Проблемы бионики
1998. Вып. 49 С. 90--94

УДК 519.7

Н.А. ГВОЗДИНСКАЯ

О ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ

Проблема формализации естественного языка остается актуальной. Для успешного ее решения необходим такой математический аппарат, как логические операторы. Рассмотрим логические пространства L и D над некоторым полем логических скаляров [1]. Логическим оператором, отображающим пространство L в пространство D, называется такой закон, который каждому вектору из пространства L ставит в соответствие вектор из пространства D. Обозначим логические операторы буквами $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и т. д. Тогда, например, можно записать: A: $L \to D$. Если l — вектор из логического пространства L, то вектор из пространства D, который получается из l посредством преобразования A, обозначим через Al. Вектор Al назовем образом вектора l при операторе A, а вектор l — прообразом вектора Al [2]. Совокупность всех векторов $l \in L$ таких, что $Al = d$, назовем полным прообразом этого вектора в пространстве L [3]. Логический оператор A: $L \to D$ назовем взаимно однозначным, если у каждого вектора $d \in D$ имеется один и только один прообраз $l \in L$. Операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ назовем равными, если для любого вектора $l \in L$ справедливо следующее равенство:

$$Al = \boldsymbol{B}l. \tag{1}$$

Введем понятие произведения логических операторов. Пусть имеются логические операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ такие, что A: $L \to D$, $\boldsymbol{B}$: $D \to V$. Оператор $\boldsymbol{A}$ переводит произвольный вектор $l \in L$ в вектор Al. Если полученный вектор преобразовать с помощью оператора $\boldsymbol{B}$, то получим вектор $\boldsymbol{B}$ (Al). Оператор, переводящий вектор l непосредственно в вектор $\boldsymbol{B}$ (Al), будем называть произведением $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и обозначать $\boldsymbol{BA}$. Таким образом, из определения вытекает: $(\boldsymbol{BA})l = \boldsymbol{B}(Al)$. Если A, $\boldsymbol{B}$: $L \to L$ и к вектору l сначала применить оператор $\boldsymbol{B}$, а затем A, то полученный вектор A $(\boldsymbol{B}l)$, вообще говоря, может и не совпадать с вектором $\boldsymbol{B}(Al)$. Другими словами, произведение логических операторов зависит от порядка сомножителей. Пусть A, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ – произвольные логические операторы и $\boldsymbol{A}$: $L \to D$, $\boldsymbol{B}$: $D \to V$, $\boldsymbol{C}$: $V \to W$, а l – вектор из пространства L. Тогда согласно определению имеем:

$$(\boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{BA}))\,l = \boldsymbol{C}\,((\boldsymbol{BA})\,l) = \boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{B}\,(Al));$$

$$((\boldsymbol{CB})\,A)\,l = (\boldsymbol{CB})(Al) = \boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{B}\,(Al)),$$

откуда следует, что

$$C\,(BA)=(CB)\,A, \tag{2}$$

т.е. выполняется свойство ассоциативности произведения операторов. Пользуясь свойством (2), легко доказать, что результат умножения любого конечного числа логических операторов, записанных в определенном порядке, от способа расстановки скобок не зависит: $(DC)(BA) = D(C\,(BA)) = D\,((CB)\,A) = (D\,(CB))\,A$. Произведение p сомножителей, равных оператору A, назовем p-й степенью оператора A и обозначим через A^p. Действия со степенями подчиняются обычным правилам в случае, когда A: $L \to L$:

$$A^pA^q = A^{p+q}; \tag{3}$$

$$(A^p)^q = A^{pq}. \tag{4}$$

Если произведение двух логических операторов A и B над логическим пространством L не зависит от порядка входящих в него сомножителей, то такие операторы будем называть перестановочными, или коммутирующими. Из выражения (3) видно, что степени одного и того же логического оператора перестановочны между собой. Если логические операторы A и B перестановочны, то

$$(BA)^2 = BABA = BBAA = B^2A^2$$

и в общем случае

$$(BA)^p = B^pA^p. \tag{5}$$

Если же A и B не являются коммутирующими, то свойство (5) может и не иметь места.

