// Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics / Eds. H.O.Peitgen and H.O.Walther. Berlin, N.Y.: Springer, 1979. V.730 P.204-227. **23.***Farmer J.D.* Chaotic Attractors of an Infinite-Dimensional Dynamical System // Physica. 4D. 1982. P. 366-393. **24.***Дмитриев А.С., Старков С.О.* Передача сообщений с использованием хаоса и классическая теория информации // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. №11. С.4-32. **25.***Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с. **26.** *Eckmann J.P., Ruelle D.* Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems // Physica. 1992. Vol. D56, P.185-187.

Поступила в редколлегию 02.07.2005

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Чурюмов Г.И.

Земляный Олег Васильевич, м.н.с. отд. нелинейной динамики электронных систем ИРЭ НАН Украины. Научные интересы: динамический хаос в радиофизических системах, генераторы сверхширокополосных хаотических сигналов на основе систем с запаздывающей обратной связью, обработка и нелинейный анализ сложных сигналов. E-mail: oleg@ire.kharkov.ua, тел.: 8-057-720-3371.

Лукин Константин Александрович, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. отд. нелинейной динамики электронных систем ИРЭ НАН Украины. Научные интересы: динамический хаос, нелинейная СВЧ электроника, генерация хаотических сигналов, обработка случайных сигналов, шумовая радиолокация и наземные шумовые РСА для дистанционного зондирования. E-mail:lukin@ire.kharkov.ua, lndes@kharkov.com, тел./факс: 8-057-720-3349.

УДК 539.38

ЗАДАЧА ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО ДВУСЛОЙНОГО ПРОСТРАНСТВА С ПОЛОСТЬЮ В ФОРМЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

АФАНАСЬЕВ В.А., СОВА А.В., КЛИМОВА Н.П., НАТАЛУХА Ю.В.

Рассматривается применение формул переразложения решений уравнения Гельмгольца в декартовых и эллиптических координатах к исследованию задачи об установившихся колебаниях упругого двуслойного пространства с полостью в форме эллиптического цилиндра. Задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

1. Введение

В математической теории упругости одним из важных классов задач являются пространственные краевые задачи. К основным источникам принципиальных математических трудностей, возникающих при их решении, относятся геометрия граничной поверхности тела и упругие свойства деформируемых сред [7, 8]. Исследование установившихся колебаний упругих тел с неодносвязной границей является актуальным в связи с необходимостью анализа концентрации напряжений около полостей и включений, содержащихся в них.

Целью данной работы является изучение состояния установившихся колебаний в упругой среде, представляющей собой двуслойное пространство с полостью в форме эллиптического цилиндра. При этом основное внимание уделяется рассмотрению соответствующих математических вопросов. Применяются формулы переразложения решений уравнения Гельмгольца в декартовых и эллиптических координатах [4], что позволяет точно удовлетворить граничным условиям на плоской границе раздела двух сред и на границе полости, имеющей форму эллиптического цилиндра. В результате этого нахождение характеристик напряжённого состояния сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода, приближённое решение которой можно осуществить методом редукции с использованием ЭВМ.

2. Постановка задачи и метод решения

Пусть (x, y, z) − прямоугольная декартова система координат. Свяжем с ней систему координат эллиптического цилиндра (η,θ,z) так, что $x = h\,\mathrm{ch}\,\eta\cos\theta, y = h\,\mathrm{sh}\,\eta\sin\theta$, где $\eta \ge 0, 0 \le \theta < 2\pi$, h – параметр, $h > 0$. Два упругих полупространства с плотностями ρ_1, ρ_2 и коэффициентами сдвига μ_1, μ_2 жёстко сцеплены вдоль плоскости $y = H,\ H > 0$. В первом полупространстве, для которого $y \le H$, имеется цилиндрическая полость, ограниченная поверхностью $\eta = \eta_0, \eta_0 > 0$. При этом предполагается, что $h\,\mathrm{sh}\,\eta_0 < H$. Для постановки соответствующей краевой задачи учитываем то, что единственная отличная от нуля компонента вектора смещений $u_z^{(j)} = v_j(x, y)e^{-i\omega t}$ удовлетворяет уравнению движения Ламе:

$$\frac{\partial^2 u_z^{(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^{(j)}}{\partial y^2} - \frac{\rho_j}{\mu_j}\frac{\partial^2 u_z^{(j)}}{\partial t^2} = 0, j = 1,2. \qquad (1)$$

