

УДК 519.7

З.В. ДУДАРЬ, Н.С. КРАВЕЦ, Ю.П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО
О ПРИКЛАДНОЙ АЛГЕБРЕ ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ*

Фундаментальная алгебра, описанная в работе [1], - это пока единственная из известных нам алгебр предикатных операций, для которой доказано, что она полна. Полнота означает, что с помощью формул фундаментальной алгебры можно выразить любую предикатную операцию, содержащуюся в ее носителе. Кроме того, только для фундаментальной алгебры известна полная система законов, позволяющая решить вопрос о том, выражают ли две произвольно взятые ее формулы одну и ту же предикатную операцию или нет. Эти качества фундаментальной алгебры делают ее незаменимой для теоретических изысканий в области логической математики. Вместе с тем, для практических применений фундаментальная алгебра не всегда удобна, поскольку ее формулы и тождества не обладают достаточной компактностью и изяществом. Поэтому продолжает оставаться актуальной задача разработки других алгебр предикатных операций, более удобных практически для тех или иных приложений, чем фундаментальная алгебра.

Вначале, опираясь на аппарат фундаментальной алгебры, изучим некоторые операции над предикатами, которые будут использованы ниже в качестве строительных блоков при построении более практичной алгебры предикатных операций, называемой нами алгеброй подстановочных операций, или прикладной алгеброй. Фундаментальная алгебра полна, следовательно, она универсальна в том смысле, что на ее языке можно выразить любые операции над предикатами. Ниже на языке фундаментальной алгебры выражаются операции замены и перестановки аргументов предиката и операции подстановки какого-либо предмета на место одного из аргументов предиката. Обычно эти операции воспринимаются как действия над формулами, однако ничто не мешает рассматривать их также и как операции над предикатами, выражаемыми этими формулами.

Заменой аргумента x_i на аргумент x_j называется операция

$$x_i / x_j (P) = Q, \quad (1)$$

* Статья публикуется в авторской редакции.

которая каждому предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ставит в соответствие предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ по следующему правилу: для любых $a_1, a_2, \dots, a_m \in U$

$$\begin{aligned} Q(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_m) = \\ = P(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_m). \end{aligned} \quad (2)$$

Предикат, получаемый из предиката $P(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_m)$ заменой аргумента x_i на аргумент x_j , будем записывать в виде $P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_m)$. Например, результатом замены аргумента y на аргумент x в предикате $P(x, y)$ будет предикат $P(x, x)$. Здесь x и y обозначают некоторые из аргументов x_1, x_2, \dots, x_m . Подразумевается, что все остальные аргументы предиката $P(x, y)$ несущественны. Выполним, например, операцию замены переменной x_1 на переменную x_2 для предиката P , заданного формулой:

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^1 x_2^2 \vee x_2^3 x_3^3 \vee x_1^2 x_3^1. \quad (a)$$

В результате получаем: $x_1/x_2(P) = x_2^1 x_2^2 \vee x_2^3 x_3^3 \vee x_2^2 x_3^1 = x_2^3 x_3^3 \vee x_2^2 x_3^1$.

Предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ называется *обратным* предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ по аргументам x_i, x_j , если для любых $a_1, a_2, \dots, a_m \in U$

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m) = P(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_m). \quad (3)$$

Предикат, обратный предикату $P(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_m)$ по аргументам x_i и x_j будем записывать в виде $P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_m)$. Например, предикатом, обратным предикату $P(x, y, z)$ по аргументам x и z , будет предикат $P(z, y, x)$. Операция

$$x_i/x_j(P) = Q \quad (4)$$

получения предиката $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) = P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_m)$ из предиката $P(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_m)$ называется *обращением предиката P по аргументам x_i и x_j* или *перестановкой* его аргументов x_i и x_j . Выполним, к примеру, операцию перестановки аргументов x_1 и x_2 для предиката P , заданного формулой (a). В результате получаем $x_1/x_2(P) = x_2^1 x_1^2 \vee x_1^3 x_3^3 \vee x_2^2 x_3^1$.

