

УДК 519.854.2



И.В. Гребенник¹, А.С. Литвиненко², О.С. Титова³

¹ ХНУРЕ, м. Харків, Україна, grebennik@onet.com.ua;

² ХНУРЕ, м. Харків, Україна, litvinenko1706@gmail.com

³ ХНУРЕ, м. Харків, Україна, titovaolga90@gmail.com

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПЕРЕСТАНОВОК

Рассмотрена задача оптимизации линейной функции на множестве циклических перестановок. Исследованы некоторые свойства задачи, доказаны соответствующие теоремы. Предложены алгоритм нахождения точного решения задачи в классе методов ветвей и границ и эвристический алгоритм решения задачи. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

КОМБИНАТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, МНОЖЕСТВО ЦИКЛИЧЕСКИХ ПЕРЕСТАНОВОК, ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ, МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Введение

Математические модели многих научных и прикладных задач проектирования, планирования, размещения, управления могут быть адекватно представлены на основе различных моделей комбинаторной оптимизации [1–4]. В классе задач комбинаторной оптимизации исследованы многие задачи на перестановках, полиперестановках, сочетаниях и размещениях. Среди них задача коммивояжера, линейная и квадратичная задачи о назначениях, задача балансирования вращающихся деталей и т. д. [3, 4].

Для создания адекватных математических моделей комбинаторных задач построения оптимальных циклических маршрутов, математического моделирования и решения ряда задач планирования и управления возникает необходимость в решении задач оптимизации на множестве циклических перестановок.

Анализ литературы по комбинаторной оптимизации показывает, что задачи оптимизации на циклических перестановках не исследованы в достаточной степени. Для решения задач данного класса предлагается использование известных методов, не учитывающих специфику комбинаторного множества циклических перестановок.

Целью настоящей работы является решение некоторых классов задач оптимизации функций на множестве циклических перестановок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу комбинаторной оптимизации в следующей постановке:

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \rightarrow \min; \quad (1)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in P_n^C, \quad (2)$$

где $c_i \in R$, $i \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$, P_n^C — множество циклических перестановок без повторений из n действительных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ [5, 6].

Рассмотрим подробнее понятие перестановки. Далее будем использовать следующее определение перестановки [6].

Определение. Линейное упорядочение элементов некоторого порождающего множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ называется перестановкой

$$\pi = \pi(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\pi(a_1), \pi(a_2), \dots, \pi(a_n)) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}),$$

или, если необходимо подчеркнуть тот факт, что она содержит n элементов, n -перестановкой.

Множество перестановок, порожденное элементами $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, обозначим P_n .

Рассмотрим некоторую перестановку $\pi = (\pi(a_1), \pi(a_2), \dots, \pi(a_n)) \in P_n$, и её элемент $\pi(a_i) = a_j$, $\forall i, j \in J_n$. Тогда можно записать: $\pi(a_j) = \pi(\pi(a_i)) = \pi^2(a_i)$. Обобщенно можно эту формулу представить в таком виде:

$$\pi^{k-1}(a_j) = \pi(\pi^{k-2}(a_j)) = \pi^k(a_i), \quad \forall i, j \in J_n, \quad k \leq n.$$

Таким образом [5], если для некоторого $l \geq 1$ имеем $\pi^l(a_i) = a_i$, $i \in J_n$, и элементы $a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \dots, \pi^{l-1}(a_i)$ все различны, то последовательность $(a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \dots, \pi^{l-1}(a_i))$ называется циклом длины l .

Циклической является такая перестановка π из n элементов, которая содержит единственный цикл длины n , то есть $\pi^n(a_i) = a_i$, $\forall i \in J_n$. Такие перестановки будем обозначать π_C .

Приведем пример циклической перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (14625837).$$

Обозначим множество циклических перестановок, порожденных числами $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, через $P_n^C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ или, для краткости, P_n^C . Отметим, что P_n^C является евклидовым комбинаторным множеством, или е-множеством [3, 4]. Рассмотрим

отображение множества P_n^C в арифметическое евклидово пространство. В работах [3,4] понятие евклидового комбинаторного множества введено следующим образом.