Граничное условие может быть записано в виде

$$u_z^{(1)}\Big|_{\eta=\eta_0} = v(\theta)e^{-i\omega t}. \qquad (2)$$

Поскольку полупространства жёстко сцеплены, то получаем, что

$$u_z^{(1)} = u_z^{(2)}, \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)}, y = H. \qquad (3)$$

Пусть $k_j^2 = \dfrac{\rho_j\omega^2}{\mu_j}, q = \dfrac{h^2 k_1^2}{4}$. Будем в дальнейшем использовать эллиптические волновые функции [2, 3]:

$$Me_n^{(1)}(\eta, q)ce_n(\theta, q), Ce_n(\eta, q)ce_n(\theta, q)\ \ (n \ge 0),$$

$$Ne_n^{(1)}(\eta, q)se_n(\theta, q), Se_n(\eta, q)se_n(\theta, q)\ \ (n \ge 1).$$

Функции $V_j(x, y)$ с учётом (1) представим в виде

$$V_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod\nolimits_1(\lambda) e^{i\lambda x - i\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,y} d\lambda +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\ [\, t_n^{(1)} Ne_n^{(1)}(\eta,q) se_n(\theta,q) +$$
$$+t_n^{(2)} Me_{n-1}^{(1)}(\eta,q) ce_{n-1}(\theta,q)\ ],\ \ y \le H,$$
$$V_2(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod\nolimits_2(\lambda) e^{i\lambda x + i\sqrt{k_2^2-\lambda^2}\,y} d\lambda,\ y \ge H. \qquad (4)$$

Ветвь корня фиксируется так, чтобы $\operatorname{Im}\sqrt{k_j^2-\lambda^2} > 0$ при $\lambda \in (-\infty,-k_j) \cup (k_j,+\infty)$ и $\sqrt{k_j^2-\lambda^2} > 0$ при $\lambda \in (-k_j,k_j)$. Выбранная форма решения (4) характеризуется отсутствием приходящих волн из бесконечности.

Неопределённые постоянные $t_n^{(1)}, t_n^{(2)}$ и неизвестные функции $\prod_j(\lambda)$ в (4) определим, исходя из условий (2), (3).

Обозначим символами A, B с верхним и нижним индексами коэффициенты разложения $ce_n(\theta,q)$ и $se_n(\theta,q)$ в ряды Фурье [3]. Введём следующие вспомогательные функции:

$$f_{2m+1}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2r+1}^{(2m+1)} J_{2r+1}(t),$$
$$f_{2m+2}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2m+2)} J_{2r+2}(t), \qquad (5)$$
$$g_{2m}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2m)} J_{2r}(t),$$
$$g_{2m+1}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2m+1)} J_{2r+1}(t),$$

где $J_\nu(t)$ – функция Бесселя, $-\infty < t < +\infty$, $m \ge 0$. Отметим, что ряды (5) сходятся абсолютно и равномерно в любом ограниченном интервале оси t.

Нам понадобятся следующие формулы переразложения [4]:

$$\begin{Bmatrix} Ne_n^{(1)}(\eta,q) se_n(\theta,q) \\ Me_{n-1}^{(1)} ce_{n-1}(\theta,q) \end{Bmatrix} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} F_n^{(1)}(\lambda) \\ F_n^{(2)}(\lambda) \end{Bmatrix} e^{i\lambda x + i\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,y} d\lambda,\ y > 0, \qquad (6)$$

$$e^{i\lambda x - i\sqrt{k_1^2-\lambda^2}\,y} = \sum_{n=1}^{\infty}\ [\, a_n^{(1)}(\lambda) Se_n(\eta,q) se_n(\theta,q) +$$
$$+ a_n^{(2)}(\lambda) Ce_{n-1}(\eta,q) ce_{n-1}(\theta,q)\ ], \qquad (7)$$

