

И. А. ВЯЗЬМИТИНОВ, С. С. ВЯЗЬМИТИНОВА, В. А. РЕЗУНЕНКО

**ДВА КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТА
В СИММЕТРИЧНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

Пусть два концентрических бесконечно тонких идеально проводящих сферических сегмента, имеющих потенциалы Φ_1 и Φ_2 , находятся в аксиально симметричном электростатическом поле, которое описывается потенциалом Φ_0 . Введем декартову и сферическую системы координат, начала которых совместим с центром сферических сегментов, а ось Oz сориентируем в направлении оси симметрии структуры. В сферической системе координат радиусы внутреннего и внешнего сегментов зададим величинами a_1 и a_2 ($a_1 < a_2$), а углы среза плоскостями, параллельными xOy , — θ_1 и θ_2 . Предполагая, что источник, поле которого описывается потенциалом Φ_0 , находится на оси симметрии структуры на расстоянии r_0 от начала координат, запишем

$$\Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n P_n(\cos \theta) \begin{cases} \frac{1}{r_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n M_n, & r < r_0; \\ \frac{1}{r} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n M_n^{(1)}, & r > r_0, \end{cases} \quad (1)$$

где I_n , M_n , $M_n^{(1)}$ — известные величины.

Требуется найти распределение потенциала источника (1) в присутствии исследуемой структуры.

Для решения применим метод интегрального преобразования Абеля [1] — один из вариантов метода частичного обращения оператора задачи [2; 3]. Разделим пространство на три частичных области, в каждой из которых отыскиваемые потенциалы представим в виде рядов

$$\Phi_{a_1}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} r^n P_n(\cos \theta), \quad r < a_1; \quad (2)$$

$$\Phi_{a_1}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad a_1 < r < a_2; \quad (3)$$

$$\Phi_{a_2}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} r^n P_n(\cos \theta), \quad a_1 < r < a_2; \quad (4)$$

$$\Phi_{a_2}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad r > a_2, \quad (5)$$

коэффициенты которых принадлежат гильбертовым пространствам $l_2^{(i)}$ (i равно 2, 3, 4, 5), определяемым условием конечности интеграла энергии в любой ограниченной области пространства, не содержащей источников поля [4].

Рассмотрим случай размещения источника внутри малого сегмента ($r_0 < a_1$). Из граничных условий находим связь между коэффициентами разложений потенциалов (1)–(5):

$$\bar{Y}_n + a_n^{(1)} a_1^{(n)} = a_n^{(2)} a_1^{-n-1} + b_n^{(1)} a_1^n, \quad a_n^{(2)} a_n^{-n-1} + b_n^{(1)} a_2^n = b_n^{(2)} a_2^{-n-1}, \quad (6)$$

где $\bar{Y}_n = a_1^{-1} (r_0/a_1)^n Y_n M_n^{(1)}$, n равно 0, 1, 2, ..., и устанавливаем связанные парные сумматорные системы функциональных уравнений первого рода с ядром в виде полиномов Лежандра

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n^{(1)} a_1^n + \bar{Y}_n\} P_n(\cos \theta) = \varphi_1, \quad \theta_1 < \theta \leq \pi;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -(n+1) \frac{1}{a_1} \bar{Y}_n + n a_n^{(1)} a_1^{n-1} + (n+1) a_n^{(2)} a_1^{-n-2} - \right.$$

$$\left. - n b_n^{(1)} a_1^{n-1} \right\} P_n(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_1; \quad (7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} a_2^{-n-1} P_n(\cos \theta) = \varphi_2, \quad \theta_2 < \theta \leq \pi;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -(n+1) a_n^{(2)} a_2^{-n-1} + b_n^{(1)} a_2^{n-1} n + \right.$$

$$\left. + (n+1) b_n^{(2)} a_2^{-n-2} \right\} P_n(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_2. \quad (8)$$

Из них в дальнейшем будем определять неизвестные коэффициенты рядов (2)–(5).

Системы (7), (8) имеют неограниченные в $l_2^{(i)}$ операторы. Поэтому классические схемы отыскания решений, применяемые к ограниченным операторам в конечномерных пространствах, здесь непригодны. Регуляризуем системы, используя алгоритм полного обращения оператора электростатической задачи, соответствующей одному сферическому сегменту. Для системы (7) такая структура — сегмент радиуса a_1 , а для системы (8) — сегмент радиуса a_2 .

На первом шаге регуляризации оператора задачи обратим вспомогательные интегральные операторы типа Абеля. Для этого в (7), (8) исключим коэффициенты $a_n^{(2)}$, $b_n^{(1)}$ с помощью (6) и введем обозначения:

$$A_n = a_n^{(1)} a_1^n, \quad B_n = b_n^{(2)} a_2^{-n-1}; \quad \varepsilon_n^{(1)} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2n+1} \left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2n+1}\right]^{-1};$$

$$\varepsilon_n^{(2)} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2n+1}\right]^{-1}, \quad n \text{ равно } 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $\varepsilon_n^{(1)} = O((a_1/a_2)^{2n+1})$, $\varepsilon_n^{(2)} = O((a_1/a_2)^n)$ при $n \rightarrow \infty$. Подставив (9) в (7), (8) и воспользовавшись связью

$$(2n+1) P_n(x) = P'_{n-1}(x) - P'_{n+1}(x)$$

(штрих обозначает дифференцирование по аргументу), проинтегрируем по θ в (7), (8) уравнения, заданные на интервалах $0 \leq \theta <$

$\leq \theta_1$ и $0 \leq \theta < \theta_2$. Поскольку коэффициенты A_n, B_n принадлежат одному и тому же гильбертовому пространству l_2 и полиномы $P_n(\cos \theta)$ при $\theta = 0$ и $n \neq 0$ равны нулю, константы, возникающие при интегрировании, равны нулю.