Определение. Множество E называется евклидовым комбинаторным множеством, если обладает следующим свойством: два элемента $\bar{e}, \bar{e} \in E$ различны, если они независимо от других особенностей отличаются порядком следования элементов.

Один из подходов к исследованию евклидовых комбинаторных множеств основан на их отображении (погружении) в арифметическое евклидово пространство [3, 4].

Пусть E — евклидово комбинаторное множество, а $e = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ — элемент E , где $j_i \neq j_t \forall j_i, j_t \in J_n, \forall i, t \in J_n$. Отображение $f: E \rightarrow E_f \subset R^n$ называется погружением E в арифметическое евклидово пространство, если f ставит множеству E во взаимнооднозначное соответствие множество E_f согласно правилу: для любого $e = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in E, x = f(e), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_f$ где $x_i = j_i, \forall i \in J_n$.

Обозначим $E_n^C = f(P_n^C)$ образ множества циклических перестановок P_n^C при отображении f .

В результате погружения множества P_n^C в арифметическое евклидово пространство может быть сформулирована эквивалентная (1)-(2) задача оптимизации линейной функции в пространстве R^n :

$$L(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min; \quad (3)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n^C \subset R^n, \quad (4)$$

где $c_i \in R, i \in J_n$.

Множество E_n^C обладает всеми комбинаторными свойствами множества P_n^C , следовательно, дальнейшие выкладки справедливы как для задачи (1)-(2), так и для (3)-(4).

Отметим, что задача поиска минимумов линейных функций на евклидовых комбинаторных множествах перестановок, размещений без дополнительных ограничений решена, например, в [3, 7].

Решение этой задачи на множестве перестановок P_{nk} , порожденном элементами $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, имеет следующий вид [3,7]:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \arg \min_{x \in P_{nk}} \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in R^1, \forall j \in J_n,$$

где

$$x_{m_i}^* = a_i, \forall i \in J_n,$$

а последовательность $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ такова, что $c_{m_1} \geq c_{m_2} \geq \dots \geq c_{m_n}$.

Отметим, что комбинаторные свойства множества циклических перестановок P_n^C не позволяют решить задачу (1)-(2) путем простого упорядочивания.

Известно [3, 7], что к задаче минимизации функции (1) на множестве перестановок P_{nk} сводится следующая задача комбинаторной оптимизации:

$$g(\alpha) = \|\alpha - d\|^2 \rightarrow \min,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in P_n, d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in R^n$.

Имеем

$$\begin{aligned} \|\alpha - d\|^2 &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - d_i)^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i + \sum_{i=1}^n d_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i + \sum_{i=1}^n d_i^2; \end{aligned}$$

$$\min_{\alpha \in P_n} \|\alpha - d\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i^2 - 2 \min_{\alpha \in P_n} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i \right).$$

Поскольку множество циклических перестановок P_n^C является подмножеством множества перестановок P_{nk} , для любого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in P_n^C$

справедливо соотношение $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$.

Следовательно,

$$\min_{\alpha \in P_n^C} \|\alpha - d\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i^2 - 2 \min_{\alpha \in P_n^C} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i d_i \right).$$

Рассмотрим некоторые свойства задач (1)-(2), (3)-(4).

2. Свойства задачи

Определение 1. Пусть существуют порождающие элементы $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, и k из них ($k < n$) $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ определяют первые k элементов в некоторой перестановке:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n^C,$$

$$x_j = a_{i_j}, j = 1, 2, \dots, k, k < n,$$

$$\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset J_n.$$

Тогда $y^k = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ назовем частичной перестановкой для перестановки $x \in P_n^C$.

Пусть частичная перестановка $y^k = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ не содержит циклов длины $1, 2, \dots, k$. И пусть в перестановке $x \in P_n^C$ фиксируется $k+1$ -й элемент $a_{i_{k+1}}, i_{k+1} \in J_n$. Тогда образуется частичная перестановка $y^{k+1} = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}})$. Элемент $a_{i_{k+1}}$ в зависимости от индекса i_{k+1} может образовывать (замыкать) либо не образовывать цикл длины $k+1$.