Подстановкой

$$x_i/a(P) = Q \quad (5)$$

значения a на место аргумента x_i называется операцией, которая каждому предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ставит в соответствие предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ по следующему правилу: для любых $a_1, a_2, \dots, a_m \in U$

$$Q(a_1, \dots, a_i, \dots, a_m) = P(a_1, \dots, a, \dots, a_m). \quad (6)$$

Предикат, получаемый из предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)$ подстановкой значения a на место аргумента x_i , будем записывать в виде $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) = P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_m)$. Аргумент x_i у предиката Q - несущественный. Например, результатом подстановки значения a на место аргумента y в предикате $P(x, y)$ будет предикат $Q(x, y) = P(x, a)$. Произведем, для примера, подстановку предмета 1 на место аргумента y для предиката P , заданного формулой (а). В результате получаем: $x_1/1(P) = 1^1 x_2^2 \vee x_2^3 x_3^3 \vee 1^2 x_3^3 = = x_2^2 \vee x_2^3 x_3^3$.

Замена аргумента предиката выражается на языке фундаментальной алгебры следующим образом:

$$x_i/x_j(X) = \bigvee_{P \in M} P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m) \cdot X^{P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)} \quad (7)$$

Под символом X понимается любая из переменных X_l ($l = \overline{1, n}$). Выражаем перестановку аргументов предиката:

$$x_i/x_j(X) = \bigvee_{P \in M} P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_m) \cdot X^{P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)} \quad (8)$$

Выражаем операцию подстановки:

$$x_i/a(X) = \bigvee_{P \in M} P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_m) \cdot X^{P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, x_m)} \quad (9)$$

Зависимости (7)-(9) получены «силовым» методом подбора. В качестве показателей предикатов узнавания предиката берутся значения аргумента X рассматриваемой операции (замены, перестановки или подстановки), а в роли множителей при них в каждом случае подбирается нужный результат операции. Неудивительно, что в результате получаются громоздкие формулы, малоприспособные для практики. Однако в данном случае важен сам факт выразимости операций замены, перестановки и подстановки на языке фундаментальной алгебры.

Замену, перестановку и подстановку можно понимать не только как предикатные операции, но и как операции над предикатными операциями. При таком понимании они определяются следующим образом:

$$x_i/x_j(F(X_1, X_2, \dots, X_n))=F(x_i/x_j(X_1), x_i/x_j(X_2), \dots, x_i/x_j(X_n)); \quad (10)$$

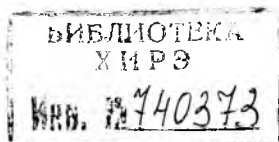
$$x_i/x_j(F(X_1, X_2, \dots, X_n))=F(x_i/x_j(X_1), x_i/x_j(X_2), \dots, x_i/x_j(X_n)); \quad (11)$$

$$x_i/a(F(X_1, X_2, \dots, X_n))=F(x_i/a(X_1), x_i/a(X_2), \dots, x_i/a(X_n)). \quad (12)$$

В левой части равенств (10)-(12) символ F обозначает предикатную операцию, в правой части тот же символ обозначает эту же операцию, которая, однако, возведена в ранг операции над предикатными операциями. Равенства (10)-(12) выражают следующее правило: операции замены (перестановки или подстановки) и операцию F в их суперпозиции можно менять местами.

Откуда берутся определения (10)-(12)? Они выведены нами из наблюдений над практическими действиями математика, выполняющего операции замены, перестановки и подстановки в формулах. Математическая практика свидетельствует о том, что операции замены, перестановки и подстановки приходится производить не только над предикатами, но также и над предикатными операциями. И делается это за счет упомянутой выше перемены местами операций в их суперпозиции. Например, операция замены переменной, выполняемая над дизъюнкцией предикатов, производится при помощи изменения очередности выполнения операций x/y в их суперпозиции: $x/y(P(x) \vee Q(x)) = x/y(P(x)) \vee x/y(Q(x)) = P(y) \vee Q(y)$. Из этого и подобных ему других фактов индуктивно выводим общее правило (10). Аналогично выводятся правила (11), (12). Например, когда мы выполняем подстановку x/a в какой-нибудь формуле, то в каждой ее части ищем вхождение переменной x и везде заменяем его на предмет a . При этом операция подстановки, которая вначале была внешней по отношению к формуле, теперь проникает внутрь нее в соответствии с правилом (12). Обратим внимание на то, что символы X_1, X_2, \dots, X_n в зависимостях (7)-(9) выступают в роли предикатных переменных алгебры, они еще не возведены в ранг предикатных операций. Операции X^P ($P \in M$), фигурирующие в зависимостях (7)-(9), - это предикатные операции, но не операции алгебры. В выражениях (7)-(9) и в правой части равенств (10)-(12) символы $x_i/x_j, x_i/x_j$ и x_i/a обозначают предикатные операции. В левой части равенств (10)-(12) те же символы обозначают операции над предикатными операциями.