где

$$2\lambda F_{2m+1}^{(1)}(\lambda) = Ne_{2m+1}^{(1)}(0,q) f_{2m+1}(\lambda h),$$
$$2\lambda F_{2m+2}^{(1)}(\lambda) = -iNe_{2m+2}^{(1)}(0,q) f_{2m+2}(\lambda h), \qquad (8)$$
$$2\psi_1 F_{2m+1}^{(2)}(\lambda) = -i\,[\, Me_{2m}^{(1)}(0,q)\,]' g_{2m}(\lambda h),$$
$$2\psi_1 F_{2m+2}^{(2)}(\lambda) = -\,[\, Me_{2m+1}^{(1)}(0,q)\,]' g_{2m+1}(\lambda h),$$
$$a_{2m+1}^{(2)}(\lambda) = \frac{2g_{2m}(\lambda h)}{Ce_{2m}(0,q)};\ a_{2m+2}^{(2)}(\lambda) = \frac{2ig_{2m+1}(\lambda h)}{Ce_{2m+1}(0,q)},$$
$$\lambda a_{2m+1}^{(1)}(\lambda) = \frac{-2i\psi_1 f_{2m+1}(\lambda h)}{Se'_{2m+1}(0,q)},$$
$$\lambda a_{2m+2}^{(1)}(\lambda) = \frac{2\psi_1 f_{2m+2}(\lambda h)}{Se'_{2m+2}(0,q)}.$$

Введём обозначения

$$\psi_j(\lambda) = \sqrt{k_j^2-\lambda^2},\ \gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$
$$\delta_1(\lambda) = \frac{e^{2iH\psi_1}(\psi_1 - \gamma\psi_2)}{\psi_1+\gamma\psi_2},\quad \delta_2(\lambda) = \frac{2e^{iH(\psi_1-\psi_2)}\psi_1}{\psi_1+\gamma\psi_2}.$$

Удовлетворим условиям (3). С этой целью представим решение $V_1(x,y)$ в декартовых координатах, используя интегральные представления (6). В результате получаем, что

$$\prod\nolimits_j(\lambda) = \delta_j(\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\ [\, t_n^{(1)} F_n^{(1)}(\lambda) + t_n^{(2)} F_n^{(2)}(\lambda)\ ]. \quad (9)$$

Будем предполагать, что разложение функции $V(\theta)$ в ряд по функциям Матье имеет вид

$$V(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\ [\, Y_n^{(1)} se_n(\theta,q) + Y_n^{(2)} ce_{n-1}(\theta,q)\ ].$$

Осуществим замену переменных

$$W_n^{(1)} = t_n^{(1)} Ne_n^{(1)}(\eta_0,q),\ W_n^{(2)} = t_n^{(2)} Me_{(n-1)}^{(1)}(\eta_0,q).$$

Представим решение V_1 в эллиптических координатах, используя формулу (7). После подстановки в $V_1(\eta,\theta)$ выражения для $\prod_1(\lambda)$ из (9) и удовлетворения граничного условия (2) приходим для определения неизвестных постоянных $W_n^{(\ell)}$ к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$W_n^{(\ell)} = \sum_{m=1}^{\infty} [C_{nm}^{(\ell)} W_{m1} + D_{nm}^{(\ell)} W_{m2} + Y_n^{(\ell)},\ \ell = 1,2, \quad (10)$$

где $$\{\tilde{N}_{nm}^{(1)}, \tilde{N}_{nm}^{(2)}\} = \frac{-\{Se_n(\eta_0,q), Ce_{n-1}(\eta_0,q)\}}{Ne_m^{(1)}(\eta_0,q)} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(\lambda)\{a_n^{(1)}(\lambda), a_n^{(2)}(\lambda)\} F_m^{(1)}(\lambda) d\lambda\ , \qquad (11)$$
$$\{D_{nm}^{(1)}, D_{nm}^{(2)}\} = -\frac{\{Se_n(\eta_0,q), Ce_{n-1}(\eta_0,q)\}}{Me_{m-1}^{(1)}(\eta_0,q)} \times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\delta_1(\lambda)\{a_n^{(1)}(\lambda), a_n^{(2)}(\lambda)\}F_m^{(2)}(\lambda)d\lambda,$$

Исследуем разрешимость системы (10). Нетрудно показать, что $C_{nm}^{(\ell)} = D_{nm}^{(\ell)} = 0$, если n и m имеют различную чётность. Оценим

$$\left|D^{(2)}_{(2\bar{n}+1)(2\bar{m}+1)}\right|, \bar{n}, \bar{m} \ge 0 .$$

Учитывая (11) и (8), получаем, что

$$D^{(2)}_{(2\bar{n}+1)(2\bar{m}+1)} = \frac{-2iCe_{2\bar{n}}(\eta_0, q)\left[Me^{(1)}_{2\bar{m}}(0,q)\right]'}{Ce_{2\bar{n}}(0,q)Me^{(1)}_{2\bar{m}}(\eta_0,q)} \times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{\delta_1(\lambda)}{\psi_1(\lambda)}g_{2\bar{n}}(\lambda h)g_{2\bar{m}}(\lambda h)d\lambda .$$

