$; $\operatorname{tg} \delta_\epsilon = 0$; $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$.

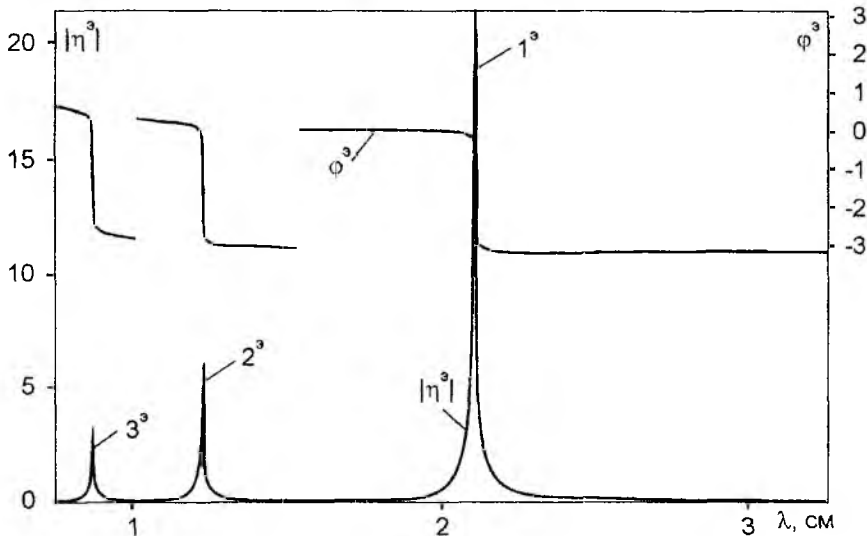


Рис. 7

Потенциалы Герца (5) рассеянного сферами решетки поля можно представить, учитывая (9) и (10), в виде суперпозиции потенциалов Герца отдельных сфер решетки

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^3(\bar{r},t) &= \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\epsilon_{c3\phi}}{\epsilon_0} - 1 \right) \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}',t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right], \\ \bar{\Pi}^M(\bar{r},t) &= - \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\mu_{c3\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}',t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $r_{c(p,s,t)} = \sqrt{(x - x_{c,s})^2 + (y - y_{c,t})^2 + (z - z_{c,p})^2}$,

где координаты (x, y, z) – точка наблюдения рассеянного поля вне сфер решетки, координаты $(x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p})$ – точка нахождения центра рассеивающей сферы решетки (1). Тогда, учитывая (10), (11), из (4) найдем искомое рассеянное сферами решетки поле

$$\begin{aligned} \vec{E}_{pacc} &= \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\epsilon_{c3\phi}}{\epsilon_0} - 1 \right) \hat{L}_c \vec{E}_c^0(p,s,t)(\vec{r}') - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{c3\phi}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{P}_c \vec{H}_c^0(p,s,t)(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_c(p,s,t))} \right], \\ \vec{H}_{pacc} &= \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\mu_{c3\phi}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{L}_c \vec{H}_c^0(p,s,t)(\vec{r}') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + ik\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_{c3\phi}}{\epsilon_0} - 1 \right) \hat{P}_c \vec{E}_c^0(p,s,t)(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_c(p,s,t))} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где \hat{L}_c и \hat{P}_c – функциональные матрицы вида:

$$\hat{L}_c = \begin{bmatrix} \Psi_{xxc} & \Psi_{xyc} & \Psi_{zxc} \\ \Psi_{yxc} & \Psi_{yyc} & \Psi_{zyc} \\ \Psi_{zxc} & \Psi_{zyc} & \Psi_{zcc} \end{bmatrix}; \quad \hat{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_{zc} & \Psi_{yc}^0 \\ \Psi_{zc}^0 & 0 & \Psi_{xc} \\ \Psi_{yc} & \Psi_{xc}^0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (12), имеют вид (1):

