

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Електронної та біомедичної інженерії
(повна назва)

Кафедра Мікроелектроніки, електронних приладів та пристроїв
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА

Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ ТИПУ ФЛОКЕ-БЛОХА В
СЕРЕДОВИЩАХ З ПЕРІОДИЧНО МІНЛИВИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Виконав:
студент 2 курсу, групи _____

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 153 «Мікро- та наносистемна
техніка»

Тип програми освітньо-професійна

Освітня програма «Мікро- та нанoeлектронні
прилади і пристрої»

Керівник _____
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри

(підпис)
2019 р

Бондаренко І.М.
(прізвище, ініціали)

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Електронної та біомедичної інженерії _____

Кафедра Мікроелектроніки, електронних приладів та пристроїв _____

Рівень вищої освіти _____ (другий магістерський) _____

Спеціальність _____ 153 «Мікро- та наносистемна техніка» _____

Тип програми _____ освітньо-професійна _____

Освітня програма _____ «Мікро- та наноелектронні прилади і пристрої» _____

ЗАТВЕРДЖУЮ:
Зав. кафедри

_____ І.М.Бондаренко

« ____ » _____ 2019р.

ЗАВДАННЯ НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові _____
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи _____

затверджена наказом по університету від 04 листопада 2019 р.
№ 1636 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії ____ 20__ р.

3. Вихідні дані до роботи _____

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (слайдів)

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Інформаційно-тематичний пошук та огляд літературних джерел	04.11.19	Виконано
2	Дослідження	06.11.19 12.11.19	Виконано
3	Виконання чисельних розрахунків характеристик	13.11.19 15.11.19	Виконано
4	Аналіз розрахунків та параметрів	16.11.19	Виконано
5	Оформлення пояснювальної записки	17.11.19 23.11.19	Виконано
6	Оформлення графічних та демонстраційних матеріалів	24.11.19 26.11.19	Виконано
7	Проходження нормо контролю і отримання рецензії	27.11.19 03.12.19	Виконано
8	Підготовка до захисту атестаційної роботи	04.12.19 18.12.19	Виконано

Дата видачі завдання 04 листопада 2019 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Атестаційна робота 80 стр., 86 посилань., 13 рис.

ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ, СИСТЕМА ФЛОКЕ – БЛОХА,
БАГАТОШАРОВІ СТРУКТУРИ, МЕТОД ПОКРОКОВОГО АЛГОРИТМУ

Огляд класичних методів дослідження періодичних структур: метод Флоке-Блоха, вирішення рівняння Хілла, вирішення рівняння Хілла за допомогою функції Гріна і т.д. Систематизація та порівняння методів опису поширення електромагнітних хвиль в періодичних середовищах використовуючи хвильові рівняння.

Аналіз математично і фізично наближених аналітичних рішень для електромагнітних хвиль в періодичних діелектричних структурах для визначення їх точності.

Методом покрокового алгоритму розглянуто поширення електромагнітних хвиль прямого і зворотного напрямків в багатошаровій структурі обмеженої довжини з періодичною неоднорідністю меандрового типу. Досліджено частотні залежності амплітуд хвиль прямого і зворотного напрямків, а також трансформація частотних характеристик при зміні числа бар'єрів. Розглянуто трансформацію частотних залежностей в широкому інтервалі зміни співвідношення проникності шарів. Виявлено відтиснення частотного спектру до свого нижнього кінця при збільшенні цього співвідношення.

ABSTRACT

Attestation work 80 pages, 86 references, 13 figs.

ELECTROMAGNETIC WAVES, FLOCK SYSTEM - FLOUR, MULTIPLE STRUCTURES, STEP ALGORITHM METHOD

Overview of classical methods for the study of periodic structures: the Floke-Bloch method, the solution of the Hill equation, the solution of the Hill equation using the Green function, etc. Systematization and comparison of methods for describing the propagation of electromagnetic waves in periodic media using wave equations.

Analysis of mathematical and physically approximate analytical solutions for electromagnetic waves in periodic dielectric structures to determine their accuracy.

The method of stepwise algorithm considers propagation of electromagnetic waves of forward and reverse directions in a multilayer structure of limited length with periodic heterogeneity of meander type. The frequency dependences of the amplitudes of the forward and reverse directions, as well as the transformation of the frequency characteristics with the change in the number of barriers, are investigated. Transformation of frequency dependences in a wide range of changes in the ratio of layer permeability is considered. It is revealed that the frequency spectrum is pushed to its lower end by increasing this ratio.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
1 КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ ВИРІШЕНЬ РІВНЯНЬ	
ХІЛЛА.....	9
1.1 Одновимірні періодичні середовища.....	9
1.2 Система Флоке-Блоха.....	11
1.3 Метод інтегрального рівняння. Висновок рівняння. Доведення його еквівалентності системі Флоке-Блоха.....	14
1.4 Теорія збурень.....	21
1.5 Двохвильова динамічна теорія дифракцій-дифракція Брегга.....	23
1.6 Стандартна теорія зв'язаних хвиль.....	28
1.7 Висновок рівнянь зв'язаних хвиль.....	28
2 ПРОСТОРОВИЙ РОЗПОДІЛ АМПЛІТУДИ ЗОВНІШНІХ І ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ В ОБМЕЖЕНІЙ БАГАТОШАРОВІЙ СТРУКТУРІ	
3 ПЕРІОДИЧНОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ.....	34
2.1 Геометрія задачі.....	34
2.2 Узагальнення на випадок електромагнітних хвиль.....	35
2.3 Випадок провідного середовища.....	37
2.4 Особливості геометрії завдання для випадку електромагнітних хвиль...	40
2.5 Схема розрахунку методом покрокового алгоритму.....	42
2.6 Загальна схема покрокового алгоритму.....	42
2.7 Аналітична реалізація алгоритму.....	43
2.8 Амплітуди хвиль в крайніх шарах структури.....	48
2.9 Зміна числа бар'єрів.....	52
2.10 Мінімальні значення амплітуди.....	54
2.11 Максимальні значення амплітуди.....	58

2.12 Розподіл амплітуд в шарах при великій варіації параметрів.....	63
2.13 Перехід між розподілами амплітуди.....	64
2.14 Слабка і сильна неоднорідність.....	65
ВИСНОВКИ.....	71
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	74
ДОДАТОК А.....	81
ДОДАТОК Б.....	82

ВСТУП

В даній атестаційній роботі, що носить оглядово-аналітичний характер, буде розглянута доволі актуальна і важлива тема поширення електромагнітних хвиль типу Флоке-Блоха в середовищах з періодично мінливими властивостями.

Інтерес до поширення електромагнітних хвиль в періодичних структурах має давню історію. Слідом за першими роботами в цій області, в значній мірі узагальненими в фундаментальних монографіях була значно кількість робіт, що розвивають основні положення на різні види хвиле ведучих середовищ.

Після відкриття можливості створення композиційних середовищ з дискретних елементів, досить перспективними для практичного застосування стали вважатися середовища типу «фотонних кристалів», що дозволяють підтримувати не тільки прямі, але й зворотні хвилі.

Іншим паралельним напрямком було вивчення магнітних середовищ з періодично змінними властивостями, які є, за усталеною термінологією, «магنونними кристалами». У перших подібних роботах магнітна неоднорідність створювалася за рахунок збудження в середовищі пружних хвиль, що періодичним чином змінюють властивості середовища за рахунок магнітострикції. Найважливіший цикл робіт був присвячений дослідженню магнітостатичних хвиль в умовах періодичного поля, створюваного ланцюжком зовнішніх магнітів або відповідним чином намагніченої висококоерцитивною магнітофонною стрічкою. На основі таких структур була показана можливість не тільки створення ефективних фільтруючих пристроїв НВЧ діапазону, але і високоточного вимірювання параметрів магнітної анізотропії та намагніченості феритових плівок. Поряд зі зміною просторово періодичного магнітного поля, розвивалися роботи по створенню «магنونних кристалів» за допомогою

періодичної зміни параметрів самого магнітного середовища, в тому числі таких як товщина і намагніченість.

У більшості перерахованих робіт теоретична трактування спостережуваних явищ базувалася, в першу чергу на моделях, заснованих на застосуванні теореми Блоха, апарату Хілла, Матьє, Флоке і Кроніга-Пенні, детальний огляд яких можна знайти, наприклад, в монографії. Як уже зазначалося раніше, загальним недоліком таких теоретичних моделей є неможливість дослідження розподілу збуджень в окремих шарах структури. Для подолання такого недоліку в, досліджений метод покрокового алгоритму, за допомогою якого на прикладі одновимірної хвилі розглянуто поширення хвиль прямого і зворотного напрямків в структурі обмеженої довжини з періодичною неоднорідністю типу симетричного меандру.

Проаналізовано амплітуди хвиль прямого і зворотного напрямків при зміні координати, номера шару структури і середнього хвильового числа, виявлено ефект «вторинної модуляції». Розглянуто розподіл амплітуд при значному співвідношенні між хвильовими числами середовищ, що складають структуру. Досліджена просторова модуляція амплітуди, представлена п'ятьма основними режимами. Для пояснення особливостей аналізованих явищ запропонована аналогія з ланцюжком послідовно з'єднаних резонаторів.

1 КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ ВИРІШЕННЯ РІВНЯННЯ ХІЛЛА

1.1 Одновимірні періодичні середовища

Одновимірне періодичне середовище, у загальному випадку, буде являти собою шар товщиною L (рис. 1), що заповнений середовищем, який періодично змінюється уздовж осі z діелектричною проникністю

$$\varepsilon(z) = \varepsilon(z + a),$$

де L - товщина шару

ε_1 и ε_2 - діелектричні проникності оточуючі шар однорідних середовищ

a - період функції $\varepsilon(z)$.

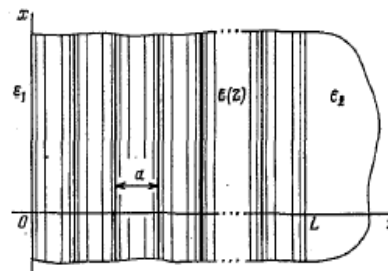


Рисунок 1– Шар середовища з одновимірної періодичністю

Якщо ми маємо поглинаюче середовище (або підсилююче), його діелектрична проникність є комплексною і $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$.

Практично для більшості відомих нам середовищ, $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$, при цьому речова частина ε' буде пов'язана з показником заломлення $n = \sqrt{\varepsilon'}$, а уявна частина ε'' пов'язана з коефіцієнтом поглинання за інтенсивністю α

співвідношенням $\varepsilon'' = \alpha k^{-1} \sqrt{\varepsilon'}$, де $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, λ - довжина хвилі світла у вакуумі. Проаналізуємо нормальне падіння плоскої світлової хвилі на одновимірну періодичну структуру.

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + k^2 \varepsilon(z) E(z) = 0 \quad (1)$$

де

$$E(z, t) = E(z) \exp(-i\omega t)$$

Рівняння (1) називають рівнянням Хілла. Саме його ми і візьмемо в якості основного рівняння, що описує поширення світла в одновимірній періодичній середовищі.

В силу лінійності рівняння Хілла його загальне рішення являтиме собою суперпозицію двох незалежних приватних рішень

$$E_1(z) \text{ і } E_2(z),$$

$$E(z) = C_1 E_1(z) + C_2 E_2(z), \quad (2)$$

де C_1 і C_2 - довільні постійні.

Для періодичного середовища приватне рішення рівняння (1) відповідно до теореми Флоке можемо зобразити у вигляді:

$$E_1(z) = \Phi_1(z) \exp(i\mu z),$$

(3)

де μ - так званий (взагалі кажучи, комплексний: $\mu = \mu' + i\mu''$) характерний показник;

$\Phi_1(z)$ - періодична функція з періодом z .

Вирішення виду (1) дає для повного поля $E_1(z, t)$ вираз

$$E_1(z, t) = \Phi_1(z) \exp(-\mu''z) \exp[i(\mu'z - \omega t)],$$

(3')

Це є просторово модульована ($\Phi_1(z)$ періодична), неоднорідна ($\mu'' \neq 0$) електромагнітна хвиля, що біжить (при $\mu' \neq 0$) вздовж осі z з фазовою швидкістю $v_\phi = \omega/|\mu'|$.

1.2 Блохівські хвилі. Система Флоке-Блоха

Суть методу Флоке-Блоха полягає в наступному. Відповідно до (3) зобразимо вирішення рівняння (1) у вигляді:

$$E_1(z) = \exp(i\mu z) \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} A_l \exp\left(i \frac{2\pi}{a} lz\right)$$

(4)

де A_l - невідомі коефіцієнти, що визначають вид періодичної функції $\Phi_1(z)$.
Періодичну діелектричну проникність середовища, також розкладемо в ряд Фур'є $\varepsilon(z)$ (a - період структури):

$$\varepsilon(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \varepsilon_m \exp\left(i \frac{2\pi}{a} mz\right) \quad (5)$$

де

$$\varepsilon_m = \frac{1}{a} \int_0^a \varepsilon(z) \exp\left(-i \frac{2\pi}{a} mz\right) dz \quad (5')$$

Підставивши (4) і (5) в рівняння (1), виділяючи доданок з $m = 0$ і замінивши в подвійних нескінченних сумах m і l індекс суми $l + m$ на l , а потім в сумі по m індексом суми m на $l - m$, отримаємо нескінченну систему рівнянь щодо коефіцієнтів A_l , маємо:

$$\left[k^2 \varepsilon_0 - \left(\mu + \frac{2\pi}{a} l \right)^2 \right] A_l = -k^2 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \varepsilon_{l-m} A_m (1 - \delta_{lm}) \quad (6)$$

де $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; δ_{ml} - символ Кронекера, а множник $(1 - \delta_{ml})$ звертає в нуль доданок з $m = l$.

Система рівнянь (6) є точною. Прирівнювання нулю її визначника

дає дисперсійне рівняння для характеристичного показника μ , а невідомі коефіцієнти A_l можна виразити через A_0 або методами ланцюгових дробів чи за допомогою інших відомих способів розрахунку нескінченних визначників.

На практиці ж, замість нескінченної системи рівнянь вирішується система рівнянь кінцевого порядку, отримана нами з (6) шляхом відкидання вищих гармонік. Порядок наближеної системи визначається необхідною точністю обчислень. Зазначимо також, що під час відсутності модуляції діелектричної проникності середовища, коли всі $\varepsilon_m = 0$, рівняння (6) має відмінні від нуля рішення, $A_l \neq 0$, тільки в тому випадку, коли хвильовий вектор K_l дорівнює:

$$k_l^{(\pm)} \sqrt{\varepsilon_0} = \pm \left(\mu' + \frac{2\pi}{a} l \right), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6')$$

де $k_l^{(+)}$ відноситься до хвилі, що біжить в позитивному напрямку осі z ;

$k_l^{(-)}$ - хвилі, що біжить в протилежному напрямку.

Для хвилі Флоке-Блоха одновимірного фотонного кристала із ступінчастим профілем показника заломлення розвинене уявлення в формі неоднорідної хвилі. Основні оптичні характеристики хвилі Флоке-Блоха вперше представлені дійсними функціями частоти випромінювання, просторових координат і параметрів осередку кристала. З використанням даного подання отримано точний аналітичний опис оптичних характеристик багатошарового оптичного фільтра / дзеркала і фотонно-кристалічного хвилеводу, запропонована і реалізована неруйнівного методика відновлення параметрів осередку одновимірного фотонного кристалу.

Власні рішення в фотонних кристалах, відповідно до теореми Флоке-

Блоха, мають вигляд,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}},$$

де $\vec{f}(\vec{r})$ - періодична функція з періодом кристала.

Існуюча аналогія з плоскими хвилями (присутній блохівський хвильовий вектор, групова швидкість) обумовлює тягу до аналогії з однорідними середовищами, наприклад, широко використовується апарат ізочастот.

Розкладаючи функцію $\vec{f}(\vec{r})$ в ряд Фур'є, блохівську хвилю можна уявити як суму плоских хвиль, що поширюються в напрямках, що відрізняються на вектор оберненої ґратки. Кожна з цих хвиль володіє своєю амплітудою, фазовою швидкістю, а в магнітних фотонних кристалах (МФК) і власною поляризацією. Загальною є тільки групова швидкість. Для кожної з цих хвиль можна намалювати свою ізочастоту.

Сукупність усіх ізочастот відповідає повній зонній структурі, ізочастотні хвилі з найменшим хвильовим вектором - наведеної до першої зони Брілюєна зонної картині, а ізочастота хвилі з максимальною амплітудою - розширеної зонній картині.