Если некоторый логический оператор каждому вектору ставит в соответствие тот же самый вектор, то такой оператор будем называть единичным, или тождественным, и обозначать через E. Следовательно, для любого вектора $l \in L$ справедливо следующее соотношение:

$$El = l.$$

Пусть A: $L \to D$ – некоторый логический оператор. Из того, что

$$(AE)l = A(El) = Al;$$

$$(EA)l = E(Al) = Al,$$

следует

$$EA = AE = A. \tag{6}$$

Если для логического оператора A: $L \to L$ существует такой логический оператор B: $L \to L$, что

$$AB = E;\ BA = E, \tag{7}$$

то $\boldsymbol{B}$ назовем обратным по отношению к A, а сам оператор A назовем обратимым. Любой обратимый логический оператор логического пространства L имеет только один обратный. Доказательство этого утверждения будем проводить от противного. Предположим, что A имеет два обратных оператора $\boldsymbol{B}$ и C. Тогда, умножая соотношение $AC = \boldsymbol{E}$ слева на $\boldsymbol{B}$ и учитывая соотношения (2) и (7), получаем $\boldsymbol{EC} = \boldsymbol{BE}$, т.е. $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$.

Логический оператор, обратный по отношению к A, будем обозначать через A^{-1}. В выражения (7) операторы A и $\boldsymbol{B}$ входят симметрично. Следовательно, если $\boldsymbol{B}$ является обратным по отношению к A, то A является обратным по отношению к $\boldsymbol{B}$, т.е.

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{8}$$

Условимся считать по определению, что

$$A^0 = \boldsymbol{E},\ A^{-n} = (A^{-1})^n \quad (n = 1, 2, ...).$$

Тогда из соотношений (7) и (8) видно, что выражения (3) и (4) имеют место как для целых положительных, так и для целых отрицательных показателей степеней. Например, если оператор A обратим, то

$$(A^{-n})^{-1} = (A^{-1})^{-n} = A^n.$$

Из соотношения

$$\boldsymbol{ABB}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$$

следует, что

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

Логический оператор A: $L \to D$ назовем линейным, если он переводит произведение вектора $l \in L$ и логического скаляра α в произведение того же скаляра и соответствующего вектора $Al \in D$, а дизъюнкцию векторов из пространства L — в дизъюнкцию соответствующих им векторов из пространства D. Иными словами, логический оператор A: $L \to D$ является линейным, если для любых векторов l, $g \in L$ и любого логического скаляра α выполняются свойство однородности:

$$A(\alpha l) = \alpha(Al)$$

и свойство аддитивности:

$$A(l \vee g) = Al \vee Ag.$$

Если при реализации свойства однородности положить $\alpha = 0$, то получим $A0 = 0$. Иными словами, любой линейный логический оператор переводит нулевой вектор в нулевой. Из свойств однородности и аддитивности вытекает такое свойство линейных логических операторов: если A – линейный логический оператор, то

$$A(\alpha_1 l_1 \vee \alpha_2 l_2 \vee ... \vee \alpha_m l_m) = \alpha_1(Al_1) \vee \alpha_2(Al_2) \vee ... \vee \alpha_m(Al_m), \tag{9}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ — произвольные элементы поля логических скаляров; $l_1, l_2, ..., l_m \in L$. Для пары векторов l, g логического пространства L справедливо равенство

$$\boldsymbol{E}(\alpha l \vee \beta g) = \alpha l \vee \beta g = \alpha(\boldsymbol{E}l) \vee \beta(\boldsymbol{E}g),$$

откуда следует, что единичный оператор над логическим пространством L является линейным. Оператор, переводящий каждый вектор пространства L в нулевой, назовем нулевым и обозначим через $\boldsymbol{O}$. Если линейный оператор A взаимно однозначный, то назовем его изоморфизмом, а пространства образов D и прообразов L – изоморфными [1].

