

ДВОБІЧНІ ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ У МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ТЕРМОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Янбеков Р.Я.

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: ravid.yanbekov@nure.ua

The paper considers the application of bilateral iterative methods to the solution of the first boundary value problem for an elliptic semi-linear differential equation with the Helmholtz operator, which occurs in mathematical modeling of thermochemical processes.

Математичне моделювання стаціонарних термохімічних процесів, що відбуваються у області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, приводить до наступної крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння [1]

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

У задачі (1) – (3) функція $f(\mathbf{x}, u)$ має сенс нелінійних джерел тепло-виділення, джерел речовини при дифузії тощо. У багатьох випадках її можна познати у вигляді $f(\mathbf{x}, u) = -qu + g(\mathbf{x}, u)$, де $g(\mathbf{x}, u)$ – неперервна та додатна, коли $\mathbf{x} \in \Omega$, $u > 0$, функція. Доданок qu описує джерела чи стоки тепла або речовини при хімічній реакції, що є пропорційними температурі. При цьому значенню $q > 0$ відповідає стік, а $q < 0$ – джерело. Позначивши $q = \pm \kappa^2$, від задачі (1) – (3) ми приходимо до задачі

$$-\Delta u \pm \kappa^2 u = g(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6)$$

У роботі [2] для випадку рівняння $-\Delta u + \kappa^2 u = g(\mathbf{x}, u)$ було обґрунтовано застосування методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Цей метод полягає у переході від диференціальної задачі до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, ядром якого є функції Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольца $-\Delta u + \kappa^2 u$. Зазначена функція Гріна є невід’ємною в $\Omega \times \Omega$, що дає можливість застосувати для обґрунтування методу двобічних наближень теорію нелінійних операторів у напівопорядкованих просторах [3].

Проте до рівняння $-\Delta u - \kappa^2 u = g(\mathbf{x}, u)$ цей підхід не може бути застосований, оскільки функція Гріна першої крайової задачі для оператора

Гельмгольца $-\Delta u - \kappa^2 u$ існує не для всіх $\kappa > 0$, а у разі існування може не бути невід'ємною у квадраті $\Omega \times \Omega$. Запишемо рівняння $-\Delta u - \kappa^2 u = g(\mathbf{x}, u)$ у вигляді $-\Delta u = \kappa^2 u + g(\mathbf{x}, u)$. Тоді відповідна крайова задача буде еквівалентною інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\kappa^2 u(\mathbf{s}) + g(\mathbf{s}, u(\mathbf{s}))] ds, \quad (7)$$

де $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta u - \kappa^2 u$.

Рівняння (7) розглядатимемо як операторне рівняння $u = T(u)$ у просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, що є неперервними в області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Напівупорядкуємо цей простір конусом K_+ невід'ємних неперервних функцій, тобто $v \leq w$ за конусом K_+ , якщо $w - v \in K_+$. Якщо функція $g(\mathbf{x}, u)$ дозволяє діагональне подання $g(\mathbf{x}, u) = \hat{g}(\mathbf{x}, u, u)$, де функція $\hat{g}(\mathbf{x}, v, w)$ зростає за v і спадає за w , то оператор T , який визначається правою частиною рівняння (7) буде гетеротонним. Тоді за умови існування для нього сильно інваріантного конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ можна сформулювати ітераційний процес

$$v^{(k)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\kappa^2 v^{(k-1)}(\mathbf{s}) + \hat{g}(\mathbf{s}, v^{(k-1)}(\mathbf{s}), w^{(k-1)}(\mathbf{s}))] ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$w^{(k)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\kappa^2 w^{(k-1)}(\mathbf{s}) + \hat{g}(\mathbf{s}, w^{(k-1)}(\mathbf{s}), v^{(k-1)}(\mathbf{s}))] ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}), \quad (10)$$

Якщо ітераційний процес (8) – (10) є збіжним, то він приводить до двобічної послідовності наближень до точного розв'язку $u^*(\mathbf{x})$ розглядуваної крайової задачі, а саме виконуватиметься ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

Перевага запропонованого двобічного ітераційного метода перш за все полягає в тому, що ми на кожній ітерації можемо апостеріорно оцінити похибку наближення $u^{(k)}(\mathbf{x}) = 0,5(w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x}))$ за формулою

$$\|u^* - u^{(k)}\|_{C(\bar{\Omega})} \leq 0,5 \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})).$$

Список використаних джерел:

1. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York : Plenum Press, 1992. XV+777 p.

2. Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V. Two-sided approximations method based on the Green's functions use for construction of a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2021. № 3 (58). С. 26 – 41. DOI: 10.15588/1607-3274-2021-3-3

3. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 272 с.