1.3 Метод інтегрального рівняння. Висновок рівняння. Доведення його еквівалентності системі Флоке-Блоха

При знаходженні наближених аналітичних рішень, рівняння (1) можна представити, виходячи з еквівалентного йому інтегрального рівняння:

$$E(z) = k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \varepsilon_p(z') G(z-z') E(z')$$

(7)

в якому періодичне збурення $\varepsilon_p(z) = \varepsilon(z) - \varepsilon_0$ має нульове середнє значення, а $G(z - z')$ – функції Гріна незбуреного рівняння з $\varepsilon(z) = \varepsilon_0$ і з правою частиною, що дорівнює $-\delta(z - z')$. Згідно $G(z - z')$ має вигляд:

$$G(z - z') = \frac{i}{2k\sqrt{\varepsilon_0}} \exp(ik\sqrt{\varepsilon_0}|z - z'|) \quad (8)$$

де $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 + i\varepsilon''_0.$$

Для нескінченної періодичної структури у формулі (19) зручно перейти від інтегрування по всій осі z до інтегрування по періоду a .

Скориставшись співвідношеннями періодичності $\varepsilon_p(z \pm ma) = \varepsilon_p(z)$ і $E(z \pm ma) = E(z) \exp(\pm i\mu ma)$, замість (7) отримаємо:

$$E(z) = k^2 \int_0^a dz' \varepsilon_p g(z - z') E(z') \quad (9)$$

$$\text{де } g(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G(z - na) \exp(i\mu na) = -\frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\exp(i\beta_n z)}{k^2 \varepsilon_0 - \beta_n^2}, \quad \beta_n = \mu + \frac{2\pi}{a} n. \quad (10)$$

Після цього ми можемо перейти до висновку і доведення. Даний матеріал

взято зі статті Карпова і Столярова "Поширення і перетворення хвиль в середовищах з одновимірною періодичністю". Хвильове рівняння (1) за допомогою $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_p(z)$ і властивостей $\delta(z - z')$ можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + k^2 \varepsilon_0 E(z) = -k^2 \varepsilon_p(z) E(z) = -k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_p(z') E(z') \delta(z - z') dz' \quad (21)$$

Тепер, якщо уявити ліву частину $E(z)$ у вигляді

$$E(z) = k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_p(z') G(z - z') E(z') dz' \quad (32)$$

То для функції Гріна $G(z - z')$ отримаємо рівняння

$$\frac{d^2 G(z - z')}{dz^2} + k^2 \varepsilon_0 G(z - z') = -\delta(z - z') \quad (43)$$

Розкладаємо $G(z)$ і $\delta(z)$ в інтеграли Фур'є:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\kappa) \exp(i\kappa z) d\kappa \quad \delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\kappa z) d\kappa \quad (54)$$

Підставивши ці вирази в (13) і інтегруючи їх потім, через отримані інтеграли за допомогою теорії відраховань по комплексних полюсах.

$$\left(\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 + i\varepsilon_0'' \text{ i } \varepsilon_0 > 0 \right), \text{ отримаємо}$$

$$G = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\kappa z) d\kappa}{\kappa^2 - k^2 \varepsilon_0} = \frac{i}{2k\varepsilon_0^{1/2}} \exp(ik\varepsilon_0^{1/2} |z|)$$
(65)

Тепер представимо, що з рівняння (7) виходить рівняння (9). Розіб'ємо інтеграл по dz' від $-\infty$ до $+\infty$ на два інтеграли від 0 до $+\infty$ і від $-\infty$ до 0. Кожен з цих інтегралів розіб'ємо на безкінечні суми інтегралів по періоду a .

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(z') dz' &= \int_0^a f(z') dz' + \int_a^{2a} f(z') dz' + \dots + \int_{na}^{(n+1)a} f(z') dz' + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{na}^{(n+1)a} f(z') dz', \\ \int_{-\infty}^0 f(z') dz' &= \int_{-a}^0 f(z') dz' + \int_{-2a}^{-a} f(z') dz' + \dots + \int_{-(n+1)a}^{-na} f(z') dz' + \\ &+ \dots = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \int_{-(n+1)a}^{-na} f(z') dz' \end{aligned}$$
(76)

де $f(z') = \varepsilon_p(z')G(z - z')E(z')$. Представимо, що в силу періодичності $\varepsilon_p(z')$ і теоремі Флоке, отримаємо:

$$\int_{na}^{(n+1)a} \varepsilon_p(z')E(z')G(z - z')dz' = \exp(i\mu na) \int_0^a \varepsilon_p(z'')E(z'')G(z - z'' - na) dz'' \quad (87)$$

$$\int_{-(n+1)a}^{-na} \varepsilon_p(z')E(z')G(z - z')dz' = \exp(-i\mu na) \times \int_{-a}^0 \varepsilon_p(z'')E(z'')G(z - z'' + na) dz''.$$

Перша рівність виходить за допомогою заміни $z' = z'' - na$.

використовуючи заміну змінних інтегрування, $z' = z - na$, маємо:

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^a G(z - na) \exp(i\mu na) \exp[-i\mu(z - na)] \times \\ &\times \exp\left(-\frac{2\pi i}{a}sz\right) dz = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-na}^{a-na} G(z') \exp(-i\beta_s z') = \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} G(z') \exp(-i\beta_s z') dz' \end{aligned}$$

(20),

$$\text{де } \beta_s = \mu + \frac{2\pi}{a}s \quad \text{і} \quad \exp(-2\pi i ns) = 1.$$

Підставивши останній вираз для f^s в формулу (19), отримаємо для $g(z)$

$$g(z) = f(z) \exp(i\mu z) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(i\beta_n z) \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) \exp(-i\beta_n y) dy, \quad (29)$$

де індекс суми s в (19) змінений на n , а $z' = y$. Останній інтеграл з $G(y')$ $= \frac{i}{2a} \exp(ia|y|)$, де $\alpha = k\varepsilon_0^{1/2}$ вираховується з урахуванням того, що

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0' + i\varepsilon_0'' \quad \text{и} \quad \varepsilon_0'' > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(y) \exp(-i\beta_n y) dy = \int_0^{+\infty} G(y) \exp(-i\beta_n y) dy + \int_{-\infty}^0 G(y) \exp(-i\beta_n y) dy = \frac{(-1)}{\alpha^2 - \beta_n^2}.$$

Підставляючи цей вираз в (21), отримаємо шукану нами формулу (10).

Тепер покажемо що інтегральне рівняння (9) з виразом для $g(z-z')$ виду (10) приводить до системи Флоке-Блоха. Для цього потрібно подати формулу (9) до розкладання в ряди Фур'є

$$E(z') = \exp(i\mu z') \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_l \exp\left(\frac{2\pi i}{a} lz'\right)$$

$$\varepsilon_p(z') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_m (1 - \delta_{m0}) \exp\left(\frac{2\pi i}{a} mz'\right)$$

$$g(z - z') = -\frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\beta_n(z - z')]}{k^2 \varepsilon_0 - \beta_n}$$

$$\beta_n = \mu + \frac{2\pi}{a} n.$$

(22)

Після скорочення на $\exp(i\mu z)$ з урахуванням того, що

$$\frac{1}{a} \int_0^a \exp\left[\frac{2\pi i}{a} (m - n + l')z\right] dz = \delta_{n, m+l'}$$

, отримаємо:

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_l \exp\left(\frac{2\pi i}{a} lz\right) = -k^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_m (1 - \delta_{m0}) \times \frac{A_{l'} \exp\left[\frac{2\pi i}{a} (m + l')z\right]}{k^2 \varepsilon_0 - \beta_{m+l'}^2},$$

$$\beta_{m+l'} = \mu + \frac{2\pi}{a} (m + l')$$

де

. Якщо зробити заміну індексів суми

$m + l' = l$, то отримаємо

$$A_l = \frac{k^2}{k^2 \varepsilon_0 - \beta_l^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_m (1 - \delta_{m0}) A_{l-m}$$

(23)

Помноживши на $k^2 \varepsilon_0 - \beta_l^2$ і підставивши m' замість $l - m$, тобто при $m = l - m'$ отримаємо:

$$\left[k^2 \varepsilon_0 - \left(\mu + \frac{2\pi}{a} l \right)^2 \right] A_l = -k^2 \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{l-m'} A_m (1 - \delta_{m'l}) ,$$

(24)

Що співпадає з системою Флоке-Блоха.

1.4 Теорія збурень

Для початку, розглянемо борове наближення або так звану багатохвильову дифракцію Рамана-Ната.

При отриманні наближених аналітичних формул в боровому наближенні будемо керуватись не інтегральним рівнянням (7) (або (9)) і його подальшого вирішення методом ітерацій, а еквівалентною йому системою рівнянь (6) динамічної теорії дифракції. Щоб побудувати наближений розв'язок системи (6) для $E_1(z)$ в (4), розглянемо її праву частину як збурення. Це можливо, наприклад, при малій амплітуді модуляції діелектричної проникності, тобто при $\varepsilon_m \ll \varepsilon_0$ і $m \neq 0$. Вважаючи при цьому, що $A_m \ll A_0$ і вирішуючи систему рівнянь (6) методом послідовних наближень, ми отримаємо ряд теорії збурень для характеристичного показника μ і амплітуд A_m [16].

З урахуванням перших членів цього ряду маємо:

$$\mu \approx k \sqrt{\varepsilon_0} \left[1 + \left(\frac{a}{\lambda \sqrt{\varepsilon_0}} \right)^2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{|\varepsilon_m|^2}{m^2 - (4a^2 \varepsilon_0 / \lambda^2)} \right],$$

$$A_m \approx \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \frac{\varepsilon_m}{m + (2a/\lambda)\sqrt{\varepsilon_0}} A_0,$$

де $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$ - довжина хвилі у вакуумі.

Описана нами процедура розрахунків, відповідає боровому наближенню добре відомому в квантовій теорії розсіювання і при розрахунку розсіювання електромагнітних хвиль на ультразвукові. Це наближення засноване на розкладенні поля по ступенях малого параметра, в який входить величина збурення і відношення розміру розсіювача до довжини хвилі. Можна побачити, що в нашому випадку (25) таким параметром малості є

$$\zeta = \left(\frac{ka}{|\varepsilon_0|^{1/2}}\right) \Delta\varepsilon = \frac{k_0 a \Delta\varepsilon}{|\varepsilon_0|} \quad (25)$$

де $\Delta\varepsilon$ - амплітуда модуляції діелектричної проникності, тобто $\Delta\varepsilon = |\varepsilon_m|_{max}$, а $k_0 = k\sqrt{\varepsilon_0'}$ - хвильовий вектор світла в однорідному середовищі.

Повне поле $E_1(z)$ в (4) з урахуванням рішення (25) буде являти собою суперпозицію плоских електромагнітних хвиль з різними амплітудами A_l і хвильовими векторами.

$$k_l = \left(\mu' + \frac{2\pi}{a}l\right), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При малій глибині модуляції $\Delta\varepsilon$ діелектричної проникності і при порівняних між собою довжині хвилі λ і періоді структури a , коли замалий

параметр ζ (24) борового наближення, всі амплітуди $A_l (l \neq 0)$ малі в порівнянні амплітудою A_0 нульового наближення. Це означає, що при $\zeta \ll 1$ в нульовому наближенні повне поле $E_1(z)$ в (4) буде складатися, в основному, з однієї хвилі з амплітудою A_0 і з постійною поширення, що дорівнює $\mu'_0 = k\sqrt{\varepsilon'_0}$, що в свою чергу відповідає фазовій швидкості v_Φ , її розповсюдженню, що дорівнює $\omega/\mu'_0 = c/\sqrt{\varepsilon'_0}$. Збурюючи від цієї хвилі на неоднорідності $\varepsilon(z)$ вторинні хвилі з малими амплітудами $A_l \ll A_0$ створюють слабкий хвильовий "фон" в вигляді набору хвиль, що біжать з різними швидкостями ω/k_l (по величині і напрямку) і які мають малі амплітуди A_l , що вираховуються по наближених формулах (25).

1.5 Двохвильова динамічна теорія дифракції – дифракція Брегга

Розглянуте нами раніше борове наближення, справедливо тоді, коли амплітуди всіх хвиль малі, окрім однієї амплітуди A_m , тобто коли поширення світла в основному має однохвильовий характер. Як видно з тих же вирішень (25) борового наближення умова малості амплітуди A_m в порівнянні A_0 порушується для тих номерів $m = -n$, для яких довжина хвилі випромінення $\lambda = 2\pi c/\omega$ задовільняє умові Брегга.

$$k\sqrt{\varepsilon'_0} = \pi n/a, \text{ або } n\lambda/\sqrt{\varepsilon'_0} = 2a$$

(26)

де $n = 1, 2, 3, \dots$ - номер бреггівського резонансу.

Умова (27) відповідає випадку n -го бреггівського резонансу, при умові, коли амплітуда $A_{-n}^{(-n)}$ -ї гармоніки може стати рівною або більше амплітуди A_0 , основної (падаючої на шар) хвилі, у якій згідно (6') $k_0^{(+)} = k(\varepsilon_0')^{1/2} = \mu_0' = \pi n/a$. При цьому, як видно із (25), амплітуди A_m інших гармонік з $m \neq (0, -n)$ як і раніше залишаються малими, а це означає, що поширення світла в цьому випадку має в основному двохвильовий характер. Для рентгенівських променів в кристалах такий випадок відомий як режим двохвильової динамічної теорії дифракції.

Вирішуючи систему рівнянь (18) з урахуванням двохвильової дифракції, ми можемо в першому наближенні знехтувати всіма іншими гармоніками, крім $(-n)$ -ї з амплітудою A_{-n} і основною з амплітудою A_0 , якщо і досі $\zeta \ll 1$. Тоді наближена система рівнянь прийме вигляд [2]

$$\begin{aligned} (k^2 \varepsilon_0 - \mu^2) A_0 + k^2 \varepsilon_n A_{-n} &\approx 0 \\ \left[k^2 \varepsilon_0 - \left(\mu - \frac{2\pi}{a} n \right)^2 \right] A_{-n} + k^2 \varepsilon_{-n} A_0 &\approx 0 \end{aligned} \quad (27)$$

де ε_0 , $\varepsilon_{\pm n}$ и ε_m - комплексні величини, що визначаються по формулі (5'). Умова можливості розв'язання цієї систем дає дисперсійне рівняння для характеристичного показника $\mu(k)$:

$$(\mu^2 - k^2 \varepsilon_0) \left[\left(\mu - \frac{2\pi}{a} n \right)^2 - k^2 \varepsilon_0 \right] - k^4 \varepsilon_n \varepsilon_{-n} = 0 \quad (28)$$

Поблизу бреггівського резонансу і при досить малій амплітуді модуляції діелектричної проникності ($|\varepsilon_{\pm n}| \ll |\varepsilon_0|$) рівняння (28) матиме наступний наближений аналітичний розв'язок:

$$\mu = \frac{\pi}{a} n + i\gamma, \quad \gamma \approx \left[\chi_n \chi_{-n} + \left(\frac{\alpha}{2} - i\delta \right)^2 \right]^{1/2} \quad (29)$$

$$\delta = k(\varepsilon'_0)^{1/2} - (\pi/a)n, \quad \chi_{\pm n} = k\varepsilon_{\pm n} / 2(\varepsilon'_0)^{1/2}, \quad \alpha = k\varepsilon''_0 / (\varepsilon'_0)^{1/2}. \quad (29')$$

Вираз для γ в (28) отримано в припущенні малості відбудови в δ в (29') від бреггівського резонансу (26), коли $|\delta| \ll \pi n/a$. Величини $\chi_{\pm n}$ зазвичай називаються постійними зв'язку, і вони визначають величину дифракційної взаємодії основної гармоніки з амплітудою з A_0 с $(-n)$ -ю гармонікою з амплітудою A_{-n} . Коефіцієнт α характеризує поглинання світла в однорідному середовищі. Величина γ в (29) визначена таким чином, що $Re \gamma \geq 0$, а $\delta Im \gamma \leq 0$. Із системи рівнянь (27) з використанням рішення (29) можна отримати зв'язок між амплітудами і ми будемо мати:

$$A_{-n} \text{ і } A_0:$$

$$A_{-n} = r_B^\infty A_0, \quad r_B^\infty = \frac{i\chi_{-n}}{\gamma + (\alpha/2) - i\delta} \quad (30)$$

При видаленні частоти хвилі $k = \omega/c$ від бреггівського резонансу (26), тобто в разі, коли $|\delta| \gg |\chi_m|$ і α , але як раніше $|\delta| \ll k(\varepsilon'_0)^{1/2}$, величина μ буде прагнути до величини $k(\varepsilon'_0)^{1/2}$, а вираз для амплітуди A_{-n} набуватиме вигляду, що співпадає з рішеннями, знайденими нами раніше в боровому наближенні

Точність обчислень можна підвищити, якщо як і в системі (27) в лівій частині рівності залишити складові з A_0 і A_{-n} , а нерезонансні члени, що залишилися в сумах в правій частині (25) врахувати по теорії збурень. Така процедура призводить до перенормування постійних зв'язку χ_n і χ_{-n} , а також до спектрального зсуву бреггівського резонансу відносно його положення, що визначається рівністю (25). В результаті зрушення центру бреггівського резонансу, при наявності поглинання $\alpha (\alpha \neq 0)$, що пропорційні величині поглинання α , а в прозорому середовищі ($\alpha = 0$), він містить третю ступінь малих постійних зв'язку χ_m . Зміна постійних зв'язку при цьому пропорційна першого ступеня χ_m .