Выразим, далее, на языке фундаментальной алгебры кванторы общности и существования, которые широко используются в классической математике в качестве логического инструментария. *Квантор общ-*



ности, как известно, определяется следующим образом: если $U = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, то $\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_k)$. В общем случае:

$$\forall x_i(X) = \bigwedge_{a \in U} x_i / a(X). \quad (13)$$

Аналогично определяется *квантор существования*: если $U = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, то $\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_k)$. В общем случае:

$$\exists x_i(X) = \bigvee_{a \in U} x_i / a(X). \quad (14)$$

Зависимости (13) и (14) можно применять не только к конечному, но и к бесконечному универсуму U . Кванторы общности и существования можно понимать не только как предикатные операции, но и как операции над предикатными операциями. В этом случае они определяются следующими равенствами:

$$\forall x_i(X) = \bigwedge_{a \in U} x_i / a(X); \quad (15)$$

$$\exists x_i(X) = \bigvee_{a \in U} x_i / a(X). \quad (16)$$

О происхождении определений (15) и (16) можно высказать соображения, аналогичные тем, которые были приведены по поводу определений (10)-(12). Символ X обозначает произвольную предикатную операцию.

Кванторы общности и существования, когда значения предметной переменной ограничены множеством $A \subseteq U$, определяются следующими зависимостями:

$$\forall x \in A P(x) = \forall x (A(x) \supset P(x)); \quad (17)$$

$$\exists x \in A P(x) = \exists x (A(x) \wedge P(x)). \quad (18)$$

Определяем кванторы по предикатной переменной:

$$\forall P F(P) = \bigwedge_{P \in M} F(P); \quad (19)$$

$$\exists P F(P) = \bigvee_{P \in M} F(P). \quad (20)$$

Здесь $F(P)$ - произвольно выбранная предикатная операция, действующая на предикат P ; M - универсум предикатов [1].

Определяем кванторы по набору предметных переменных $\xi=(x_1, x_2, \dots, x_m)$:

$$\forall \xi P(\xi) = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m P(x_1, x_2, \dots, x_m); \quad (21)$$

$$\exists \xi P(\xi) = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_m P(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (22)$$

С их помощью можно выразить кванторы по предикатной переменной P , значения которой ограничены предикатами, включенными в фиксированный предикат M :

$$\forall P \subseteq M F(P) = \bigwedge_{P \in M} (\forall \xi (P(\xi) \supset M(\xi)) \supset F(P)); \quad (23)$$

$$\exists P \subseteq M F(P) = \bigvee_{P \in M} (\forall \xi (P(\xi) \supset M(\xi)) \wedge F(P)). \quad (24)$$

Зависимости (23) и (24) можно обобщить следующим образом:

$$\forall P \subseteq M F(P, M) = \bigwedge_{P \in M} (\forall \xi (P(\xi) \supset M(\xi)) \supset F(P, M)); \quad (25)$$

$$\exists P \subseteq M F(P, M) = \bigvee_{P \in M} (\forall \xi (P(\xi) \supset M(\xi)) \wedge F(P, M)). \quad (26)$$

Здесь $F(P, M)$ - произвольно выбранная предикатная операция, действующая на предикаты P и M . Заметим, что выражения (19), (20) и (23)-(26) не выводят нас за пределы класса формул фундаментальной алгебры. Предикатные операции $F(P)$ и $F(P, M)$ выражаются на языке фундаментальной алгебры (так как это не переменные, а фиксированные операции). Вместе с тем, эти выражения нельзя причислить к формулам классического логического исчисления первого порядка, их нельзя также отнести и к формулам других широко известных логик [2, с. 49-54]. Фундаментальная алгебра предикатных операций, насколько мы можем судить на основании анализа литературных источников, представляет собой структуру, для которой нет аналога в современной математической логике.

Теперь мы полностью подготовлены к введению прикладной алгебры предикатных операций. *Прикладной алгеброй* называется алгебра предикатных операций с базисом операций, образованным из подстановок вида $x_i / a(X)$ ($i = \overline{1, m}$, $a \in U$), а также операций отрицания и дизъюнкции, и с базисом элементов, образованным из предикатов равенства вида $D(x_i, x_j)$ ($i = \overline{2, m}$) (здесь они выступают в роли константных предикатных

операций), и предикатных переменных X_i ($i = \overline{1, n}$) (представляющих в данном случае тождественные предикатные операции). Число элементов в базисе прикладной алгебры гораздо меньше, чем в базисе фундаментальной алгебры, однако число базисных операций в ней резко возрастает. Алгебры называются *равносильными*, если на языке их формул описывается одно и то же множество объектов.