Используем равенство [1]

$$\int_0^{\infty}e^{-2H\lambda}J_\mu^2(\lambda h)d\lambda = \frac{1}{\pi h}Q_{\mu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2H^2}{h^2}\right),$$

а также то, что для функций Лежандра второго рода выполняется соотношение

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(ch\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{sh\alpha(2n-1)}}e^{-n\alpha}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \alpha > 0, n \to \infty.$$

Тогда, учитывая известные оценки функций Матье для больших значений индексов, можно доказать, что при нечётных n, m сходится ряд $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}\left|D_{nm}^{(2)}\right|$, если $h\,sh\eta_0 < H$ (полость не пересекает границу раздела двух сред). Аналогично устанавливается сходимость этого ряда для чётных n, m , а также абсолютная сходимость двойных рядов для $D_{nm}^{(1)}, C_{nm}^{(\ell)}$. Следовательно, матрице из этих коэффициентов соответствует вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве ℓ_2. Таким образом, если $\{Y_n^{(\ell)}\} \in \ell_2$, то для фактического решения системы (10) можно применить метод редукции.

3. Выводы

Научная новизна настоящего исследования заключается в том, что найдено решение пространственной стационарной задачи теории упругости для области, имеющей границу в форме эллиптического цилиндра и плоскую границу раздела двух сред. При этом предложен и развит подход, базирующийся на применении формул переразложения решений уравнения Гельмгольца в декартовых и эллиптических координатах.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что они могут быть использованы в механике композиционных материалов, в анализе, проектировании конструкций и сооружений, в строительстве и машиностроении. Следует отметить работу [6], в которой решалась задача об изгибных колебаниях полубесконечной пластины с круговым отверстием. При этом использовались формулы переразложения решений уравнения Гельмгольца в декартовых и полярных координатах. С точки зрения перспектив дальнейших исследований укажем на то, что, применяя формулы переразложения, представленные в работе [5], можно рассмотреть случай, когда большая ось направляющей эллиптического цилиндра составляет произвольный угол с осью x.

Литература: **1.** *Градштейн И.С., Рыжик И.Н.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108с. **2.** *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Навука и техника, 1968. 583с. 3. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложение функции Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476с. **4.** *Проценко В.С., Афанасьев В. А.* Формулы переразложения решений уравнения Гельмгольца на плоскости в декартовых и эллиптических координатах // Вычислительная математика и кибернетика. Харьков: Харьковский авиационный институт. 1984. Вып. 1. С.77-81. **5.** *Проценко В.С., Афанасьев В.А.* О некоторых соотношениях между элементарными решениями уравнения Гельмгольца на плоскости в декартовых и эллиптических координатах // Математические методы анализа динамических систем. Харьков: Харьковский авиационный институт. 1985. С. 96-163. **6.** *Проценко В.С., Афанасьев В.А.* Задача об изгибных колебаниях полубесконечной пластины с круговым отверстием // Прикладная механика. 1990. Т.26, N3. С.69-73. **7.** *Проценко В.С., Николаев А.Г.* Формулы переразложения для решений уравнения Лапласа в цилиндрических и вытянутых сфероидальных координатах // Докл. АН УССР. Сер.А 1983. N7. С.19-21. **8.** *Проценко В.С., Соловьёв А.И.* О некоторых формулах разложения в теории гармонических функций и их применении к решению краевых задач // Математические методы анализа динамических систем. Харьков: Харьковский авиационный институт. 1984. Вып. 8. С.50-77.

Поступила в редколлегию 30.06.2005

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руденко О.Г.

Афанасьев Вадим Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ХНУРЭ. Научные интересы: пространственные краевые задачи математической теории упругости. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-372.

Сова Анна Васильевна, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическая теория упругости, вычислительная математика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-372.

Климова Наталья Павловна, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики ХНУРЭ. Научные интересы: уравнения математической физики, функциональный анализ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-372.

Наталуха Юрий Владимирович, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики ХНУРЭ. Научные интересы: уравнения математической физики, теория надёжности технических систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-372.