Утверждение 1. Если

— $i_{k+1} > k+1$, то частичная перестановка y^{k+1} не будет содержать циклов длины $1, 2, \dots, k, k+1$;

— $i_{k+1} = k+1$, то частичная перестановка y^{k+1} будет содержать неподвижную точку $y_{k+1}^{k+1} = a_{i_{k+1}}$.

Доказательство.

Если $i_{k+1} > k+1$. Проведем доказательство от противного. Предположим, элемент $a_{i_{k+1}}$ в частичной перестановке y^{k+1} образует цикл длины не более $k+1$.

Тогда в множестве элементов $y^k = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ должен содержаться элемент a_{i_j} , такой что $i = i_{k+1}$.

Так как $l_{k+1} > k+1$, представим l_{k+1} в виде: $l_{k+1} = k+1 + \sigma$, где σ — некоторое целое положительное число. Тогда $i = k+1 + \sigma$, что невозможно, так как i принимает значения $1, 2, \dots, k$. Получаем противоречие, следовательно, исходное предположение неверно.

Если $l_{k+1} = k+1$. Если l_{k+1} — номер соответствующего порождающего элемента, а $k+1$ — порядковый номер в перестановке, то при их равенстве элемент образует неподвижную точку согласно определению.

Рассмотрим ситуацию, когда $l_{k+1} < k+1$. При этом условии элемент $a_{l_{k+1}}$ может замыкать циклы длиной от 2 до $k+1$ (т.к. цикл длины 1 — неподвижная точка). При этом циклы длины 2 охватывают позицию $k+1$ и все позиции от 1 до k . Циклы длины 3 охватывают позицию $k+1$ и каждую пару позиций от 1 до k . Таким образом, элемент $a_{l_{k+1}}$ может замыкать $C_k^1 = k$ циклов длины 1, C_k^2 циклов длины 2, ..., $C_k^k = 1$ цикл длины k , всего $2^k - 1$ циклов. Каждый из таких циклов длины $m \in \{2, \dots, k+1\}$ содержит позицию $k+1$ и позиции $i_1, i_2, \dots, i_{m-1} \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Например, при $k=2$ элемент a_{i_3} может замыкать 2 цикла длины 2, содержащих позиции 1 и 3, 2 и 3, то есть циклы [31] и [32]. Также a_{i_3} может замыкать циклы, содержащие позиции 1, 2, 3, то есть циклы [213] = [132].

Из определения циклических перестановок следует, что цикл длины m , охватывающий позиции $i_1, i_2, \dots, i_m$, имеет место в том случае, когда на этих позициях в соответствующем порядке стоят элементы $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$, иначе говоря, позиции $i_1, i_2, \dots, i_m$ содержат любую циклическую перестановку элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$.

Следуя [5], примем для простоты $a_i = i$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда можно сказать, что позиции $i_1, i_2, \dots, i_m$ содержат цикл, если на этих позициях в соответствующем порядке стоят элементы $i_1, i_2, \dots, i_m$.

Из вышеизложенного следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. При $l_{k+1} < k+1$ элемент $a_{l_{k+1}} = l_{k+1}$ замыкает цикл длины m , содержащий позиции $i_1, i_2, \dots, i_{m-1}, k+1$, тогда, когда все предыдущие позиции $i_1, i_2, \dots, i_{m-1} \in \{1, 2, \dots, k\}$ заняты $m-1$ элементами из множества $\{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}, k+1\}$. Если на позициях $i_1, i_2, \dots, i_{m-1}$ есть хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству $\{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}, k+1\}$, то цикл не сможет быть замкнут элементом $a_{l_{k+1}}$.

Например, элемент $a_{i_3} = a_2 = 2$ может замкнуть цикл [312], если на позициях 1 и 2 уже стоят элементы $a_{i_1} = a_3 = 3$ и $a_{i_2} = a_1 = 1$. Если же, к примеру, на позиции 1 стоит элемент $a_{i_1} = a_4 = 4$, то $a_{i_3} = a_2 = 2$ не замкнет цикл.