Основним результатом, що слідує як із загальної теорії [10, 19], так і з конкретних формул (28), є існування на дисперсійній кривій $k = \omega/c = k(\mu)$ n -го бреггівського резонансу в разі непоглинаючих середовищ ($\alpha = 0$, $\chi_{-n} = \chi_n^*$ і $\chi_n \chi_{-n} = |\chi_n|^2 = \chi^2$) області заборонених частот $k = \omega/c$ де вирішення (28) для μ комплексно ($\gamma \neq 0$). У цій області заборонених частот

електромагнітні хвилі (15') стають затухаючими (для періодично нестационарних середовищ ці рішення стають нестійкими). Поза області заборонених частот ($\gamma = 0$) і вирішення (28) для μ не суттєві, а електромагнітні хвилі стають хвилями, що поширюються. Як впливає з формул, (28) ширина області заборонених частот дорівнює подвоєному постійному зв'язку χ , а залежність $\gamma(k)$ матиме параболічний характер з $\gamma_{max} = \chi$. В поглинаючих середовищах при $\alpha \neq 0$, характеризуючий показник μ завжди комплексний і хвилі будь-якої частоти, в більшій чи меншій мірі, будуть згасати у просторі. За відсутності періодичної модуляції середовища, коли $\chi = 0$, дисперсійна залежність $k(\mu)$ вироджується в пряму лінію, що відповідає сталості швидкості поширення світла в однорідному середовищі.

Крім дисперсійної залежності $k = \omega/c = k(\mu)$ цікава також залежність від частоти $\omega = ck$ величини $r_B^\infty = A_{-n}/A_0$, яка визначає відносну амплітуду $(-n)$ -ї гармоніки. В умовах бреггівського резонансу (25) ця $(-n)$ -я гармоніка має згідно (25) хвильовий вектор $k_{-n} = (-\pi n/a)$, що співпадає по величині з хвильовим вектором $k_0 = k(\epsilon'_0)^{1/2} = \pi n/a$ основної (що падає на середовище) хвилі, але направлений в інший бік. Оскільки [20] амплітуди A_l інших хвиль з $l \neq (0, -n)$ малі в порівнянні з A_0 и A_{-n} , то величина r_B^∞ має сенс коефіцієнта бреггівського відображення для безкінечного одномірного періодичного середовища. В області заборонених частот, коли квадрат модуля коефіцієнта бреггівського відображення $R_\infty = |r_B^\infty|^2 = 1$, амплітуда $(-n)$ -ї гармоніки в умовах бреггівського резонансу порівнюється з амплітудою вихідної нульової гармоніки.

Вираз (4) з характеристичним показником (29) є одним з незалежних рішень рівняння (1). Знаючи рішення $E_1(z)$ і $E_2(z)$, ми можемо розрахувати характеристики обмеженої одновимірного періодичного середовища шляхом зшивання полів на її кордонах.

1.6 Стандартна теорія зв'язаних хвиль

Підхід до вирішення рівняння (1) з періодичною діелектричною проникністю $\varepsilon(z)$ був вперше використаний Х. Когельником для проведення аналізу розсіювання світла на фазових голограмах при малій гармонійній модуляції $\varepsilon(z)$ [21]. Проілюструємо цей підхід для більш загального випадку середовища з довільною періодичною залежністю $\varepsilon(z)$. При цьому ми використаємо лише основне припущення Когельника, про малість перетворення хвиль на періоді структури, яка добре виконується в разі близькості частоти падаючої на шар хвилі, до частоти бреггівського резонансу.

1.7 Висновок рівнянь зв'язаних хвиль

Суть методу, що ми використовуємо, полягає в наступному [26]. Рішення рівняння представляється у вигляді суперпозиції двох хвиль, що біжать назустріч одна одній.

$$E(z) = A^{(+)}(z) \exp(ik\varepsilon_0^{1/2}z) + A^{(-)}(z) \exp(-ik\varepsilon_0^{1/2}z)$$

(310)

зі змінними амплітудами $A^{(\pm)}(z)$ і з хвильовим вектором $k\varepsilon_0^{1/2} = k(\varepsilon'_0)^{1/2} + (i\alpha/2)$, відповідним поширенню хвиль в однорідному поглинає середовищі з комплексної діелектричної проникністю, $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 + i\varepsilon''_0$, де $\varepsilon''_0 = \alpha(\varepsilon'_0)^{1/2} / k$, а α - коефіцієнт поглинання. Підставивши вираз (31) в рівняння (1), використовуючи розкладання (5') для величини періодичного обурення

$$\varepsilon_p(z) = \varepsilon(z) - \varepsilon_0 = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{m=+\infty} \varepsilon_m \exp\left(i \frac{2\pi}{a} mz\right)$$

і ввівши величину $\delta = k(\varepsilon'_0)^{1/2} - (\pi/a)$ для відгородження від n -го бреггівського резонансу, ми отримаємо одне точне рівняння, в яке входять амплітуди прямої $A^{(+)}(z)$ і зворотної $A^{(-)}(z)$ хвилі.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2 A^{(+)}}{dz^2} + 2ik\varepsilon_0^{1/2} \frac{dA^{(+)}}{dz} + k^2 A^{(+)} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{m=+\infty} \varepsilon_m \times \right. \\ & \left. \times \exp\left(i \frac{2\pi}{a} mz\right) \right] \exp\left(i \frac{\pi}{a} nz - \frac{\alpha - 2i\delta}{2} z\right) + \\ & + \left[\frac{d^2 A^{(-)}}{dz^2} - 2ik\varepsilon_0^{1/2} \frac{dA^{(-)}}{dz} + k^2 A^{(-)} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{m=+\infty} \varepsilon_m \times \right. \\ & \left. \times \exp\left(i \frac{2\pi}{a} mz\right) \right] \exp\left(-i \frac{\pi}{a} nz + \frac{\alpha - 2i\delta}{2} z\right) = 0 \end{aligned}$$

Якщо, згідно з Когельником, на періоді структури a має місце мале перетворення прямої хвилі $A^{(+)}(z)$ в зворотну $A^{(-)}(z)$, то функції $A^{(\pm)}(z)$,

їх похідні, а також множники $\exp\left(\pm \frac{\alpha - 2i\delta}{2} z\right)$ можна вважати постійними на періоді структури a . В такому випадку, послідовно помноживши рівняння (31) на

$$\exp\left(-i \frac{\pi}{a} nz + \frac{\alpha - 2i\delta}{2} z\right) \text{ і на}$$

$$\exp\left(i \frac{\pi}{a} nz - \frac{\alpha - 2i\delta}{2} z\right),$$

а потім, звівши до середніх даних отримані рівності по періоду структури " a ", отримаємо наближену систему пов'язаних рівнянь для амплітуд $A^{(\pm)}(z)$ прямої і зворотної хвилі [26]:

$$\frac{d^2 A^{(+)}(z)}{dz^2} + 2ik\varepsilon_0^{1/2} \frac{dA^{(+)}(z)}{dz} + k^2 \varepsilon_n \exp[(\alpha - 2i\delta)z] A^{(-)}(z) = 0,$$

$$\frac{d^2 A^{(-)}(z)}{dz^2} - 2ik\varepsilon_0^{1/2} \frac{dA^{(-)}(z)}{dz} + k^2 \varepsilon_{-n} \exp[-(\alpha - 2i\delta)z] A^{(+)}(z) = 0$$

При усередненні по періоду в сумах по " m " в нуль перетворювались всі складові, лише за винятком резонансних доданків відповідно з $m = n$ і $m = -n$, а також в нуль перетворювались вирази, що містять $A^{(\pm)}(z)$ і їх похідні, що помножені на $\exp(\pm i2\pi n z/a)$.

Умови сталості на періоді " a " амплітуд $A^{(\pm)}(z)$ і їх похідних, а також співмножників $\exp[\pm(\alpha - 2i\delta)z]$ виконується тоді, коли

$$\alpha a \ll 1, |\delta|a \ll 1, |\chi_{\pm n}|a \ll 1, \text{ або}$$

$$\frac{\pi}{2} n |\varepsilon_{\pm n}| / |\varepsilon_0| \ll 1$$

(33a)

$$\text{де } \delta = k(\varepsilon'_0)^{1/2} - \frac{\pi}{a} n, \chi_{\pm n} = k\varepsilon_{\pm n} / 2\varepsilon_0^{1/2}, k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

(33б)

При виведенні останньої нерівності в (33a) була використана умова бреггівського резонансу.

Система рівнянь (33) з постійними коефіцієнтами, що пов'язує амплітуди $A^{(+)}(z)$ і $A^{(-)}(z)$, може бути розв'язана за допомогою стандартної експоненційної підстановки. Однак в найбільш поширеному методі Когельника зазвичай нехтують другими похідними від $A^{(\pm)}(z)$ в системі (33). Тоді ці рівняння переходять в стандартну систему рівнянь зв'язаних хвиль Когельника:

$$\frac{dA^{(+)}(z)}{dz} = i\chi_n \exp[(\alpha - 2i\delta)z] A^{(-)}(z),$$

$$\frac{dA^{(-)}(z)}{dz} = -i\chi_{-n} \exp[-(\alpha - 2i\delta)z] A^{(+)}(z),$$

де $\chi_{\pm} = k\varepsilon_{\pm n} / 2\varepsilon_0^{1/2}$

α - коефіцієнт поглинання

δ - відгородження від n -го бреггівського резонансу.

Аналогічну систему наближених рівнянь можна отримати і з інтегрального рівняння (7), якщо в нього підставити рішення (31), розбити області інтегрування по dz' на дві, де $z - z'$ має певний знак, а потім прирівняти коефіцієнти перед $\exp(\pm ik\varepsilon_0^{1/2} z)$ в лівій і в правій частині рівності (7). Тоді отримаємо точну систему інтегральних рівнянь

$$A^{(+)}(z) = \frac{ik}{2\varepsilon_0^{1/2}} \int_{-\infty}^z dz' \varepsilon_p(z') \left[A^{(+)}(z') + A^{(-)}(z') \exp(-2ik\varepsilon_0^{1/2} z') \right] \quad (34')$$

$$A^{(-)}(z) = \frac{ik}{2\varepsilon_0^{1/2}} \int_z^{\infty} dz' \varepsilon_p(z') \left[A^{(-)}(z') + A^{(+)}(z') \exp(2ik\varepsilon_0^{1/2} z') \right]$$

Якщо знову використовувати умови (32а) наближення до n -го бреггівського резонансу і малості зміни амплітуд $A^{(\pm)}(z)$ на періоді, то систему (34') можна привести до системи (34) рівнянь зв'язаних хвиль. Однак система (34') точних інтегральних рівнянь буде зручна тим, що дозволить нам оцінювати наближення для $A^{(\pm)}(z)$, за допомогою простого ітераційного методу.

Загальне рішення системи наближених рівнянь (34) має вигляд:

$$A^{(+)}(z) = [C_1 \exp(-\gamma z) + C_2 \exp(\gamma z)] \exp\left[\left(\frac{\alpha}{2} - i\delta\right)z\right],$$

$$A^{(-)}(z) = \left[C_1 r_B^\infty \exp(-\gamma z) + \frac{\chi_{-n}}{\chi_n} \frac{1}{r_B^\infty} C_2 \exp(\gamma z) \right] \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{2} - i\delta\right)z\right],$$

в яких величини γ і r_B^∞ відповідно визначаються рівностями (28) і (30).

Постійні C_1 і C_2 визначаються з граничних умов для полів при $z = 0$ і $z = L$.

Саме таким чином рішення рівняння представляється у вигляді суперпозиції двох хвиль, що біжать назустріч одна одній.

2 ПРОСТОРОВИЙ РОЗПОДІЛ АМПЛІТУДИ ЗОВНІШНІХ І ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ В ОБМЕЖЕНІЙ БАГАТОШАРОВІЙ СТРУКТУРІ З ПЕРІОДИЧНОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

В попередньому розділі ми розглянули одновимірний випадок, після чого безпосередньо переходимо до аналізу самих шарів на прикладі симетричної меандрової структури, тобто такої, в якій неоднорідність є періодично розташованими однаковими прямокутними бар'єрами, з однаковими проміжками між ними.

2.1 Геометрія задачі

Геометрія завдання, показана на рис.1. Розглядається симетрична меандрова структура.

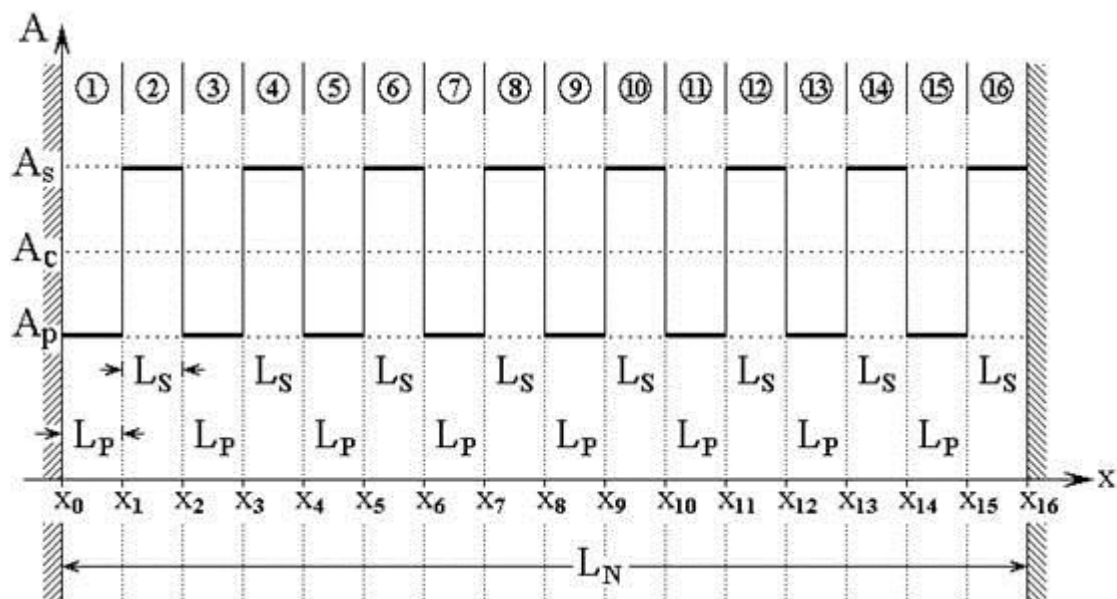


Рисунок 1- Загальна схема обмеженою багатошарової структури з періодичною неоднорідністю симетричного меандрового виду.

Цифри в колах - номери шарів (середовищ)

Структура містить два види середовищ, які позначаються далі індексами « P » і « S », кожен з яких має власні діелектричні ϵ_P, ϵ_S і магнітні μ_P, μ_S проникності, а також провідності σ_P, σ_S . Відкладені по вертикальній осі позначки $A_{P,S,C}$ відповідають адмітансам середовищ і пояснюються далі. Інші позначення подібні наведеними в [53] і зрозумілі з малюнка (деякі літери змінені, що зроблено для зручності подальшого пояснення).

2.2 Узагальнення на випадок електромагнітних хвиль

В роботі [53] розгляд проведено на основі хвильового числа, яке для одновимірної хвилі є визначальним параметром. Для електромагнітної хвилі з прикладного боку більш важливим параметром є частота, тому проведемо подальший розгляд спираючись саме на частоту падаючої хвилі. Для переходу від одновимірної хвилі до електромагнітної скористаємося правилами еквівалентності, наведеними в роботах [60-61].