$$\begin{aligned} \Psi_{xxc} &= \frac{1}{r_c(p,s,t)} k^2 \epsilon_0 \mu_0 + \frac{3(x-x_{c,s})^2 - r_c^2(p,s,t)}{r_c^5(p,s,t)} - \frac{k_1^2 (x-x_{c,s})^2}{r_c^3(p,s,t)} + ik_1 \frac{3(x-x_{c,s})^2 - r_c^2(p,s,t)}{r_c^4(p,s,t)}, \\ \Psi_{yyc} &= \frac{1}{r_c(p,s,t)} k^2 \epsilon_0 \mu_0 + \frac{3(y-y_{c,t})^2 - r_c^2(p,s,t)}{r_c^5(p,s,t)} - \frac{k_1^2 (y-y_{c,t})^2}{r_c^3(p,s,t)} + ik_1 \frac{3(y-y_{c,t})^2 - r_c^2(p,s,t)}{r_c^4(p,s,t)}, \\ \Psi_{zcc} &= \frac{1}{r_c(p,s,t)} k^2 \epsilon_0 \mu_0 + \frac{3(z-z_{c,p})^2 - r_c^2(p,s,t)}{r_c^5(p,s,t)} - \frac{k_1^2 (z-z_{c,p})^2}{r_c^3(p,s,t)} + ik_1 \frac{3(z-z_{c,p})^2 - r_c^2(p,s,t)}{r_c^4(p,s,t)}, \\ \Psi_{xyc} = \Psi_{yxc} &= \frac{3(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r_c^5(p,s,t)} - k_1^2 \frac{(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r_c^3(p,s,t)} + ik_1 \frac{3(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r_c^4(p,s,t)}, \\ \Psi_{zxc} = \Psi_{zcx} &= \frac{3(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r_c^5(p,s,t)} - k_1^2 \frac{(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r_c^3(p,s,t)} + ik_1 \frac{3(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r_c^4(p,s,t)}, \\ \Psi_{xyc} = \Psi_{zyc} &= \frac{3(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r_c^5(p,s,t)} - k_1^2 \frac{(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r_c^3(p,s,t)} + ik_1 \frac{3(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r_c^4(p,s,t)}, \\ \Psi_{xc} &= \frac{(x-x_{c,s})}{r_c^3(p,s,t)} + ik_1 \frac{(x-x_{c,s})}{r_c^2(p,s,t)}, & \Psi_{xc}^0 &= -\Psi_{xc}, \\ \Psi_{yc} &= \frac{(y-y_{c,t})}{r_c^3(p,s,t)} + ik_1 \frac{(y-y_{c,t})}{r_c^2(p,s,t)}, & \Psi_{yc}^0 &= -\Psi_{yc}, \\ \Psi_{zc} &= \frac{(z-z_{c,p})}{r_c^3(p,s,t)} + ik_1 \frac{(z-z_{c,p})}{r_c^2(p,s,t)}, & \Psi_{zc}^0 &= -\Psi_{zc}. \end{aligned}$$

Поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер, представим в виде (12)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, t),$$

где $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$ – невозмущенное поле падающей волны.

Из детерминанта системы уравнений (8) определяются резонансные условия. Когда проницаемости ϵ_c , μ_c сфер решетки действительны и $a_c/\lambda_g \sim 1$, эти условия находятся из выражения

$$\det \text{Re} \|\alpha_{sj}\| = 0, \quad (13)$$

где $\|\alpha_{sj}\|$ – основная матрица системы уравнений (8).

Разрешая условие (13) относительно функции $F(ka_c\sqrt{\epsilon_c\mu_c})$ (10), рис. 6, для случая, когда электромагнитным взаимодействием между сферами можно пренебречь, резонансное условие для первого низшего внутреннего электрического резонанса диэлектрической сферы при $\epsilon_c=100$, $\mu_c=1$ представим как

$$4,449 = \frac{2\pi a_c \sqrt{\epsilon_c}}{\lambda} + \frac{2\epsilon_0}{\epsilon_c} \left[\frac{1 + \theta_{1c}^2}{1 + 2\theta_{1c}^2} - 1 \right] \frac{1}{5,156},$$

где $\theta_{1c}^2 = k^2 a_c^2 \epsilon_0 \mu_0$, рис. 7 [5].

Заключение

В рассмотренной задаче получены выражения для внутренних и рассеянных полей решетки магнитодиэлектрических сфер, которые справедливы, когда $a_c/\lambda \ll 1$ вне сфер и $\theta_c = ka_c\sqrt{\epsilon_c\mu_c}$ внутри сфер может принимать произвольные значения, в том числе и резонансные. Данное решение может быть полезно для разработки устройств по управлению полем излучения электромагнитных излучателей и создания анизотропных композиционных материалов с сильной дисперсией, используя области аномальной дисперсии решеток.

Эта работа входит в серию статей [7, 8, 9], в которых впервые рассмотрено рассеяние волн на пространственных решетках сфер, анизотропная топологическая структура которых задается с помощью различных структур чисел.

Список литературы: 1. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.Л.: ОГИЗ. 1948. С. 248 – 251. 2. Козарь А.И., Хижняк Н.А. Отражение электромагнитных волн от резонансной диэлектрической сферы в волноводе // Укр. физ. журн. 1970. Т. 15. С. 847 – 849 3. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев.: Наукова думка. 1986. С. 279. 4. Левин Л. Современная теория волноводов. М.: Изд-во иностр. лит. 1954. С. 216. 5. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн в волноводе с однородными магнитодиэлектрическими сферами // Радиопизика и электроника. Харьков: Ин-т радиопизики и электроники НАН Украины. 2002. 7. Спец. выпуск. С. 183 – 189. 6. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн на сложных пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 124. С. 24 – 35. 7. Козарь А.И. Треугольник чисел Паскаля и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 127. С. 67 – 76. 8. Козарь А.И. Полигональные числа и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2003. Вып. 129. С. 5 – 13. 9. Козарь А.И. Числа Ферма (Тартальи) и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2003. Вып. 131. С. 60 – 70.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 16.02.2003