Утверждения 1 и 2 позволяют сформулировать следующие условия, при соблюдении которых

новый элемент $a_{l_{k+1}}$ не будет образовывать в частичной перестановке y^{k+1} циклов длины $1, 2, \dots, k, k+1$:

- 1) $l_{k+1} > k+1$;
- 2) при $l_{k+1} < k+1$ на позициях $i_1, i_2, \dots, i_{m-1}$ должен быть элемент, не принадлежащий множеству $\{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}, k+1\}$. Условие должно соблюдаться для всех $m \in \{2, \dots, k+1\}$, $i_1, i_2, \dots, i_{m-1} \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Приведенные условия будем использовать при точном и эвристическом решениях поставленной задачи оптимизации.

3. Алгоритм поиска точного решения задачи

Для точного решения задачи применим метод ветвей и границ. Основными составляющими стратегии метода ветвей и границ являются правило ветвления и правило выбора [1].

При решении задачи (1)–(2) ветвление на каждом шаге алгоритма, т. е. генерация дочерних вершин, основано на фиксации различных порождающих элементов из числа еще не занятых относительно i -ого коэффициента c_i целевой функции $L(x)$, соответствующего данному уровню дерева.

Построение оценки для каждой вершины состоит из двух этапов. Первый этап — подсчет произведений уже зафиксированных порождающих элементов на соответствующие коэффициенты исходной функции:

$$L_1(x) = \sum_{i=1}^k a_{i_i} \cdot c_i,$$

где c_i — коэффициенты $L(x)$, a_{i_i} — такие, что $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n^C$, $x_j = a_{i_j}$, $j = 1, \dots, k$, $k < n$ элементы $y^k = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$.

При этом используются все вершины, для которых данная вершина является дочерней. Второй этап — подсчет остатка. Свободные порождающие элементы перемножаются с оставшимися коэффициентами исходной функции согласно правилу поиска минимума линейной функции на множестве P_n , используя (1):

$$L_2(x) = \sum_{i=k}^n a_{i_i} \cdot c_i,$$

где c_i — коэффициенты $L(x)$, a_{i_i} — такие, что $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_n^C$, $x_j = a_{i_j}$, $j = k, \dots, n$, $k < n$, причем $c_k \geq c_{k+1} \geq \dots \geq c_n$, $a_{i_k} < a_{i_{k+1}} < \dots < a_{i_n}$.

Таким образом, оценка вершины:

$$L_E(x) = L_1(x) + L_2(x).$$

При построении дочерних вершин новый элемент не должен образовывать цикла длины меньше n (в том числе неподвижной точки — цикла длины 1). Чтобы циклов не возникало, проверяются сформулированные в п.2 условия.

После получения какого-либо промежуточного решения задачи (рекорда) происходит проверка, является ли текущее решение задачи (значение рекорда) оптимальным. Если существует хотя бы

одна «висячая» вершина, то есть вершина, не породившая еще дочерних, с лучшей оценкой, то она принимается как текущая, и алгоритм продолжает построение вершин дерева. Работа алгоритма заканчивается, если полученное решение (рекорд) для конечной вершины наилучшее из всех возможных.

С помощью этого алгоритма возможно получить точное решение исходной задачи. Но ввиду того, что мощность множества циклических перестановок равняется $(n-1)!$, нахождение точного решения становится трудно осуществимым, а иногда и невозможным в конечных временных промежутках.

Таким образом, актуальным становится вопрос о нахождении приближенного или эвристического решения задачи комбинаторной оптимизации в приведенной выше постановке.

4. Алгоритм поиска эвристического решения задачи

Решение задачи о поиске эвристического решения состоит из двух этапов. Первый этап – построение всех частичных перестановок длины k , задаваемой выборочно. В результате этого получается дерево частичных перестановок с k уровнями, каждым листом которого является частичная перестановка y^k .

Затем на основании заданного эвристического правила из всех частичных перестановок выбирается некоторое количество «лучших», то есть перестановок с лучшим значением оценки целевой функции. Эвристические правила могут быть, например, такими:

1) выбор в качестве «лучших» первых $p\%$ перестановок с лучшими значениями оценок;

2) выбор всех перестановок, оценка которых отклоняется от L_{opt} не более чем на заданную величину q .