У цьому розгляді для простоти розглянемо випадок нормального падіння хвилі, що не вимагає обліку складних кутових співвідношень. Будемо вважати, що всі середовища однорідні і ізотропні, тобто діелектрична і магнітна проникності, а також провідність всюди є постійними скалярними величинами.

Згідно [60-61], при цьому досить у всіх виразах, отриманих для одновимірної хвилі, крім показників експоненту, замінити хвильові числа величинами, зворотними відповідним імпедансу:

$$k_n \rightarrow 1/Z_n, \text{ де}$$

$$Z_n = \sqrt{\frac{\mu_n \mu_0}{\varepsilon_n \varepsilon_0}}, \quad (2)$$

До того ж, що μ_n і ε_n – магнітна і діелектрична проникності n -го шару, μ_0 і ε_0 – магнітна і електрична постійні системи СІ.

Як можна бачити з роботи [53], при методі покрокового алгоритму всі вирази виходять у вигляді лінійних комбінацій із хвильових чисел. При заміні (1) такі вирази будуть містити суми дробів зі знаменниками, що відрізняються, тому щоб уникнути необхідності їх сумовування, зручно імпеданс шарів замінити на зворотні їм величини - адмітанси:

$$A_n = \frac{1}{Z_n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_n \varepsilon_0}{\mu_n \mu_0}}. \quad (3)$$

У цьому випадку заміна (23) істотно спрощується і набуває вигляду: $k_n \rightarrow A_n$.

(4)

При цьому хвильові числа в показниках експоненту залишаються незмінними:

$$k_n = \omega \sqrt{\varepsilon_n \varepsilon_0 \mu_n \mu_0}, \quad (5)$$

де ω – частота, задається падаючою хвилею в першому або останньому шарі.

У разі електромагнітних хвиль замість одновимірних

амплітуд A_n і B_n присутні амплітуди електричного і магнітного полів E_n і H_n . Однак, як впливає з класики [63,64], а також для даної геометрії докладно показано в [60-62], магнітне поле хвилі в кожному шарі може бути представлено як похідна за часом від електричного поля в тому ж шарі, тому досить розглянути тільки амплітуди якогось одного поля, наприклад електричного.

Щоб розрізнити хвилі прямого і зворотного напрямків, електричні поля таких хвиль позначимо індексами: для прямого напрямку - індексом « A », для зворотного - « B », після них будемо приводити номер шару.

Як і в роботі [53], будемо вважати, що відображення хвиль при координатах x_0 і x_{16} відсутня, причому в середовищі №1 поширюється в позитивному напрямку хвиля з амплітудою E_{A01} , а в середовищі №16 - в негативному напрямку хвиля з амплітудою E_{B16} , обидві з яких по відношенню до структури в цілому є падаючими.

Для спрощення запису експоненти при

$1 \leq n \leq N$ введемо позначення:

$$e_n = \exp[-ik_n(x - x_{n-1})], \quad (6)$$

а також:

$$e_0 = \exp(i\varphi), \quad (7)$$

де φ – початкова фаза, яку без особливого обмеження спільності можна взяти рівною нулю.

2.3 Випадок провідного середовища

Якщо середовище має провідні властивості, то в цьому випадку для нього поряд з основними параметрами, такими як діелектрична і магнітна проникності ε і μ , найважливіше значення набуває провідність σ . Після чого розглянемо, як виражаються наведені заміни (4) - (5) через ці параметри. Для простоти подальшого запису, індекс « n » будемо опускати. При записі рівнянь електродинаміки для провідного середовища її провідність зручно включити в діелектричну проникність у вигляді уявної добавки [42-44]:

$$\varepsilon = \varepsilon_r - i \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (8)$$

де ε_r – дійсна частина хвильового числа.

При цьому повне хвильове число, стаючи комплексним, набуває вигляду:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu \mu_0} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu \mu_0 \left(\varepsilon_r - i \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)}. \quad (9)$$

Перетворюючи цю формулу за правилами добування квадратного кореня з комплексного числа [45], отримуємо:

$$k = \eta - i \cdot \xi, \quad \text{де:} \quad (10)$$

$$\eta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0}{2} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}};$$

(11)

$$\xi = \omega \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0}{2} \cdot \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}$$

(12)

Саме в такому вигляді хвильове число буде входити в показник експоненту.

Проаналізуємо тепер, як перетворюється адмітанс в середовищі з провідністю, для чого підставимо (8) в (3) і

В результаті маємо:

$$A = \delta - i \cdot \varepsilon,$$

(13)

де:

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2 \mu \mu_0} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}};$$

(14)

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2 \mu \mu_0} \cdot \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \omega} \right)^2} \right\}}$$

(15)

У такому вигляді адмітанси входять в лінійні суми виразів, які утворюються в ході реалізації покрокового алгоритму.

З наведених формул можна бачити, що дійсні та уявні частини хвильового числа і адмітанса зв'язані співвідношеннями:

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{\xi}{\varepsilon} = \omega \mu \mu_0 \quad (16)$$

2.4 Особливості геометрії завдання для випадку електромагнітних хвиль

Дотримуючись загальних правил, що були сформульовані у попередньому розділі, внесемо деяку корекцію в геометрію даної задачі в порівнянні з випадком одновимірної хвилі. В одновимірному випадку вважалося, що структура містить два види середовищ з хвильовими числами k_p і k_s , причому:

$$k_p \leq k_s \quad (17)$$

Переходячи на адмітанси відповідно до (4), отримуємо:

$$A_p \leq A_s \quad (18)$$

Аналогічно [30] можна ввести середнє значення адмітанса:

$$A_c = \frac{A_p + A_s}{2}, \quad (19)$$

а також добавку до нього ΔA_c , таку, що:

$$A_p = A_c - \Delta A_c; \quad (20)$$

$$A_s = A_c + \Delta A_c. \quad (21)$$

Зауваження. Відповідно до (5), з (17) отримуємо:

$$\varepsilon_p \mu_p \leq \varepsilon_s \mu_s \quad (22)$$

З іншого боку, з (18), відповідно до (3), отримуємо:

$$\varepsilon_p \mu_s \leq \varepsilon_s \mu_p \quad (23)$$

При $\mu_p = \mu_s$, що має місце в більшості немагнітних середовищ, особливо в оптичному діапазоні, співвідношення (22) і (23) збігаються один з одним, однак при довільних значеннях μ_p і μ_s вони можуть відрізнятись, в результаті чого співвідношення (23) може бути зворотним, тобто A_p і A_s на рис.1 треба поміняти місцями. При таких обставинах необхідно враховувати, що в разі магнітних середовищ, особливо на частотах, відповідних феромагнітному резонансу в одній з груп шарів, що магнітна проникність може зрости на кілька порядків [59]. Даний випадок виходить за рамки цієї роботи і вимагає більш докладного розгляду. Тут же обмежимося випадком (22) і далі з позицій багатобар'єрних структури [53] будемо розглядати A_p як величину адмітанса, що відповдає проміжкам між бар'єрами, а за величину адмітанса, відповідну бар'єрам, приймемо A_s .

2.5 Схема розрахунку методом покрокового алгоритму

Для розрахунку амплітуд в шарах багатошарової структури, як і в випадку одновимірної задачі [53], будемо розглядати метод покрокового алгоритму [54-55], що дозволяє отримати значення амплітуд у всіх шарах. Наведемо спочатку

загальну схему методу, після чого дамо її аналітичну реалізацію.

2.6 Загальна схема покрокового алгоритму

Загальна схема покрокового алгоритму аналогічна, як і для одновимірної хвилі [53]. Алгоритм містить два етапи, які перебувають в послідовному проходженні по шарам структури від одного кінця структури до іншого і назад.

На першому етапі за допомогою простих правил задаються допоміжні величини, що визначаються параметрами першого шару. З них на основі параметрів першого і другого шарів формуються нові величини, що належать другому шару. Потім таким же чином з величин другого шару формуються величини третього шару і так далі до тих пір, поки всі шари структури не будуть вичерпані. Формування наступних величин з попередніх проводиться шляхом збільшення порядкових індексів усіх попередніх величин на одиницю. Другий етап починається з формування допоміжних величин, визначених параметрами останнього шару структури. Далі з цих величин з використанням параметрів останнього і передостаннього шарів формуються подібні величини для передостаннього шару і так далі. Процедура формування наступних величин з попередніх полягає в зменшенні порядкових індексів усіх попередніх величин на одиницю.

З усіх величин, одержуваних на обох етапах, за допомогою простих правил підсумовування формуються детермінанти, що визначають амплітуди хвиль усередині шарів.

2.7 Аналітична реалізація алгоритму

Аналітична реалізація покрокового алгоритму для електромагнітної хвилі подібна як і для одновимірної хвилі з урахуванням заміни, наведених в

попередніх розділах. Викладемо далі її в послідовному вигляді.

Етап №1.

Вводимо допоміжне позначення:

$$T_0 = I, \tag{24}$$

а також вважаємо початкову трійку основних позначень:

$$P_1 = I, \tag{25}$$

$$Q_1 = 0, \tag{26}$$

$$T_1 = T_0 \cdot 2A_1 e_1. \tag{27}$$

З використанням (25) - (27) формуємо нову трійку виразів:

$$P_2 = P_1(A_1 + A_2) + Q_1(A_1 - A_2) \cdot e_1^2, \tag{28}$$

$$Q_2 = P_1(A_1 - A_2) + Q_1(A_1 + A_2) \cdot e_1^2, \tag{29}$$

$$T_2 = T_1 \cdot 2A_2 e_2. \tag{30}$$

Далі, збільшуючи порядкові номери індексів на одиницю, маємо таку трійку подібних виразів і так далі, аж до P_N, Q_N, T_N . Загальні формули для отримання наступних виразів з попередніх при довільному номері n мають вигляд:

$$P_{n+1} = P_n(A_n + A_{n+1}) + Q_n(A_n - A_{n+1}) \cdot e_n^2, \quad (31)$$

$$Q_{n+1} = P_n(A_n - A_{n+1}) + Q_n(A_n + A_{n+1}) \cdot e_n^2, \quad (32)$$

$$T_{n+1} = T_n \cdot 2A_{n+1}e_{n+1}. \quad (33)$$

Процес закінчується при досягненні n значення. $N-1$ При цьому отримуємо:

$$P_N = P_{N-1}(A_{N-1} + A_N) + Q_{N-1}(A_{N-1} - A_N) \cdot e_{(N-1)}^2, \quad (34)$$

$$Q_N = P_{N-1}(A_{N-1} - A_N) + Q_{N-1}(A_{N-1} + A_N) \cdot e_{(N-1)}^2, \quad (35)$$

$$T_N = T_{N-1} \cdot 2A_N e_N. \quad (36)$$

Етап №2.

Введемо інше допоміжне позначення:

$$U_{N+1} = 1, \quad (37)$$

а також покладемо іншу початкову трійку основних позначень, індекси яких задамо рівними повній кількості шарів:

$$R_N = 1, \quad (38)$$

$$S_N = 0,$$

(39)

$$U_N = U_{N+1} \cdot 2A_N e_N.$$

(40)

З використанням (38) - (40) формуємо трійку виразів:

$$R_{N-1} = (A_{N-1} + A_N)R_N + (A_{N-1} - A_N)S_N \cdot e_N^2;$$

(41)

$$S_{N-1} = (A_{N-1} - A_N)R_N + (A_{N-1} + A_N)S_N \cdot e_N^2;$$

(42)

$$U_{N-1} = U_N \cdot 2A_{N-1} e_{N-1}.$$

(43)

Далі, зменшуючи порядкові номери індексів на одиницю, маємо таку трійку подібних виразів і так далі, аж до P_1, Q_1, U_1 . Загальні формули для отримання наступних виразів з попередніх при довільному номері n мають вигляд:

$$R_{n-1} = (A_{n-1} + A_n)R_n + (A_{n-1} - A_n)S_n \cdot e_n^2;$$

(44)

$$S_{n-1} = (A_{n-1} - A_n)R_n + (A_{n-1} + A_n)S_n \cdot e_n^2;$$

(45)

$$U_{n-1} = U_n \cdot 2A_{n-1} e_{n-1}.$$

(46)

Процес закінчується при досягненні значення. При цьому отримуємо:

$$R_1 = (A_1 + A_2)R_2 + (A_1 - A_2)S_2 \cdot e_2^2;$$

(47)

$$S_1 = (A_1 - A_2)R_2 + (A_1 + A_2)S_2 \cdot e_2^2;$$

(48)

$$U_1 = U_2 \cdot 2A_1 e_1.$$

(49)

Формування детермінантів:

з отриманих виразів формуємо детермінанти наступним чином:

$$D_0 = R_1 - Q_1;$$

(50)

$$D_{EB1} = E_{A01} \cdot S_1 \cdot T_0 \cdot e_1 + E_{BN} e_0 \cdot P_1 \cdot U_2;$$

(51)

$$D_{EA2} = E_{A01} \cdot R_2 \cdot T_1 - E_{BN} e_0 \cdot Q_2 \cdot U_3 \cdot e_2;$$

(52)

$$D_{EB2} = E_{A01} \cdot S_2 \cdot T_1 \cdot e_2 + E_{BN} e_0 \cdot P_2 \cdot U_3;$$

(53)

$$D_{EAn} = E_{A01} \cdot R_n \cdot T_{n-1} - E_{BN} e_0 \cdot Q_n \cdot U_{n+1} \cdot e_n;$$

(54)

$$D_{EBn} = E_{A01} \cdot S_n \cdot T_{n-1} \cdot e_n + E_{BN} e_0 \cdot P_n \cdot U_{n+1};$$

(55)

$$D_{EAN} = E_{A01} \cdot R_N \cdot T_{N-1} - E_{BN} e_0 \cdot Q_N \cdot U_{N+1} \cdot e_N;$$

(56)

$$D_0 = S_N + P_N. \quad (57)$$

Тут індекси детермінантів відповідають номеру шару, а вираження (50) і (57), що визначають D_0 , і хоч записи мають різний вигляд, тотожно вони рівні.

Знайдені детермінанти (50) - (57) дозволяють визначити амплітуди всіх хвиль через E_{A01} та E_{BN} за допомогою формул, які задають амплітуди хвиль в точках їх результату:

$$E_{An} = \frac{D_{EAn}}{D_0}; \quad E_{Bn} = \frac{D_{EBn}}{D_0}. \quad (58)$$

При цьому амплітуда хвилі, що виходить зі структури в позитивному напрямку осі Ox , в точці x_N дорівнює:

$$E_{ANT} = \frac{D_{EAN}}{D_0} \cdot e_N; \quad (59)$$

а амплітуда хвилі, що виходить в негативному напрямку осі Ox , в точці x_0 дорівнює:

$$E_{BIT} = \frac{D_{EB1}}{D_0} \cdot e_1. \quad (60)$$

Описаний тут метод буде далі застосований для чисельного розрахунку амплітуд хвиль прямого і зворотного напрямків в структурі, схема якої показана

на рис.1. Перейдемо до опису результатів розрахунків.

2.8 Амплітуди хвиль в крайніх шарах структури

Розглянемо спочатку амплітуди хвиль в крайніх шарах структури при зміні частоти. Структура містить 16 шарів, з яких 7 є бар'єрами з діелектричної проникністю вище, ніж у проміжних. Бар'єрами є шари з парними номерами від №2 до №14, проміжними - з непарними від №1 до №15, останній шар №16 має ті ж параметри, що і №15, тобто параметри проміжного. Це зроблено для того, щоб параметри обох зовнішніх середовищ були однаковими. Повна довжина структури $L_N = 8 \text{ см}$, товщина одного шару $L_S = L_P = 0.5 \text{ см}$. На структуру падає одна хвиля прямого напрямку з амплітудою E_{A01} (при цьому $E_{B16} = 0$). На цьому етапі розглядається інтервал зміни частоти падаючої хвилі f від 5 ГГц до 20 ГГц .

На рис.2 показана залежність нормованих амплітуд хвиль зворотного (а, б, в) і прямого (г, д, е) напрямків в крайніх шарах структури від частоти падаючої хвилі. По горизонтальних рядах малюнка збільшується діелектрична проникність бар'єра: в першому ряду (а, г) вона дорівнює $\epsilon_S = 1.1$, що мало відрізняється від проникності проміжку $\epsilon_S = 1.0$, в другому ряду (б, д) - $\epsilon_S = 1.4$, що відрізняється трохи більше, в третьому ряду (в, е) - $\epsilon_S = 3.0$, що перевищує проникність проміжку в три рази.