Теорема о равносильности фундаментальной и прикладной алгебр. *Фундаментальная и прикладная алгебры предикатных операций, имеющие один и тот же носитель, равносильны.*

Доказательство. Равносильность фундаментальной и прикладной алгебр будет доказана, если удастся базисные элементы и операции фундаментальной алгебры выразить через базисные элементы и операции прикладной алгебры, и наоборот. 1) Выражаем базис фундаментальной алгебры через базис прикладной. а) Выражаем базисные операции фундаментальной алгебры. Дизъюнкция уже имеется. Выражаем конъюнкцию через дизъюнкцию и отрицание: $X \wedge Y = \overline{X \vee \overline{Y}}$. Отрицание имеется. б) Выражаем базисные элементы: $0 = X_1 \wedge X_1$. Переменная X_1 имеется. Выражаем предикаты узнавания предметов: $x_1^a = D(x_1, a) = x_2/a(D(x_1, x_2))$; если же $i = \overline{2, m}$, то $x_i^a = D(a, x_i) = x_1/a(D(x_1, x_i))$ ($a \in U$). Подстановочные операции и предикаты равенства имеются. Выражаем предикаты узнавания предиката:

$$X_j^P = \forall \xi (X_j(\xi) \sim P(\xi)), \quad (7)$$

где $j = \overline{1, n}$, $P \in M$. Если предикатная переменная X_j имеется в фундаментальной алгебре, то она имеется и в прикладной, поскольку носители обеих алгебр совпадают. Любой фиксированный предикат P выражается формулой дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов с помощью операций \vee и \wedge , примененных к предикатам узнавания предмета x_i^a ($i = \overline{1, m}$, $a \in U$), которые уже выражены. Квантор общности по набору предметных переменных выражается через кванторы по одной переменной зависимостью (21). Кванторы общности по одной переменной выражаются через подстановочные операции и конъюнкцию по формуле (15). Весь базис фундаментальной алгебры выражен через базис прикладной алгебры. 2) Выражаем базис прикладной алгебры через базис фундаментальной. а) Выражаем базисные операции прикладной алгебры. Подстановочные операции выражаем по формулам (9) и (12). В силу полноты фундаментальной алгебры любая предикатная операция в ней выражает-

ся. Отрицание выражаем с помощью законов Моргана и законов отрицания для узнаваний предметов и предикатов. Дизъюнкция уже имеется. б) Выражаем базисные элементы. Предикат равенства уже выражен зависимостью (2) из работы [3]. Тожественную предикатную операцию выражаем формулой

$$X_i = \bigvee_{P \in M} P X_i^P. \quad (28)$$

В этом выражении справа от знака равенства символ X_i выражает только предикатную переменную, слева - тот же символ X_i уже возведен в ранг тождественной предикатной операции. Весь базис прикладной алгебры выражен через базис фундаментальной алгебры. Итак, фундаментальная и прикладная алгебры равносильны. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы о полноте фундаментальной алгебры [1] непосредственно следует

Теорема о полноте прикладной алгебры. *Прикладная алгебра полна при любых U, m и n .*

Прикладная алгебра еще слабо изучена. Требуется решения вопрос о ее несократимости, об отыскании полной системы ее тождеств, ждут разработки методы решения ее уравнений и многие другие проблемы. Выразим все предикаты равенства в базисе прикладной алгебры. Равенства $D(x_i, x_j)$ ($i = \overline{2, n}$) уже содержатся в самом базисе прикладной алгебры. Если $i = \overline{2, n}$ и $j = \overline{2, n}$, то предикаты равенства выражаем следующим образом:

$$D(x_i, x_j) = \exists x_1 (D(x_1, x_i) \wedge D(x_1, x_j)). \quad (29)$$

Выражать кванторы на языке прикладной алгебры мы уже умеем. Для $i=1$ или $j=1$ выражение (29) не годится, т.к. возникает коллизия переменных. Квантор существования в (29) переменную x_1 исключает (делает ее несущественной). Справедливость равенства (29) следует из симметричности и транзитивности предиката равенства. Если $i=1$ и $j = \overline{2, n}$, то, полагая $D(x_1, x_j)$, приходим к базисным равенствам. Когда же $j=1$ и $i = \overline{2, n}$, то, полагая $D(x_i, x_j) = D(x_1, x_i)$, снова приходим к базисным равенствам. Для оставшегося случая $i=j=1$ полагаем $D(x_1, x_1) = 1$, используя рефлексивность равенства. Единичный же предикат на языке прикладной алгебры выражается: $1 = X_1 \vee \overline{X_1}$. Итак, все равенства выражены через базисные. Для примера, получим равенство $D(x_2, x_3)$ из базисных равенств прикладной алгебры с помощью зависимости (29). Пусть $U = \{a, b\}$, тогда $D(x_1, x_2) = x_1 a x_2 a \vee x_1 b x_2 b$; $D(x_1, x_3) = x_1 a x_3 a \vee x_1 b x_3 b$. Находим:

$$D(x_2, x_3) = x_1/a ((x_1 a x_2 a \vee x_1 b x_2 b)(x_1 a x_3 a \vee x_1 b x_3 b)) \vee x_1/b \wedge ((x_1 a x_2 a \vee x_1 b x_2 b)(x_1 a x_3 a \vee x_1 b x_3 b)) = x_2 a \wedge x_3 a \vee x_2 b x_3 b.$$

Операция замены аргументов предиката в прикладной алгебре выражается следующим образом:

$$x_i / x_j(P) = \exists \sigma (x_i / \sigma(D_{ij} \wedge P)), (i = \overline{1, m}). \quad (30)$$

Предикат равенства здесь действует обратно подстановке, он восстанавливает переменную, исчезнувшую в формуле в результате подстановки. Для примера, выразим замену аргументов предиката через подстановки по формуле (30). Пусть $U = \{a, b, c\}$, $P(x_1, x_2) = x_1 a x_2 b \vee x_1 b x_2 a$. Тогда $x_1/x_3(P) = \exists \sigma (x_1/\sigma(D_{13} \wedge P) = x_1/a(D_{13} \wedge P) \vee x_1/b(D_{13} \wedge P) \vee x_1/c(D_{13} \wedge P) = x_1/a(D_{13}) \wedge x_1/a(P) \vee x_1/b(D_{13}) \wedge x_1/b(P) \vee x_1/c(D_{13}) \wedge x_1/c(P)$. Далее: $x_1/a(D_{13}) = x_1/a(x_1 a x_3 a \vee x_1 b x_3 b \vee x_1 c x_3 c) = x_3 a$; $x_1/b(D_{13}) = x_3 b$; $x_1/c(D_{13}) = x_3 c$; $x_1/a(P) = x_1/a(x_1 a x_2 b \vee x_1 b x_2 a) = x_2 b$; $x_1/b(P) = x_2 a$; $x_1/c(P) = 0$; $x_1/x_3(P) = x_3 a x_2 b \vee x_3 b x_2 a \vee x_3 c 0 = x_3 a x_2 b \vee x_3 b \wedge x_3 a$. Мы видим, что в результате применения правила (30) в формуле предиката $P(x_1, x_2)$ произошла замена переменной x_1 на x_3 . Операция перестановки аргументов предиката выражается через замены аргументов предиката следующим образом:

$$x_i | x_j(P) = x_k / x_j x_j / x_i x_i / x_k(P). \quad (31)$$

Здесь в роли x_k используется какой-нибудь из несущественных аргументов предиката P . Для примера, выразим перестановку аргументов у конкретного предиката через замены аргументов по формуле (31). Пусть $U = \{a, b\}$; $P(x_1, x_2) = x_1 a x_2 b \vee x_1 b$. Тогда $x_1 | x_2(P) = x_3 / x_2 x_2 / x_1 x_1 / x_3 (x_1 a x_2 b \vee x_1 b)$; $x_1/x_3 (x_1 a x_2 b \vee x_1 b) = x_3 a x_2 b \vee x_3 b$; $x_2/x_1 (x_3 a x_2 b \vee x_3 b) = x_1 a x_1 b \vee x_3 b$; $x_3/x_2 (x_3 a x_1 b \vee x_3 b) = x_2 a x_1 b \vee x_2 b$. Получили перестановку аргументов x_1 и x_2 .

Список литературы: 1. Дударь З.В., Кравец Н.С., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. О фундаментальной алгебре предикатных операций – См. статью в настоящем сборнике С. 3–13. 2. Справочная книга по математической логике. Теория моделей: В 4 ч.: Пер. с англ. / Под Ред. Дж. Барвайса. М.: Наука, 1982. Ч.1. 391 с. 3. Дударь З.В., Самуилик И.Г., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Отображения как объекты формульного описания // Радиоэлектроника и информатика. 1998. Вып. 2. С. 8–15.

Поступила в редколлегию 10.03 98