$L_{opt} = L_{\min} \vee L_{\max}$ в зависимости от исходной задачи, где $L_{\min}$ и $L_{\max}$ – соответственно минимальная и максимальная оценки, полученные для всех рассматриваемых перестановок;

3) выбор всех перестановок, оценка которых отклоняется от L_{opt} не более чем на заданную долю $0 \leq v < 1$ от всего динамического диапазона оценок, т.е. перестановок с оценкой $L(x)$ такой, что $L(x) - L_{\min} \leq v \cdot (L_{\max} - L_{\min})$, где $L_{\min}$ и $L_{\max}$ – соответственно минимальная и максимальная оценки, полученные для всех рассматриваемых перестановок.

Все перестановки, не удовлетворяющие выбранному правилу, исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Второй этап решения заключается в том, что для каждой оставшейся вершины дерева строятся дочерние вершины, на основании утверждений 1 и 2. Таким образом, получается дерево частичных перестановок длины $k+1$. Из этих перестановок снова выбирается некоторое количество «лучших»,

а все остальные отбрасываются. Процесс продолжается, пока перестановки не достигнут длины n . Если в конце итераций осталось несколько перестановок, в качестве конечного решения выбирается перестановка с лучшим значением целевой функции. Если на некотором шаге алгоритма останется лишь одна перестановка, она достраивается до длины n и выбирается в качестве решения.

Таким образом, получается некоторое эвристическое решение задачи оптимизации линейной функции на циклических перестановках. Степень точности такого решения зависит от размерности n , уровня k , на котором происходит остановка (при $k = n$ получается точное решение), эвристического правила выбора «лучших» перестановок и коэффициентов целевой функции.

5. Вычислительные эксперименты

В качестве тестовых параметров эвристического алгоритма было выбрано значение $k = 3$ при $n = 7$, правило выбора состояло в выборе в качестве «лучших» тех перестановок, оценка которых превышает минимальную не более, чем на $v = 10\%$ от всего динамического диапазона оценок.

В качестве коэффициентов целевой функции были взяты $c_1 = 5, c_2 = 2, c_3 = 3, c_4 = 4, c_5 = 1, c_6 = 9, c_7 = 7$. Результат приближенного решения совпал с результатами для точного решения: $x^{opt} = (3645712)$ с оценкой $L(x^{opt}) = 89$.

Результаты работы программы по нахождению точного решения исходной задачи с различными коэффициентами целевой функции представлены в табл. 1.

В экспериментах рассматривались линейные функции с коэффициентами, сгенерированными случайным образом в диапазоне $[-30; 30]$.

Таблица 1

Результаты работы программы

Размерность	20	30	40
Среднее время работы, в секундах	3,32	19,17	30,25
Среднее кол-во построенных вершин	825,9	3665,2	7659,2
Кол-во циклических перестановок	1,2E+17	8,84E+30	2,04E+46
Кол-во всех вершин дерева	6,6E+18	7,20E+32	2,22E+48
Среднее отношение кол-ва построенных вершин к кол-ву циклических перестановок	6,80E-15	4,15E-28	3,75E-43
Среднее отношение кол-ва построенных вершин к кол-ву всех вершин дерева	1,25E-16	5,08E-30	3,45E-45

Результаты сравнения работы программ по нахождению точного и эвристического решений исходной задачи с одними и теми же коэффициентами целевой функции представлены в табл. 2. Обе программы запускались на одном компьютере,

поэтому корректным было также включать в сравнение время работы программ.

В ходе вычислительных экспериментов по приращению точного метода решения задачи была обнаружена значительная зависимость скорости получения решения от коэффициентов целевой функции, в частности, от их дисперсии. При невысокой дисперсии коэффициентов (менее 10–15) оценки всех вершин слабо отличаются друг от друга, и для нахождения точного решения алгоритму необходимо перебрать тем больше вершин, чем меньше дисперсия. Применение метода ветвей и границ гарантированно сводится к полному перебору при нулевой дисперсии.