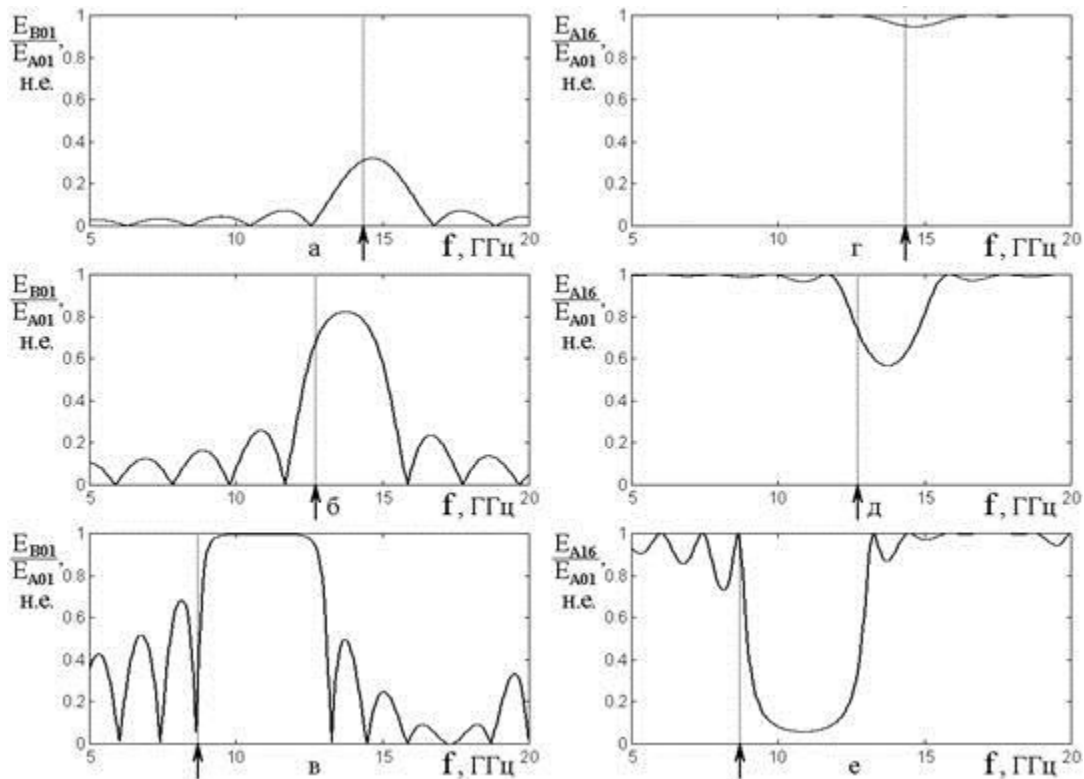


Рис.2. Залежність нормованих амплітуд хвиль в крайніх шарах структури від частоти падаючої хвилі. а, б, в - хвиля зворотного напрямку в шарі №1. г, д, е - хвиля прямого напрямку в шарі №16.

Параметри матеріалу середовищ:

$$\mu_{p,s} = 1.0; \quad \sigma_{p,s} = 0.0;$$

$$а, г - \varepsilon_s = 1.1; \quad б, д - \varepsilon_s = 1.4; \quad в, е - \varepsilon_s = 3.0.$$

З рисунку видно, що зі збільшенням різниці між діелектричною проникністю бар'єру і проміжку амплітуди хвиль обох напрямків зростають, причому це зростання для хвиль зворотного напрямку (а, б, в) виражено сильніше, ніж для хвиль прямого напрямку (г, д, е). Залежності для амплітуди хвиль прямого напрямку (г, д, е) симетричні відносно горизонтальної осі залежностям для амплітуд хвиль зворотного напрямку (а, б, в) з тією відмінністю, що для них амплітуда дещо менша, причому ця різниця зі збільшенням проникності ε_s

зменшується. Так при $\varepsilon_s = 1.1$ відмінність складає близько п'яти разів, при $\varepsilon_s = 1.4$ - близько двох разів, при $\varepsilon_s = 3.0$ амплітуда хвиль прямого напрямки вже наближається до амплітуди хвиль зворотного напрямку і становить від неї близько 95%.

Загальний вигляд тих і інших залежностей є велика центральна пелюстка, по обидва боки від якого розташовуються пелюстки-сателіти, амплітуда яких в міру віддалення від центральної пелюстки спадає. Так при $\varepsilon_s = 1.1$ сателіти вже центральної пелюстки приблизно в два рази, тоді як при $\varepsilon_s = 3.0$ відмінність ширини досягає вже п'яти разів.

Як і в роботі [53], багатопелюстковий характер обох залежностей обумовлений інтерференційними явищами при багаторазовому перевідбитті хвиль обох напрямків. Зауважимо, що, в порівнянні з роботою [53, рис.2], багатопелюстковий характер амплітуди тут виражений сильніше, ніж для розглянутої там одновимірної хвилі, що, мабуть, обумовлено тим що там змінювалося тільки одне хвильове число бар'єру k_s , тоді як хвильовий число проміжку k_p залишалося незмінним, тут же при зміні частоти змінюються обидва хвильових числа k_s і k_p , відповідно до формули (5).

Сукупність розташованих один за одним бар'єрів є ланцюжком однакових послідовно з'єднаних через проміжки напівхвильових резонаторів. Для кожного з таких резонаторів власна довжина хвилі пов'язана з довжиною бар'єру співвідношенням:

$$\lambda_s^{(res)} = 2 \cdot L_s, \quad (61)$$

тобто резонансна частота має вигляд:

$$f_s^{(res)} = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_s \mu_s} \cdot L_s}, \quad (62)$$

де $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ - швидкість електромагнітної хвилі у вільному просторі ($3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$).

Підставляючи в цю формулу $\epsilon_s = 1.1$ отримуємо частоту 14.302 ГГц , підставляючи $\epsilon_s = 1.4$, отримуємо 12.677 ГГц , підставляючи $\epsilon_s = 3.0$, отримуємо 8.660 ГГц . На відповідних епюрах ці значення частот показані стрілками на горизонтальній осі і вертикальними точковими лініями.

Видно, що розрахункові значення частот завжди лежать трохи нижче положення максимумів головної пелюстки, причому ця неузгодженість зі збільшенням ϵ_s зростає. Так для $\epsilon_s = 1.1$ воно не перевищує 3% від частоти максимуму, для $\epsilon_s = 1.4$ становить близько 7% , а для $\epsilon_s = 3.0$ досягає 21% . В останньому випадку розрахункове значення частоти припадає якраз на нижчий за частотою край головної пелюстки.

Додаткове дослідження показує, що якщо тепер зафіксувати значення діелектричної проникності бар'єру ϵ_s на досить високому рівні і підвищувати значення діелектричної проникності проміжку ϵ_p , наближаючи її до проникності бар'єру, то центральна частота головної пелюстки знижується, прагнучи до резонансної частоти бар'єру. Так при $\epsilon_s = 3.0$ і $\epsilon_p = 2.9$ максимум головної пелюстки складає 8.720 ГГц , що вже дуже близько до резонансної частоти для бар'єру, рівній 8.660 ГГц . Амплітуда максимуму при цьому також різко знижується, для відображення

складаючи 0.12 н.е., а для проходження – близько 0.01 н.е.

Таким чином, частота головної пелюстки, хоча і визначається в першу чергу діелектричною проникністю бар'єру, але відхиляється від резонансної частоти бар'єру вниз сильніше, чим більше розходження діелектричної проникності бар'єру і проміжку.

2.9 Зміна числа бар'єрів

Відповідно до прийнятої постановці завдання, структура містить кінцеве число однакових бар'єрів, розділених однаковими проміжками, геометрична довжина яких дорівнює геометричній довжині бар'єрів. Розглянемо спочатку, як змінюються частотні властивості структури в залежності від повного числа складових структури бар'єрів. Будемо вважати, що відмінність параметрів бар'єрів і проміжків недостатньо для наближення коефіцієнтів відбиття і проходження структури в цілому до одиниці (тобто той чи інший коефіцієнт становить не більше ~ 0.95).

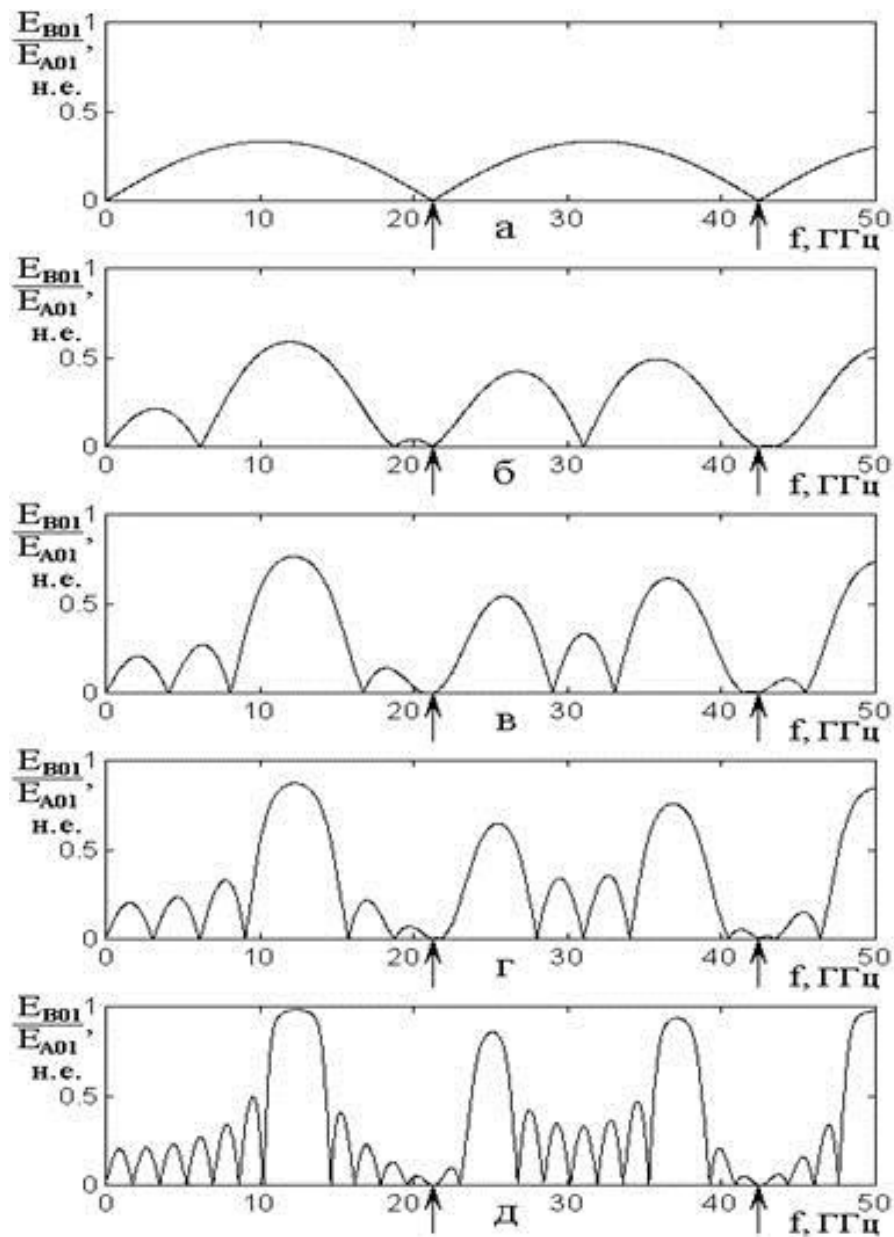


Рис.3. Залежність нормованої амплітуди хвилі зворотного напрямку в шарі №1 від частоти при різній кількості бар'єрів: а - 1; б - 2; в - 3; г - 4; д - 7.

Крок за частотою - 0.04 ГГц . Параметри матеріалу середовищ:

$$\varepsilon_p = 1, \varepsilon_s = 2.0, \mu_{p,s} = 1, \sigma_{p,s} = 0$$

Частотні характеристики такої структури ілюструються рис.3, де показані залежності нормованої амплітуди хвилі зворотного напрямку в шарі №1 від частоти при різній кількості бар'єрів. Хвиля падає на структуру тільки з шару

№1, тобто E_{AO1} відмінно від нуля, тоді як $E_{B10} = 0$.

Ситуація, що спостерігається відповідає частотній залежності коефіцієнта відбиття (за амплітудою). Оскільки $\sigma_{p,s} = 0$, то загасання хвилі відсутнє, тобто коефіцієнт поглинання дорівнює нулю, а частотна залежність коефіцієнт проходження аналогічна такій для коефіцієнта відбиття з точністю до зворотного знака по амплітуді (як описано в роботі [60-62,70,71]), тому на даному етапі не розглядається.

2.10 Мінімальні значення амплітуди

З рисунку видно, що частотні залежності мають вид багатопелюсткового повторення кривих, схожих на позитивний напівперіод синусоїди, причому в міру збільшення числа бар'єрів кількість пелюсток збільшується.

При єдиному бар'єрі (рис.3а) залежність має вигляд періодично повторюється чіткої половини синусоїди. При заданих параметрах матеріалу бар'єру довжина хвилі в його межах дорівнює $\lambda_s = 1.0 \text{ см}$. З огляду на те, що довжина бар'єру дорівнює $L_s = 0.5 \text{ см}$, можна бачити, що в цьому випадку на довжині бар'єру укладається якраз половина довжини хвилі. Таким чином, мінімум відображення тут відповідає добре відомій в оптиці властивості напівхвилевої пластинки, що впливає з втрати напівхвилі при відображенні від менш щільного середовища [72,73]. Частотні положення, що йдуть один за одним, визначаються формулою:

$$f_s^{(min)} = \frac{c \cdot n^{(min)}}{2 \sqrt{\epsilon_s \mu_s} \cdot L_s},$$

(63)

де $n^{(min)}$ – порядковий номер мінімуму, який показує, скільки півхвиль укладається по довжині бар'єру, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ – швидкість електромагнітної хвилі у вільному просторі ($3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$).

При $\epsilon_s = 2$, $\mu_s = 1$ і $L_s = 0.5 \text{ см}$ перший мінімум відповідає частоті 21.213 ГГц , другий 42.426 ГГц , третій 63.639 ГГц – і так далі. Положення перших двох мінімумів відзначені на малюнку стрілками, що прямують знизу до горизонтальної осі.

При збільшенні числа бар'єрів (рис.3б-3д) положення по частоті цих основних мінімумів зберігаються (відзначені стрілками), проте з'являються нові додаткові мінімуми, частоти яких вже не вкладаються прості співвідношення і вимагають більш докладного розгляду умов інтерференції. Не вдаючись в такий розгляд, зазначимо тут лише найбільш явні особливості спостережуваної картини.

Так при двох бар'єрах (рис.3б) крім основних з'являються мінімуми при (в ГГц): 6.100 , 18.700 , 31.020 , 43.420 , тобто нижче першого основного (21.213) – два додаткових (6.100 , 18.700), між першим і другим основними (21.210 , 42.420) – один додатковий (31.020) і вище в межах шкали малюнка ще один додатковий (43.420). При трьох бар'єрах (рис.3в) нижче першого основного з'являються чотири додаткових, між основними – три і вище ще один. При чотирьох (рис.3г) нижче першого – п'ять, між основними – п'ять. При семи бар'єрах (рис.3д) нижче першого – десять, між основними – дев'ять.

Таким чином, при збільшенні числа бар'єрів кількість мінімумів завжди зростає, як нижче першого мінімуму, так і між двома основними. При цьому при збільшенні числа бар'єрів від двох до чотирьох кількість мінімумів $N^{(min)}$ між основними підпорядковується співвідношенню:

$$N^{(min)} = 2 \cdot n_s - 3, \quad (64)$$

де n_s – число бар'єрів. Однак це співвідношення не можна вважати бездоганним. Так, можна було б очікувати, що при $n_s = 7$ кількість мінімумів між основними має дорівнювати одинадцяти, проте з рис.3д видно, що в цьому інтервалі мінімумів всього дев'ять. Більш точна перевірка з кроком по частоті в 0.001 ГГц (1.0 МГц) показала, що на малюнку мінімуми при 21.210 і 21.296 ГГц не дозволені через їх надзвичайну близькість. Однак між основними було виявлено не одинадцять, а всього десять мінімумів, тобто знову-таки на одиницю менше наведеного співвідношення. Можливою причиною порушення співвідношення (87) при збільшенні числа бар'єрів може зрости складність інтерференційної картини при численному перевідбитті хвиль всередині структури.