Воспользовавшись интегральными представлениями Мелера—Дирихле [5] для полиномов Лежандра, сведем сумматорные уравнения к однородным интегральным уравнениям типа Абеля, имеющим единственное тривиальное решение [6]. Обратив эти уравнения, установив эквивалентные исходным сумматорные функциональные уравнения, но уже с ядром в виде элементарных функций, ортогональных на интервале $[0, \pi]$. Воспользовавшись этим, а также принадлежностью коэффициентов A_n, B_n разложений гильбертовому пространству l_2 , полуобратим сумматорные функциональные уравнения. В результате установим эквивалентные (7), (8) связанные системы линейных алгебраических уравнений второго рода (СЛАУ-II):

$$A_n + \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \varepsilon_m^{(1)} - B_m \varepsilon_m^{(2)}) \alpha_{nm}(\theta_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{H}_m \varepsilon_m^{(1)} - \delta_{nm} + 1) \alpha_{nm}(\theta_1) + \varphi_1 [\delta_{n0} - \alpha_{n0}(\theta_1)]; \quad (10)$$

$$B_n + \sum_{m=0}^{\infty} (B_m \varepsilon_m^{(1)} - A_m \varepsilon_m^{(2)} \frac{a_1}{a_2}) \alpha_{nm}(\theta_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{H}_m \varepsilon_m^{(2)} \frac{a_1}{a_2} \alpha_{nm}(\theta_2) + \varphi_2 [\delta_{n0} - \alpha_{n0}(\theta_2)], \quad (11)$$

где $\alpha_{nm}(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m+1)x}{n+m+1} \right], n \neq m;$

$$\alpha_{nn}(x) = \frac{1}{\pi} \left[x - \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \right], n = m$$

(δ_{nm} — символ Кронекера; n, m равно 0, 1, 2 ...).

При размещении источника в областях $a_1 < r < a_2$ или $r > a_2$ решение задачи проводится аналогично и получающиеся при этом СЛАУ-II, с точностью до линейных замен, имеют вид (10), (11). Таким образом, независимо от места расположения источника, к полученным СЛАУ-II могут быть применены единообразные методы решения, например, метод редукции или метод последовательных приближений.

Важное достоинство установленных систем, характерное для метода интегрального преобразования Абеля в целом, исключительная простота матричных элементов, вычисление которых сводится к вычислению элементарных функций.

Используя асимптотические $n \rightarrow \infty$ оценки параметров малости $\varepsilon_n^{(1)}, \varepsilon_n^{(2)}$, нетрудно показать, что матричные операторы систем вполне непрерывны в соответствующих гильбертовых пространствах $l_2^{(t)}$. Это служит доказательством существования и единственности решений этих систем, а также обоснованием применимости к решению систем метода редукции в широком диапазоне изменения параметров задачи.

Приведенное решение электростатической задачи относится к случаю некоторого обобщенного источника, расположенного на оси симметрии структуры и создающего аксиально симметричное электростатическое поле. Примером конкретной реализации такого источника может служить электростатический диполь, расположенный на оси Oz , момент которого ориентирован вдоль последней, либо заряженная круговая петля, ось симметрии которой совпадает с осью Oz .

В первом случае коэффициенты разложения потенциала поля источника в ряд Фурье имеют вид

$$I_n = F(n) \frac{|\vec{P}|}{4\pi}, M_n^{(1)} = n, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$\text{во втором} — I_n = F(n) \frac{Q}{4\pi} P_n(\cos \alpha_0), M_n^{(1)} = 1, n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

(в обоих случаях предполагаем, что источник находится на Oz в области $r < a_1$). Здесь \vec{P} — дипольный момент; Q — полный заряд петли; α_0 — полярный угол, характеризующий угловой размер петли в сферической системе координат; $F(n) = 1$, если источник расположен выше начала координат, $F(n) = (-1)^{n+1}$ — источник ниже начала координат.

Рассмотрим вопрос об экранирующих свойствах исследуемой структуры для двух, указанных источников.

Пусть источник (электростатический диполь или заряженная круговая петля) находится внутри малого сегмента ($r_0 < a_1$) и выполняются условия: $a_1 \ll a_2$; $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0 < 60^\circ$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (14) означающие, что структура представляет собой два заземленных концентрических сегмента с одинаковыми углами раскрытия и сильно отличающимися радиусами. Воспользовавшись быстрой сходимостью метода редукции применительно к СЛАУ-II (10), (11) и решив связанную систему второго рода относительно коэффициентов A_0, B_0 , найдем, что, с точностью до величин порядка a_1/a_2 и θ_0^2 , в случае диполя $A_0 = B_0 = 0$, а в случае круговой заряженной петли

$$A_0 = B_0 = \frac{\theta}{4\pi^2 a_2} \frac{\theta_0 - \sin \theta_0}{1 + 2 \frac{a_1}{a_2} (\theta_0 - \sin \theta_0)}.$$

Отсюда следует, что при выполнении условий (14) поле электростатического диполя экранируется исследуемой структурой лучше, чем поле заряженной петли. В последнем случае полная экранировка наблюдается только при $\theta_0 = 0$.

Список литературы: 1. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. К., 1983. 252 с. 2. Дифракция волн на решетках / В. П. Шестопалов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб. Х., 1973. 288 с. 3. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. К., 1984. 293 с. 4. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М., 1954. 604 с. 5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Вышие трансцендентные функции. М., 1974. Т. II. 295 с. 6. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., 1960. 299 с.

Поступила в редколлегию 01.12.87