Теорема. *Если $a_1, a_2, ..., a_n$ — произвольный базис совершенного* [4] *логического пространства L, а $b_1, b_2, ..., b_n$ — произвольные векторы в пространстве D, то существует один и только один линейный логический оператор A: $L \to D$, переводящий векторы $a_1, a_2, ..., a_n$ в векторы $b_1, b_2, ..., b_n$ соответственно.*

Доказательство. Выберем в логическом пространстве L произвольный вектор l и разложим его по базису $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$l = \xi_1 a_1 \vee \xi_2 a_2 \vee ... \vee \xi_n a_n . \tag{10}$$

Построим вектор $d \in D$:

$$d = \xi_1 b_1 \vee \xi_2 b_2 \vee ... \vee \xi_n b_n .$$

Оператор, переводящий l в d, обозначим через $\boldsymbol{A}$. Следовательно, если для l справедливо равенство (10), то

$$Al = \xi_1 b_1 \vee \xi_2 b_2 \vee ... \vee \xi_n b_n . \tag{11}$$

Подставив сюда $\xi_i = 1$; $\xi_j = 0$ $(i \neq j,\ j = 1, ..., n)$, получим $Aa_i = b_i$ $(i = 1, ..., n)$, откуда вытекает, что оператор $\boldsymbol{A}$ переводит векторы $a_1, a_2, ..., a_n \in L$ в $b_1, b_2, ..., b_n \in D$. Докажем линейность оператора $\boldsymbol{A}$. Умножим обе части равенства (10) на произвольный логический скаляр α. В результате получим равенство

$$\alpha l = (\alpha\xi_1)a_1 \vee (\alpha\xi_2)a_2 \vee ... \vee (\alpha\xi_n)a_n.$$

Сравнив его с выражением (11), запишем

$$A(\alpha l) = (\alpha\xi_1)b_1 \vee (\alpha\xi_2)b_2 \vee ... \vee (\alpha\xi_n)b_n.$$

Иными словами,

$$A(\alpha l) = \alpha(Al). \tag{12}$$

Возьмем вектор $g \in L$ такой, что

$$g = \eta_1 a_1 \vee \eta_2 a_2 \vee ... \vee \eta_n a_n.$$

Пользуясь выражением для дизъюнкции логических векторов, имеем

$$l \vee g = (\xi_1 \vee \eta_1)a_1 \vee \ldots \vee (\xi_n \vee \eta_n)a_n,$$

откуда следует, что

$$Ag = \eta_1 b_1 \vee \eta_2 b_2 \vee \ldots \vee \eta_n b_n;$$

$$A(l \vee g) = (\xi_1 \vee \eta_1)b_1 \vee \ldots \vee (\xi_n \vee \eta_n)b_n. \qquad (13)$$

Из равенства (13) с очевидностью вытекает, что

$$A(l \vee g) = \xi_1 b_1 \vee \ldots \vee \xi_n b_n \vee \eta_1 b_1 \vee \ldots \vee \eta_n b_n = Al \vee Ag. \qquad (14)$$

Равенства (12) и (14) доказывают линейность логического оператора $\boldsymbol{A}$. Докажем единственность этого оператора. Допустим, что существует еще по крайней мере один оператор $\boldsymbol{B}$, переводящий векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ логического пространства L в $b_1, b_2, \ldots, b_n$ из пространства D соответственно. По условию имеем:

$$\boldsymbol{B}a_i = b_i \ (i = 1, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что если для вектора $l \in L$ в этом пространстве имеет место разложение по базису согласно равенству (10), то

$$\boldsymbol{B}l = \xi_1(\boldsymbol{B}a_1) \vee \ldots \vee \xi_n(\boldsymbol{B}a_n) = \xi_1 b_1 \vee \ldots \xi_n b_n = \boldsymbol{A}l.$$

Другими словами, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *О логических* пространствах / Н.А. Гвоздинская, З.В. Дударь, С.А. Пославский, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // АСУ и приборы автоматики. 1997. Вып. 106. С. 21–30. 2. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975. 400 с. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Неполные и полные логические пространства // Проблемы бионики. 1991. Вып. 46. С. 10–17 4. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

Поступила в редколлегию 23.04.98