2.11 Максимальні значення амплітуди

Звернемося тепер до розгляду головних максимумів наведених залежностей, що мають найбільшу амплітуду.

При єдиному бар'єрі (рис.3) залежність амплітуди від частоти в даному інтервалі частот має два максимуми - при 10.580 ГГц частотах і 31.820 ГГц , які відповідають укладанню по довжині бар'єру непарного числа чвертей довжини хвилі. Частотні положення максимумів відображення, що йдуть один за одним визначаються формулою:

$$f_s^{(max)} = \frac{c \cdot (2n^{(max)} - 1)}{4 \sqrt{\epsilon_s \mu_s} \cdot L_s},$$

(65)

де $n^{(max)}$ – порядковий номер максимуму, при якому на довжині бар'єру укладається $2n^{(max)} - 1$ чверті довжин хвиль, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ - швидкість електромагнітної хвилі у вільному просторі ($3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$). Таким чином, максимум відображення тут також відповідає відомій в оптиці властивості четвертьхвильової пластинки [73,73]. При більшій кількості бар'єрів картина максимумів, як і мінімумів, також не піддається настільки простому розрахунку, тому відзначимо лише її основні особливості.

При збільшенні числа бар'єрів положення по частоті спостережуваних на рис.3 максимумів зміщуються трохи вгору, при двох бар'єрах (рис.3б) приймаючи значення 11.940 ГГц і 35.780 ГГц , а при семи бар'єри (рис.3д) 12.380 ГГц і 37.100 ГГц відповідно. Однак, починаючи з двох бар'єрів (рис.3б), між ними з'являється ще один додатковий максимум при 26.780 ГГц , який при збільшенні числа бар'єрів зміщується не вгору, а вниз, що виходить при семи бар'єрах (рис.3д) на частоту 25.100 ГГц .

При такій трансформації відповідні максимумам пелюстки значно звужуються. Так по відстані між двома найближчими мінімумами ширина обох пелюсток при одному бар'єрі становить 21.213 ГГц . При двох бар'єри ширина основних пелюсток складає: нижнього по частоті - 12.600 ГГц , верхнього - 11.400 ГГц , а ширина пелюстки між ними - 9.820 ГГц . При семи бар'єрах ці ж величини зменшуються до 4.400 , 4.000 і 3.760 ГГц відповідно.

Амплітуди всіх максимумів при збільшенні числа бар'єрів зростають. Так при одному бар'єрі амплітуди обох основних максимумів рівні 0.333 н.е. , при двох бар'єри амплітуда нижчого за частотою максимуму становить 0.588 н.е. , а

вищого - 0.491 н.е. Амплітуда знаходиться між ними додаткового максимуму дорівнює 0.423 н.е. При семи бар'єри ці ж величини відповідно рівні 0.982 н.е. , 0.936 н.е. і 0.859 н.е. Тобто додатковий максимум звужується швидше, але за амплітудою росте трохи повільніше основних.

2.12 Розподіл амплітуд в шарах при великій варіації параметрів

Розглянемо розподіл амплітуд в шарах при великій зміні параметрів матеріалу від шару до шару. Обмежимося розглядом хвиль прямого напрямку, так як характер розподілу хвиль зворотного напрямку аналогічний подібному в роботі [53].

Зауваження. В роботі [53] наведені далі залежності амплітуд хвиль в шарах від координати по довжині структури, отримані для одновимірної хвилі, названі «режимами». Однак, як показано там же, різких кордонів між такими «режимами» немає, причому принципово відрізняються один від одного тільки два: №1 і №4 - синусоїдальний і експонентний. Тому в даній роботі вважатиметься за краще відмовитися від назви «режими» і замінити їх більш природною назвою «розподіли», яка і буде використовуватися далі.

На рис.4 показані розподіли нормованих амплітуд хвиль прямого напрямку в шарах від координати при різних частотах падаючої хвилі. Епюри розставлені по частоті і згруповані за стовпцями відповідно до характерних частотних областей розподілів. Потовщені горизонтальні лінії - амплітуди хвиль прямого напрямку в відповідних шарах. Укрупнені точки відповідають серединам перепадів амплітуд між сусідніми шарами. Потовщені суцільні криві побудовані за емпіричними формулами синусоїди, прямої або експоненти

З рисунка можна бачити, що тут в разі електромагнітної хвилі присутні ті ж основні види розподілу амплітуди, що і в разі одновимірної. Головними

видами є синусоїдальне і експоненціальне. Ці види розподілу при зміні частоти чергуються один за одним, а перехід між ними відбувається за рахунок напівсинусоїдального і лінійного розподілу.

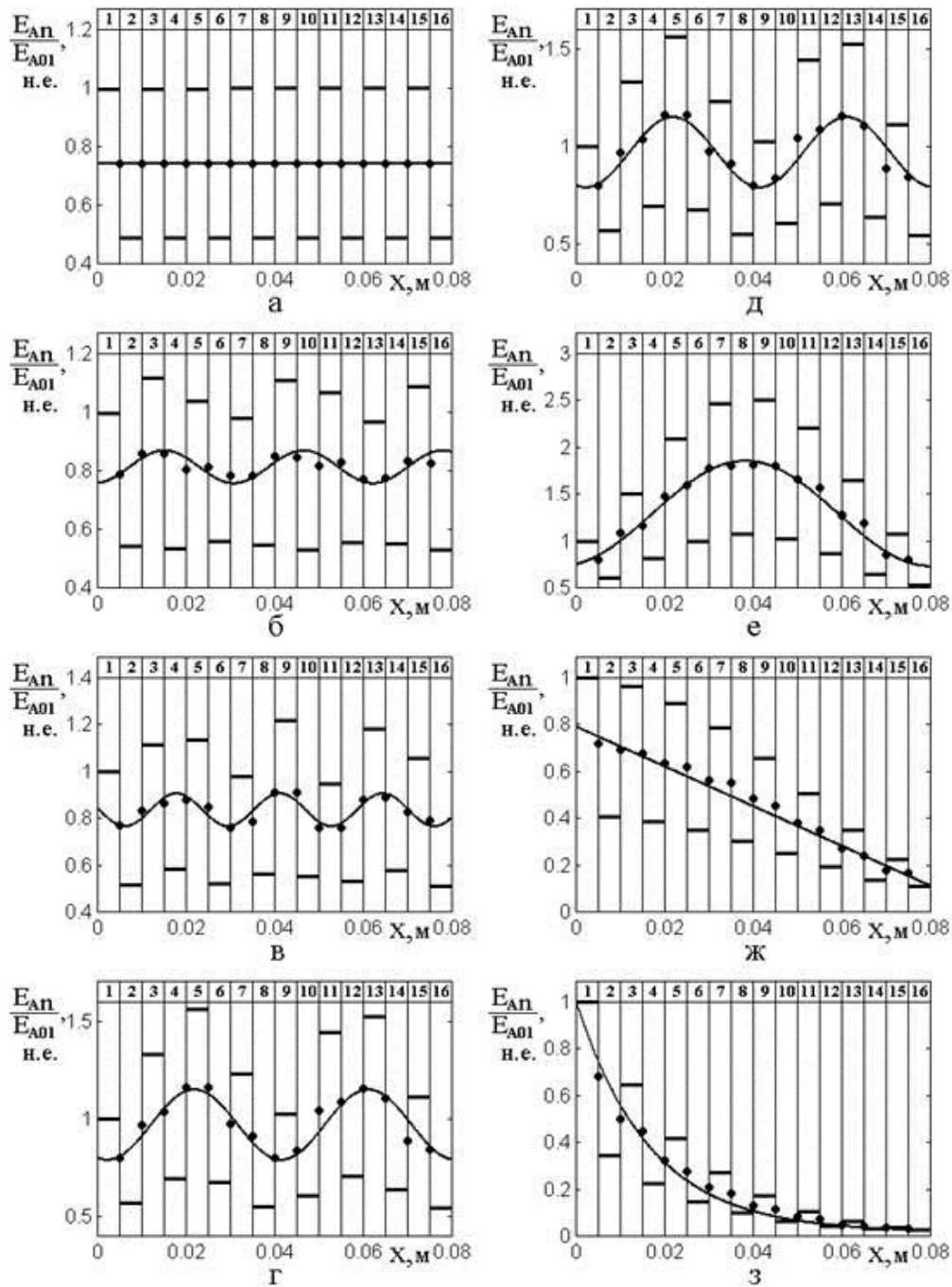


Рис.4. Розподіл нормованих амплітуд хвиль прямого напрямку в шарах від координати при різних частотах падаючої хвилі.

Цифри в верхньому ряду - номери шарів. Параметри матеріалу шарів:

$$\varepsilon_p = 1, \quad \varepsilon_s = 10, \quad \mu_{p,s} = 1, \quad \sigma_{p,s} = 0$$

Частоти наступні:

$$\begin{aligned} \text{а} - 0.05 \text{ ГГц}; \quad \text{б} - 2.00 \text{ ГГц}; \quad \text{в} - 3.60 \text{ ГГц}; \quad \text{г} - 4.40 \text{ ГГц}; \\ \text{д} - 4.40 \text{ ГГц}; \quad \text{е} - 4.95 \text{ ГГц}; \quad \text{ж} - 5.10 \text{ ГГц}; \quad \text{з} - 5.40 \text{ ГГц}. \end{aligned}$$

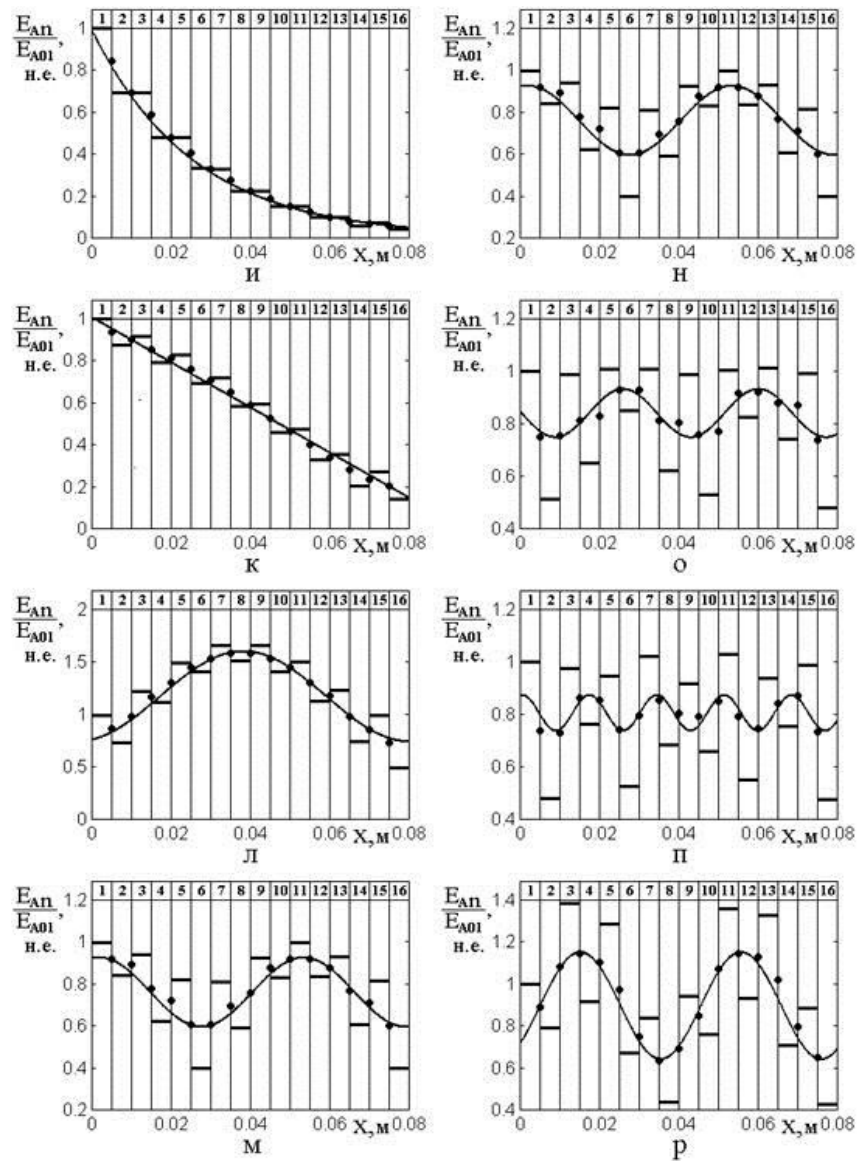


Рис.4 (продовження).

Частоти наступні:

$$\begin{aligned} \text{и} - 8.40 \text{ ГГц}; \text{к} - 8.60 \text{ ГГц}; \text{л} - 8.75 \text{ ГГц}; \text{м} - 9.00 \text{ ГГц}; \\ \text{н} - 9.00 \text{ ГГц}; \text{о} - 9.40 \text{ ГГц}; \text{п} - 10.00 \text{ ГГц}; \text{р} - 11.50 \text{ ГГц}. \end{aligned}$$

Якщо за точку переходу від синуса до експоненті вважати пряму лінію, то переходи відповідають частотам 5.10 ГГц (рис.4ж) і 8.60 ГГц (рис.4к). Наступні точки подібного переходу відповідають частотам 12.00 ГГц , і 15.50 ГГц так далі з інтервалами по $3.45 \pm 0.05 \text{ ГГц}$.

На частотах нижче $\sim 1.50 \text{ ГГц}$ залежність розподілу амплітуд від координати практично відсутня, причому це відсутність виражена тим сильніше, ніж частота нижче, так що для частоти 0.05 ГГц зміна амплітуди в шарах становить менше 0.1% (рис.4а). При збільшенні частоти помітно вище 1.50 ГГц розподіл поступово набуває синусоїдального характеру і при частоті 2.00 ГГц (рис.4б) зміна амплітуди досягає вже 10% .

Розподіл амплітуд в інтервалі від 2.00 ГГц (рис.4б) до 4.40 ГГц (рис.4д) носить типовий синусоїдальний характер. На малюнку повної еволюції розподілу амплітуд від відсутності розподілу до кінця синусоїдального відповідає перший стовпець від 4а до 4г. Рахуючи від нуля, ширина повного інтервалу по частоті тут становить близько 4.40 ГГц

Однак при подальшому збільшенні частоти всього на 0.55 ГГц тобто вже на частоті 4.95 ГГц синусоїдальний розподіл змінюється напівсинусоїдальним (рис.4), який при подальшому збільшенні частоти на 0.15 ГГц до 5.10 ГГц переходить в лінійний (рис.4ж), а потім при збільшенні ще

на 0.30 ГГц до 5.40 ГГц - в експоненціальний (рис .4з). Таким чином, повний інтервал зміни синусоїдального розподілу на експоненціальний укладений між 4.40 ГГц і 5.40 ГГц , якому на малюнку відповідає другий стовпець (від 4д до 4з), причому цей інтервал становить не більше 1.00 ГГц .

Далі аж до частоти 8.40 ГГц розподіл є експоненціальним (рис.4). Повний інтервал експоненціального розподілу становить не менше 3.00 ГГц

При збільшенні частоти з 8.40 ГГц до 8.60 ГГц експоненціальний розподіл переходить в лінійний (рис.4к), потім при частоті 8.75 ГГц - в напівсинусоїдальний (рис.4л), після чого, починаючи з частоти 9.00 ГГц , в синусоїдальний (4м). Ця трансформація представлена третім стовпцем малюнка. Інтервал тут становить 0.60 ГГц .

Далі синусоїдальний розподіл, зазнаючи деяких варіацій періоду, як це показано на рис.4о - рис.4р (четвертий стовпець малюнка), залишається таким аж до 11.80 ГГц (на малюнку подальші еволюції не показані), де змінюється напівсинусоїдальним, потім на частоті 12.00 ГГц - лінійним, який на частоті 12.40 ГГц переходить в експоненціальний і так далі. Інтервали переходу від експоненціального розподілу до синусоїдального і назад становлять тут 0.40 ГГц і 0.60 ГГц відповідно, тоді як інтервал існування синусоїдального розподілу між цими переходами становить 2.80 ГГц .

Таким чином, середня протяжність інтервалів існування основних розподілів, синусоїдального і експоненціального, становить близько 3.47 ГГц , тоді як протяжність інтервалів перехідних розподілів (напівсинусоїдального і лінійного) не перевищує 0.67 ГГц , тобто становить близько 19% або одну п'яту від інтервалів основних розподілів.