Таблица 2

Результаты вычислительных экспериментов

n	Точное решение			Эвристическое решение			Отношение количества вершин	Относительная погрешность
	Знач. целевой функции	Построено вершин	Время работы	Знач. целевой функции	Построено вершин	Время работы		
10	169,2	12290	6 с	172	1782	16 мс	0,145	1,65%
15	309,3	33990	12 с	319,3	4642	47 мс	0,137	3,23%
20	525,2	523760	102 с	571,3	3817	62 мс	0,007	8,78%
30	804,5	1600350	244 с	915,8	21540	485 мс	0,013	13,83%
40	1621,1	6105360	1074 с	1889,2	6662	203 мс	0,001	16,54%

Эвристический метод, наоборот, позволяет получить более точные результаты при небольшой дисперсии коэффициентов, а погрешность результатов увеличивается с увеличением дисперсии.

Для получения результатов из табл. 1 были использованы коэффициенты целевой функции с дисперсией, приблизительно равной 7, поэтому эвристическое решение позволило получить довольно точные результаты за значительно меньшее время.

Выводы

Для точного решения задачи комбинаторной оптимизации на множестве циклических перестановок предлагается использование метода ветвей и границ. При проведении численных экспериментов по применению метода ветвей и границ проявляются следующие тенденции:

1) экспоненциальный рост трудоемкости при увеличении размеров задачи;

2) существенная зависимость трудоемкости решения как от способа ветвления, так и от способа вычисления оценок.

Если нахождение точного решения задачи по любым причинам невозможно, предлагается алгоритм построения эвристического решения. Его преимущество состоит в возможности регулирования трудоёмкости получения результатов и их точности с помощью применения различных эвристических правил выбора «лучших» перестановок.

При проведении численных экспериментов по применению эвристического метода выявлена

значительная зависимость точности решения как от правила выбора «лучших» вершин, так и от коэффициентов целевой функции. При этом лучшие результаты достигаются при коэффициентах целевой функции, имеющих небольшую дисперсию, а также тогда, когда большие по модулю коэффициенты имеют меньшие индексы, то есть соответствуют первым элементам перестановки.

Данные алгоритмы показали свою работоспособность в процессе проведения вычислительных экспериментов. При небольшой дисперсии коэффициентов целевой функции эвристический алгоритм позволяет получать приемлемое решение задачи за сравнительно короткое время, при большей дисперсии целесообразней применять точный алгоритм. Предложенный эвристический алгоритм может быть улучшен с помощью новых эвристических правил выбора «лучших» перестановок либо применением иного правила построения или ветвления дерева.

Список литературы: 1. Сергиенко, И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации [Текст] / И. В. Сергиенко — К.: Наук. думка, 1988. — 472 с. 2. Пападимитриу, Х. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность [Текст] : пер. с англ. — В. Б. Алексеев ; М.: Мир, 1985. — 512 с. 3. Стоян, Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [Текст] / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець — К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с. 4. Стоян, Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования [Текст] / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев — К.: Наук. думка, 1986. — 268 с. 5. Стенли, Р. Перечислительная комбинаторика [Текст] : пер. с англ. — А. И. Барвинка ; М.: Мир, 1990. — 440 с. 6. Bona, M. Combinatorics of permutations. / M. Bona — Chapman & Hall/CRC, 2004. — 337 с. 7. Стоян, Ю.Г. Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике [Текст] / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев — ДАН УССР, Сер. А. 1988. — №3, с.238–240. 8. Липский, В. Комбинаторика для программистов [Текст] / В. Липский — М.: Мир, 1988. — 213 с.

Поступила в редколлегию 12.05.2012

УДК 519.854.2

Оптимізація лінійної функції на множині циклічних перестановок / І. В. Гребенник, О. С. Литвиненко, О. С. Тітова // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. — 2012. — № 2 (79). — С. 8–12.

У статті розглядаються задачі оптимізації деяких класів функцій на комбінаторних множинах. Запропоновано метод розв'язання задачі в класі методів гілок і меж та евристичний метод. Виконані обчислювальні експерименти.

Бібліогр.: 8 найм.

UDK 519.854.2

Optimization of a linear function on the set of cyclic permutations / I. V. Grebennik, A. S. Litvinenko, O. S. Titova // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. — 2012. — № 2 (79). — P. 8–12.

The article considers the optimization problem of some classes of functions on combinatorial sets. A method of solving problems in the class of the branch-and-bound algorithms and a heuristic method are proposed. Computational experiments are performed.

Ref.: 8 items.