2.13 Перехід між розподілами амплітуди

Розглянемо трохи більш докладно характер змін розподілу амплітуд в шарах на прикладі частотних залежностей при досить великому співвідношенні проникностей бар'єрів і проміжків $\varepsilon_s/\varepsilon_p$ (критерія «достатності» обговорюється в наступному розділі). Звернемося до рис.5, де показані залежності нормованих амплітуд назад спрямованої хвилі в шарі №1 (а) і прямо спрямованих хвиль в шарах №15 (б) і №16 (в) від частоти падаючої хвилі при співвідношенні між проникностями рівним шести.

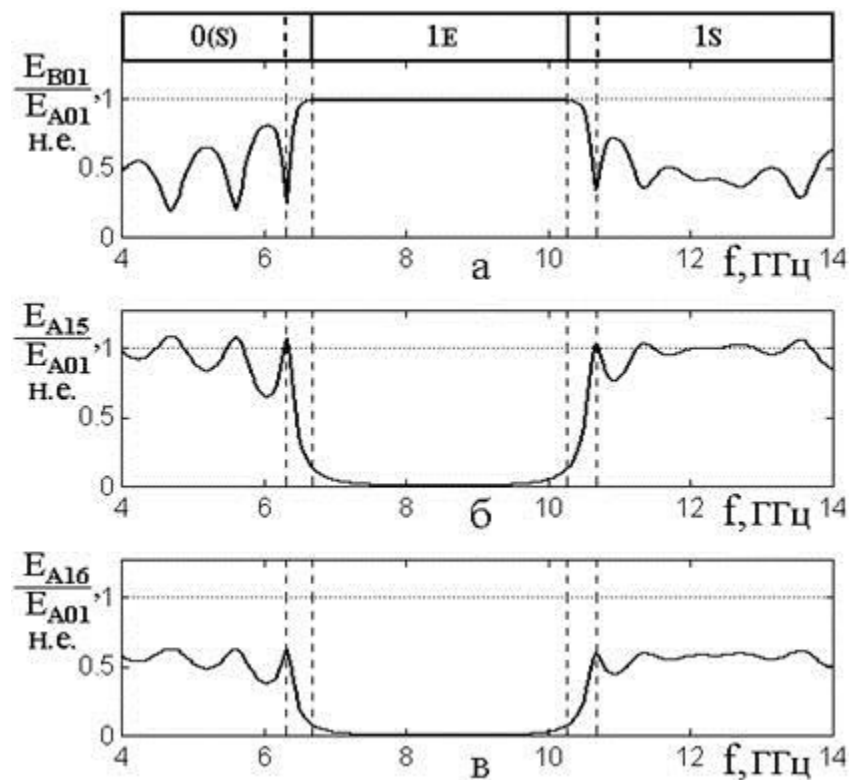


Рисунок2.5- Залежність нормованих амплітуд назад спрямованої хвилі в шарі №1 (а) і прямо спрямованих хвиль в шарах №15 (б) і №16 (в) від частоти падаючої хвилі. У верхньому ряду - найменування областей з характерними розподілами амплітуд по верствам: 0 (S) - синусоїдальне (нульова зона);

1E - експоненціальне (перша зона); 1S – синусоїдальне (перша зона).

Параметри матеріалу середовища:

$$\varepsilon_p = 1.0; \quad \varepsilon_s = 6.0; \quad \mu_{p,s} = 1.0; \quad \sigma_{p,s} = 0.0$$

З малюнку видно, що в області експоненціального розподілу (1E) нормована амплітуда назад спрямованої хвилі в шарі №1 близька до одиниці, тобто структура відображає падаючу на неї хвилю практично повністю. При цьому в шарах №15 і №16 амплітуди прямо спрямованих хвиль близькі до нуля, тобто падаюча хвиля через структуру не проходить.

В областях синусоїдального розподілу (0 (S)) і (1S) амплітуда назад спрямованих хвиль по частоті осцилює від 0.2 до $0.71 \cdot \dot{a}$. Амплітуда прямо спрямованих хвиль в шарі №15 також осцилює між 0.6 і 1.1 н.е. , а в шарі №16 - між 0.4 і 0.6 н.е. Значне, майже в два рази, зменшення середнього рівня осциляцій в шарі №16 в порівнянні з шаром №15 обумовлено властивостями парностей цих шарів, подібно до того, як це обговорювалося в роботі [30]. Деяке перевищення нормованої амплітуди в шарі №15 над одиницею, (подібне спостерігалось для одновимірної хвилі [53]) обумовлено переходом хвилі від шару з великою проникністю (№14, де $\varepsilon_s = 6.0$) до шару з малої (№15, де $\varepsilon_p = 1.0$) і викликано вимогою збереження потоку енергії хвилі, правила роботи з якими детально розібрані в роботі [74].

Переходи між областями з характерними розподілами є плавними. Таким чином, між областями, відповідними синусоїдальному і експоненціальному розподілам, є перехідні області, наближені межі яких (на рівні $0.8 \div 0.9$) показані пунктиром.

Граничні частоти перехідних областей, для першої області (по нижньому

рівню в точці мінімуму, по верхньому на рівні 0.985 н.е.), рівні відповідно: 6.320 ГГц , 6.660 ГГц , для другої (за тими ж рівнями): 10.320 ГГц і 10.640 ГГц . Ширина першої області дорівнює 0.340 ГГц , що становить близько 5% від частоти її центру (6.490 ГГц), а ширина другої області - 0.320 ГГц , тобто близько 3% від частоти її центру (10.480 ГГц).

Ширина перехідних областей в міру збільшення співвідношення діелектричної проникності бар'єру і проміжку зменшується. Так при $\varepsilon_p = 1.0$ і $\varepsilon_s = 4.0$ перехідна область між зонами 0 (S) і 1E становить близько 5.6% від центральної частоти, при збільшенні ε_s до значення 10.0 зменшується до 4.0% , а при $\varepsilon_s = 20.0$ становить всього 0.7% . Тобто перехід між синусоїдальним і експоненціальним розподілами зі збільшенням відношення проникності стає більш різкими. Проте, в перехідних областях по мірі зміни частоти перехід між розподілами амплітуд завжди залишається досить плавним: від синусоїдального розподілу до напівсинусоїдального, потім до лінійного, який переходить в експоненціальний. Перехід від експоненціального розподілу до синусоїдального відбувається в зворотному порядку. Динаміка переходу повністю аналогічна як і для одновимірної хвилі, як це докладно розглянуто в роботі [30].

2.14 Слабка і сильна неоднорідність

Тепер розглянемо частотні залежності амплітуди хвиль в шарах при сильній і слабкій неоднорідності структури. Будемо розрізняти сильну і слабку ступінь неоднорідності за ознакою, що в разі слабкої неоднорідності нормована зворотня амплітуда спрямованої хвилі в шарі №1, тобто відображена від структури в цілому, не досягає одиниці ні при якій частоті падаючої хвилі. При

цьому частина енергії хвилі завжди проходить через структуру, виявляючи себе на ненулевому рівні в шарах №15 або №16. Зауважимо, що нульовий рівень тут в обох випадках є певною ідеалізацією, асимптотично досяжною лише при нескінченно великому числі елементів структури. У реальному ж випадку, тут розглядається структура з 16 елементів (шарів) і ми будемо вважати критичним рівнем відображення рівним 0.999 н.е.

Звернемося до рис.6, де показані залежності нормованих амплітуд зворотно спрямованої хвилі в шарі №1 (а, г) і прямо спрямованих хвиль в шарах №15 (б, д) і №16 (в, е) від частоти падаючої хвилі при різних співвідношеннях між проникностями шарів.

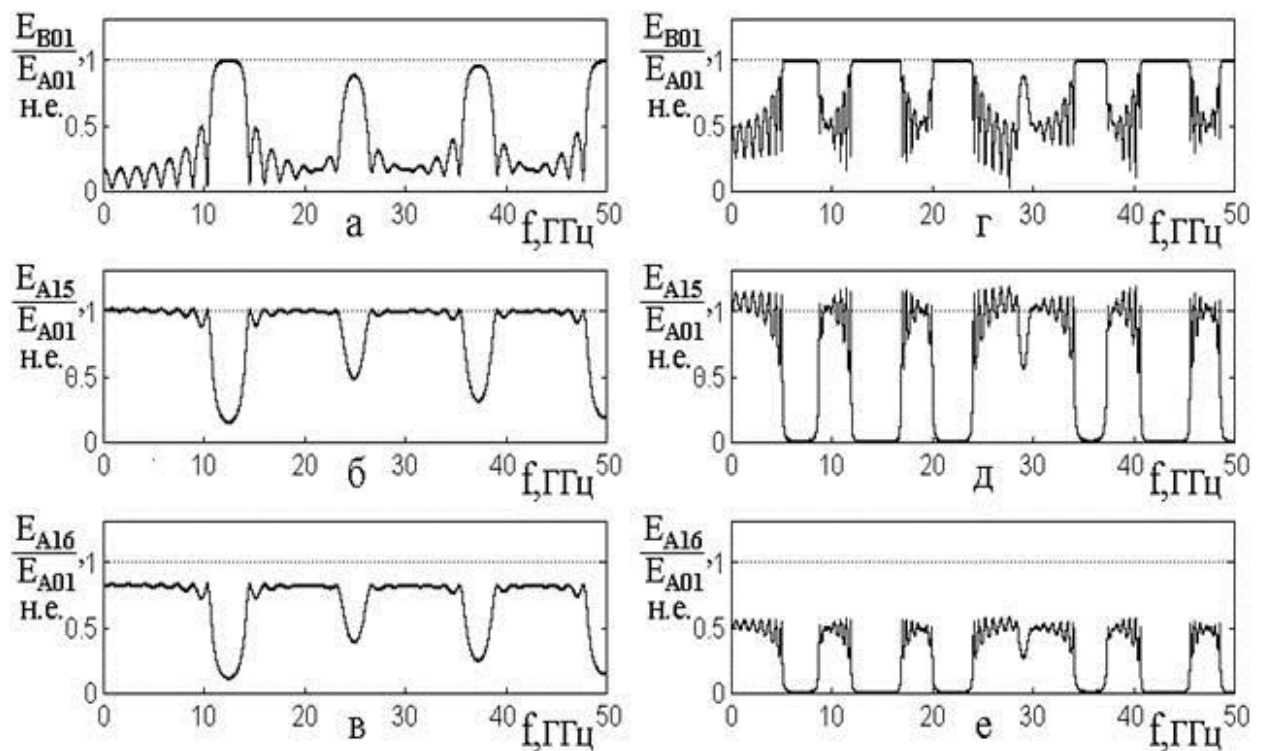


Рис.6. Залежність нормованих амплітуд зворотно спрямованої хвилі в шарі №1 (а, г) і прямо спрямованих хвиль в шарах №15 (б, д) і №16 (в, е) від частоти падаючої хвилі при різних співвідношеннях між проникностями шарів.

Проникність бар'єра: а, б, в – $\varepsilon_s = 2.0$; г, д, е – $\varepsilon_s = 10.0$.

Інші параметри: $\varepsilon_p = 1.0$; $\mu_{p,s} = 1.0$; $\sigma_{p,s} = 0.0$.

З малюнку видно, що в обох випадках частотні залежності амплітуди являють собою чергування яскраво виражених «смуг пропускання» і «непропусканія», подібне має місце в періодичній структурі нескінченної протяжності, в аналітичному вигляді одержуваних класичними методами Хілла, Уіттекера, Брілюена [1,52, 53]. Однак тут, на відміну від класики, правильна періодичність в якійсь мірі порушується, що особливо добре видно з рис.6г-6Е, де дві «смуги пропускання» між 25.0 і 35.0 ГГц практично зливаються разом, залишаючи лише порівняно вузький неглибокий проміжок близько 29.8 ГГц. Можна вважати, що такий характер спостережуваних залежностей обумовлений досить невеликою кількістю шарів структури, що налічує всього 8 повних періодів зміни властивостей.

Спостерігаються також помітні відмінності від випадку одновимірної хвилі, розглянутої в роботі [53]. Так для одновимірної хвилі при збільшенні хвильового числа області пропускання звужуються, причому амплітуда хвиль, що проходять через неї в шарі №15 збільшується, а в шарі №16 зменшується. У розглянутому тут випадку електромагнітної хвилі при збільшенні частоти ширина тих і інших смуг змінюється не більше ніж на 20% , причому нерегулярним чином. Амплітуда як хвиль що проходять, так і відбитих хвиль також не має тенденції до систематичного збільшення або зменшення, причому змінюється в ту і іншу сторону також на $\sim 20\%$. Тобто в нульовому наближенні можна вважати, що тут як частотний інтервал, так і амплітуда тих і інших хвиль в межах відповідних смуг практично не змінюються (з точністю до 20%).

Розглянемо тепер наведені залежності з кількісної сторони. Так рис.6а, б,

в відповідають слабкій неоднорідності: $\varepsilon_s = 2.0$ при $\varepsilon_p = 1.0$, тобто проникність бар'єра перевищує проникність проміжку всього в два рази. В цьому випадку максимальна амплітуда відбитої хвилі в шарі №1 досягає рівня 0.987 н.е. на частоті 12.450 ГГц , а амплітуда хвилі що проходить на тій же частоті в шарі №15 падає до рівня 0.164 н.е. і в шарі №16 - до рівня 0.136 н.е. Тобто неоднорідність, згідно з наведеним критерієм, є слабкою.

Рис.бг, д, е відповідають сильній неоднорідності: $\varepsilon_s = 10.0$ при $\varepsilon_p = 1.0$, тобто проникність бар'єра перевищує проникність проміжку в десять разів. В цьому випадку максимальна амплітуда відбитої хвилі в шарі №1 перевищує критичний рівень 0.999 н.е. в інтервалі частот від 5.370 ГГц до 8.290 ГГц , досягаючи максимуму, рівного 0.9999898 н.е. на частоті 7.290 ГГц . При цьому амплітуда проходить хвилі в шарі №15 падає до рівня нижче 0.01 , на краях інтервалу мінімуму складаючи $0.956 \cdot 10^{-2} \text{ н.е.}$ на частоті 5.930 ГГц і $0.941 \cdot 10^{-2} \text{ н.е.}$ на частоті 7.730 ГГц , досягаючи абсолютного мінімуму $0.210 \cdot 10^{-2} \text{ н.е.}$ на частоті 6.850 ГГц . Амплітуда проходить хвилі в шарі №16 падає до рівня нижче 0.01 , на краях інтервалу мінімуму складаючи $0.963 \cdot 10^{-2} \text{ н.е.}$ на частоті 5.610 ГГц і $0.953 \cdot 10^{-2} \text{ н.е.}$ на частоті 8.050 ГГц , досягаючи абсолютного мінімуму $0.438 \cdot 10^{-2} \text{ н.е.}$ на частоті 6.810 ГГц . Таким чином, неоднорідність, згідно з наведеним критерієм, є сильною.

Основна відмінність між залежностями, пристосованими до слабкої і сильної неоднорідностей полягає в тому, що при слабкій неоднорідності залежність має плавний округлий вигляд, тоді як при сильній вона різко окреслена по верхньому і нижньому рівнях, тобто їх вид близький до прямокутного. Кількість тих і інших смуг при сильній неоднорідності різко зростає. Так в даному інтервалі частот ($0 \div 50 \text{ ГГц}$) на рис.6а спостерігаються чотири колоколообразний максимуму, тоді як на рис.6г - вже шість широких прямокутних і один вузький колоколоподібний, тобто всього - сім. Те ж можна бачити і при порівнянні рис.6б, в с рис.6д, е.

Оцінка за формулою (5) для слабкої неоднорідності при $\varepsilon_s = 2$ дає частоту 21.213 ГГц , що не відповідає жодній із спостережуваних смуг. У той же час, якщо взяти середнє значення проникності між шарами: $\varepsilon_m = (\varepsilon_s + \varepsilon_p) / 2$, а також припустити, що довжина такого «складеного» шару дорівнює сумі довжин бар'єру і проміжку: $L_m = L_s + L_p$, то підставляючи ці значення в формулу (5), отримуємо частоту 12.247 ГГц , що досить близько відповідає частоті першого максимуму на рис.6а (12.450 ГГц).

Аналогічна оцінка для сильної неоднорідності при $\varepsilon_s = 10$ дає частоту 9.487 ГГц , що виходить помітно вище верхнього краю першого максимуму на рис.6г (8.290 ГГц). У той же час, якщо взяти середнє значення проникності бар'єру і проміжку, а також покласти шар «складовим», то отримуємо частоту 6.396 ГГц , що також досить близько підходить до спостережуваного значення центру цього максимуму 7.290 ГГц , а по мінімумам для шарів №15 (6.850 ГГц) і №16 (6.810 ГГц) відповідність виходить ще ближчим.

Таким чином, можна вважати, що для знаходження центральної частоти першої «області непропускання» більш підходить наступна формула:

$$f_s^{(res)} = \frac{c}{\sqrt{2 \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_p) \mu_s} \cdot (L_s + L_p)},$$
(66)

де припускається, що $\mu_s = \mu_p$.

Наведені оцінки виконані для першої найбільш низькочастотної «смуги непропускання». Аналіз наступних смуг показує, що їх центральні частоти знаходяться в цілочисленному кратному відношенні до частоти першої смуги. Отримане за формулою (66) значення першої з частот, однак є дещо заниженим, тому для підвищення точності слід ввести поправочний коефіцієнт. З такою емпіричною поправкою формули для розрахунку середньої частоти n -й «смуги непропускання», набувають вигляду:

при слабкій неоднорідності:

$$f_s^{(n)} = \frac{1.0166 \cdot c \cdot n}{\sqrt{2 \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_p) \mu_s} \cdot (L_s + L_p)},$$
(67)

при сильній неоднорідності:

$$f_s^{(n)} = \frac{1.1398 \cdot c \cdot n}{\sqrt{2 \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_p) \mu_s} \cdot (L_s + L_p)}.$$
(68)

При проміжній неоднорідності поправочний коефіцієнт буде мати проміжне значення.

ВИСНОВКИ

Проведено огляд класичних методів дослідження періодичних структур: метод Флоке-Блоха, вирішення рівняння Хілла, вирішення рівняння Хілла за допомогою функції Гріна і т.д. Після вивчення одновимірного випадку ми переходимо до аналізу безпосередньо самих шарів на прикладі симетричної меандрової структури, тобто такої, в якій неоднорідність є періодично розташованими однаковими прямокутними бар'єрами, з однаковими проміжками між ними.

Розглянуто поширення хвиль прямого і зворотного напрямків в багат шаровій структурі обмеженої довжини з періодичною неоднорідністю меандрового типу, що представляє собою чергування двох видів шарів рівної товщини з різними параметрами. Як розрахунковий апарат, був використаний метод покрокового алгоритму, спочатку розроблений для одновимірних хвиль. У цьому завданні метод узагальнено на випадок тривимірних електромагнітних хвиль та показана можливість його реалізації з використанням комплексних адмітансових і хвильових чисел середовища, що складають структуру. Наведено схему і аналітичну реалізацію методу покрокового алгоритму для випадку середовища з довільними діелектричною та магнітною проникностями, провідністю.

Проведений аналіз частотних залежностей амплітуд хвиль прямого і зворотного напрямків в крайніх шарах структури. Показано, що такі залежності мають квазірезонансний характер у вигляді великої центральної пелюстки, з обох сторін супроводжуваної меншими пелюстками-сателітами. Запропоновано модель структури як ланцюжка послідовно з'єднаних напівхвильових

резонаторів. Показано, що частота головної пелюстки визначається в першу чергу діелектричною проникністю бар'єру, але відхиляється від резонансної частоти півхвильового бар'єру вниз сильніше, коли більше розходження діелектричної проникності бар'єру і проміжку.

Досліджено трансформацію частотних характеристик при зміні числа бар'єрів. Показано, що в міру збільшення числа бар'єрів кількість пелюсток збільшується, причому між основними, обумовленими резонансними властивостями бар'єру, з'являються проміжні, пов'язані з інтерференцією хвиль при поширенні між бар'єрами. Отримано аналітичні формули, які дозволяють розрахувати частоти основних пелюсток, положення їх максимумів і мінімумів між ними при заданому числі бар'єрів.

Проаналізовано розподіл амплітуд хвиль у внутрішніх шарах структури при великому розходженні параметрів між бар'єрами і проміжками. Показано, що за залежністю амплітуд від координати вздовж осі структури переважають два основних види розподілу - синусоїдальне і експоненціальне, які по черзі, частотно переходять один в одного за посередництвом проміжних розподілів - напівсинусоїдального і лінійного. Виявлено, що частотні інтервали існування головних розподілів перевищують такі для проміжних не менше ніж в кілька разів, причому при збільшенні відмінності параметрів бар'єрів і проміжків таке перевищення збільшується. Показано, що як при варіації параметрів, так і при зміні частоти перехід основних розподілів один в одного через проміжні завжди відбувається плавно, проте частотні інтервали перехідних розподілів зі збільшенням різниці параметрів шарів звужуються.

Досліджено особливості частотних залежностей амплітуди відбитої і хвилі що проходить, в широкому діапазоні частот при різних ступенях неоднорідності структури. Введено визначення сильної і слабкої неоднорідностей і отримано критерій переходу між ними, який визначається величиною відмінності діелектричної проникності бар'єру і проміжку.

Показано, що як при слабкій, так і особливо при сильній неоднорідностях частотні залежності амплітуди являють собою чергування яскраво виражених «смуг пропускання» і «непропускання», що також мають місце в періодичній структурі нескінченної протяжності, в аналітичному вигляді одержуваних класичними методами.

Виявлено не зазначене класикою порушення правильної періодичності спостережуваних залежностей, що полягає в зміні частотної ширини смуги аж до повного її зникнення або злиття з сусідніми. Як можливу причину такого порушення запропоновано обмежений характер повного числа шарів структури в порівнянні з класичним випадком, де таке обмеження відсутнє. Для розрахунку центральних частот смуг непропускання запропонована емпірична формула, що включає в себе середнє значення проникності шарів в поєднанні з близьким до одиниці поправочним коефіцієнтом, що збільшується в міру збільшення ступеня неоднорідності.

Розглянуто трансформацію частотних залежностей в широкому інтервалі зміни співвідношення проникності шарів. Показано, що при збільшенні цього співвідношення частоти середини смуги того і іншого виду знижуються, як і ширина, тобто повний спектр смуги як би підтискається до свого низькочастотного кінця, до того ж це прагнення виражене сильніше, коли частота смуги знаходиться вище.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Виноградов А.П., Дорофеев А.В., Блоховские волны ближнего поля в фотонных кристаллах// РиЭ. – 2005. – Т. 50. – С. 1246.
2. Burtyka M.V., Glukhov O.V., Yakovenko V.M. Interaction of hot electrons with two-dimensional gas in semiconductor superlattices. Solid-State Electronics. Vol. 34, 1991, pp. 559-564.
3. Виноградов, Сухоруков, Руденко. Теория волн, М., 1981 г., 470 с.
4. Yeh P., Yariv A., Hong C.-S., Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory// Journal of the Optical Society of America. – 1977. – Vol. 67. – p. 423.
5. Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В. Нелинейная оптика, М., 1982 г., 352 с.
6. Мерзликин А. М. Мезоскопические эффекты когерентного распространения и локализации поляризованных электромагнитных волн в фотонных кристаллах и неупорядоченных слоистых средах. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Москва., 2016, - 284 с.
7. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах, М., Мир, 1987 г., 616 с.
8. Л.М. Бреховских, Волны в слоистых средах, – Москва: Наука, 1973.
9. М.Л. Левин, Распространение плоской электромагнитной волны в периодической слоистой среде// ЖТФ. – 1948. – Т. 18. – С. 1399.
10. Л.Д. Ландау и Е.М Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, третье издание, – Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1992.
11. Бломберген Н. Нелинейная оптика, М., Мир, 1966 г., 424 с.

12. Бирюков А.С., Богданович Д.В., Дианов Е.М. Брэгговские волоконные световоды: основные методы исследования. СПЕЦВЫПУСК «ФОТОН-ЭКСПРЕСС» – НАУКА №6_2005 72, www.forc.gpi.ru Научный центр волоконной оптики при Институте общей физики РАН, с.72-76.
13. Андреев А.В., Балакин А.В., Буше Д., и др. Квантовая электроника, 28, №1, июль 1999 г., с. 75-80.
14. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики, М., Мир, 1989., 278 с.
15. Карпов С.Ю., Столяров С.Н. Успехи физических наук, т. 163, №1, январь 1993 г., С. 63-89.
16. Борн М., Вольф Э., Основы оптики, – Москва: Наука, 1973.
17. Шварцбург А.Б. Успехи физических наук, т.170, №12, декабрь 2000 г., с. 1297-1324
18. Amnon Y., Pochi Y. Photonics: Optical Electronics in Modern Communications. — 6th edition. — New York: Oxford University press, 2007. — 836 p.
19. Amnon Y., Pochi Y. Photonics: Optical Electronics in Modern Communications. — 6th edition. — New York: Oxford University press, 2007. — 836 p.
20. Sjoberg D., Engstrom C., Kristensson G. et al. A Floquet-Bloch Decomposition of Maxwell's Equations, Applied to Homogenization, Department of Electrosience Electromagnetic Theory Lund Institute of Technology Sweden. — 2004. — <http://www.es.lth.se/teorel/Publications/TEAT-7000-series/TEAT-7119.pdf>
21. Epstein L. J. X Opt. Soc. Am., т.42, №806, 1952г.
22. . Shvartsburg A., Petite G., Auby N.J. Opt. Soc. Am., т.16, № 966, 1999 г.
23. 1. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ. 1959.
24. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973.

25. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука. 1989.
26. Elachi C. // Proc. of the IEEE. 1976. V.64. №12. P.1666.
27. Анненков А.Ю., Виноградов А.П., Герус С.В., Рыжиков И.А., Шишков С.А., Иноуе М. // Известия РАН. Серия физическая. 2007. Т.71. №11. С.1612.
28. Бутько Л.Н., Бучельников В.Д., Бычков И.В., Шавров В.Г. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2007. №3. URL:
<http://jre.cplire.ru/jre/mar07/3/text.html>
29. Pendry J.B. // Phys. Rev. Lett. 2000. V.85. P.3966.
30. Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C., Nemat-Nasser S.C., Schultz S. // Phys. Rev. Lett. 2000. V.84. №18. P.4184.
31. Виноградов А.П. Электродинамика композитных материалов. М.: УРСС. 2001.
32. Lindell I.V., Tretyakov S.A., Nikoskinen K.I., Ilvonen S. // Micr. Opt. Tech. Lett. 2001. V.31. №2. P.129.
33. Parimi P.V., Lu W.T., Vodo P., Sokoloff J., Derov J.S., Sridhar S. // Phys.Rev.Lett. 2004. V.92. №12. P.127401(4).
34. Агранович В.М., Гартштейн Ю.Н. // УФН. 2006. Т.176. №10. С.1052.
35. Веселаго В.Г. // УФН. 2011. Т.181. №11. С.1201.
36. Вендик И.Б., Вендик О.Г. // ЖТФ. 2013. Т.83. №1. С.3.
37. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Животовский Л.В., Климов А.А., Тайад Ф., Пресманес Л., Бонин К., Цай Ч.С., Высоцкий С.Л., Филимонов Ю.А. // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т.77. №10. С.670.
38. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Волков А.И. // РЭ. 2007. Т.50. №9. С.1107.
39. Кирюхин Н.Н., Лисовский Ф.В. // ФТТ. 1968. Т.10. №3. С.709.

39. Зубков В.И., Моносов Я.А., Щеглов В.И. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т.13. №5. С.229.
40. Медников А.М., Никитов С.А., Попков А.Ф. // ФТТ. 1982. Т.24. №10. С.3008.
41. Зубков В.И., Щеглов В.И. // РЭ. 2011. Т.56. №7. С.839.
42. Вороненко А.В., Герус С.В. // Письма в ЖТФ. 1984. Т.10. №12. С.746.
43. Вороненко А.В., Герус С.В., Харитонов В.Д. // Изв. ВУЗов. Физика. 1988. Т.31. №11. С.76.
44. Анненков А.Ю., Герус С.В., Сотников И.В. // РЭ. 1992. Т.37. №8. С.1371.
45. Анненков А.Ю., Герус С.В. // РЭ. 1996. Т.41. №2. С.216.
46. Герус С.В. Магнитостатические волны в пространственно-периодических и двумерно-неоднородных магнитных полях. Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Москва. 2012.
47. Вороненко А.В., Герус С.В., Красножен Л.А. // Микроэлектроника. 1989. Т.18. №1. С.61.
48. Григорьева Н.Ю. Дипольно-обменные спиновые волны в периодических структурах на основе тонких ферромагнитных пленок. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. Санкт-Петербург. 2009.
49. Григорьева Н.Ю., Калиникос Б.А. // ЖТФ. 2009. Т.79. №8. С.110.
50. Дроздовский А.В. Исследование сверхвысокочастотных свойств магнитных кристаллов на основе ферромагнитных пленок. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. Санкт-Петербург. 2011.
51. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2015. №1. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/jan15/1/text.html>
52. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2012.

Т.57. №1. С.67.

53. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2013.

Т.58. №1. С.16.

54. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2013. №1. URL:

55. <http://jre.cplire.ru/jre/jan13/11/text.pdf>

56. Антонец И.В., Щеглов В.И. Алгоритмы определения амплитуд отраженных и проходящих волн при распространении встречных волн в многослойных неоднородных структурах. Часть первая. Укороченный алгоритм. Учебное пособие (электронное). Сыктывкар: ИПО ФГБОУ ВПО СыктГУ. 2013.

57. Антонец И.В., Щеглов В.И. Алгоритмы определения амплитуд отраженных и проходящих волн при распространении встречных волн в многослойных неоднородных структурах. Часть вторая. Полный алгоритм. Учебное пособие (электронное). Сыктывкар: ИПО ФГБОУ ВПО СыктГУ. 2013.

58. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через многослойные структуры (монография). Часть пятая. Алгоритмические методы. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2014.

59. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через тонкие слои и пленки. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2010.

60. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2010.

Т.55. №2. С.133.

61. Антонец И.В., Щеглов В.И. Распространение волн через многослойные структуры. Часть первая. Прямой метод. Сыктывкар: ИПО СыктГУ. 2011.

62. Калашников С.Г. Электричество. М.: Наука. 1964.

63. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.3. Электричество. М.: Наука.

1977.

64. Никольский В.В, Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука. 1989.
65. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т.1. М.: Наука. 1969.
66. Красюк Н.П., Дымович Н.Д. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высшая школа. 1974.
67. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1973.
68. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит. 1994.
69. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2007. Т.52. №4. С.403.
70. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2008. Т.53. №4. С.389.
71. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука. 1976.
72. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука. 1970.
73. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2009. Т.54. №10. С.1171.
74. Уиттекер Э.Т., Ватсон Д.Н. Курс современного анализа. Ч.2.М.: ИЛ. 1963.
75. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матъе. М.: ИЛ. 1953
76. Младенов П.Л., Просвирнин С.Л., Микрополосковая двухпериодическая решетка из непрерывных криволинейных металлических лент как высокоимпедансная поверхность// Радиофизика и радиоастрономия. - 2003. - Т. 8, № 4. - С. 375-382.

77. Д.О. Харченко, С.В. Коломієць, В.О. Харченко Модульоване стійке періодичне випромінювання у твердотільних лазерах. Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. - 2004. - №10(69). - С. 218-225.

78. Резонансное взаимодействие электромагнитных волн в дефектной диэлектрической слоисто-периодической структуре, находящейся в плоскопараллельном волноводе / Н. Н. Белецкий, С. А. Борисенко, Н. И. Гвоздев // Радиофизика и электроника. - 2014. - Т. 5(19), № 2. - С. 61-67. - Режим доступа: http://nbuv.gov.ua/UJRN/rphre_2014_5%2819%29_2_11

79. Электронный ресурс
<http://physics.zffft.kpi.ua/mod/book/view.php?id=299&chapterid=57>

80. Ратушняк Тетяна Володимирівна. Поширення магнітопружних хвиль зсуву в регулярно-шаруватих магнітострикційних середовищах : Дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04 / Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України. — К., 2006. — 136арк. : рис. — Бібліогр.: арк. 119-136.

81. Ю. М. Поплавко, Л. П. Переверзева, С. О. Воронов, Ю. І. Якименко Фізичне матеріалознавство Частина 2 Діелектрики Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів Київ НТУУ «КПІ» 2007 УДК 539.2. 620.9 ББК 22.37я73 Ф50 Гриф надано Міністерством освіти і науки України (Лист № 1-4/18-Г-1387 від 25.12.2006 р.)

82. Хе Ши. Розсіяння електромагнітних хвиль на відокремлених і періодичних хвилевідних неоднорідностях. – На правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.03 – радіофізика. – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2016.