Проблемы бионики
1998. Вып. 48. С. 64—69

УДК 510.62

С.А. ПОСЛАВСКИЙ, В.А. ПОХОДЕНКО,
С.Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Математическое описание $u=Ax$ исследуемого процесса A при классической идентификации отыскивается по его входным x и выходным u сигналам. Такая идентификация называется прямой, поскольку она требует физического измерения выходных сигналов u. Идентификация информационных процессов, реализуемых человеком, часто имеет дело с такими процессами, выходные сигналы которых субъективны. Субъективные состояния (ощущения, восприятия, мысли и т. п.) не могут быть физически измерены. Поэтому методы прямой идентификации здесь неприменимы. Разновидностью непрямой идентификации является *компараторная идентификация*, имеющая дело с двумя идентичными процессами $u=Ax$ и $v=Ay$, выходные сигналы которых анализируются компаратором $t=D(u, v)$, реализующим предикат равенства.

Компараторная идентификация имеет обширную сферу применения. Это обусловлено способностью человека устанавливать факт равенства или неравенства двух любых своих субъективных состояний. Например, человек способен установить, равны или нет ощущения цвета u, v, порождаемые предъявленными ему световыми излучениями x, y; субъективные образы, возникающие в его сознании при восприятии тех или иных физических ситуаций; смыслы, порождаемые различными текстами, и т.п. Цель *структурной идентификации* — установить характеристические свойства предиката $E(x, y)=D(Ax, Ay)$, соответствующие заданному общему виду преобразования A, *параметрической* — отыскать численные значения параметров исследуемого процесса, присутствующих в общем виде преобразования A. Имеется много различных психофизических процессов, которые могут быть адекватно описаны компараторным методом в виде линейного оператора A, определенного на пространстве R^m над полем вещественных чисел. Примером может служить процесс зрения человека, преобразующий световые излучения x в ощущения цвета u, который идентифицируется линейным оператором $u=Ax$ [1]. В статье рассмотрены теоретические аспекты компараторной идентификации конечномерных линейных процессов и ее практическое применение для математического описания процесса зрения человека.

Предикат E, определенный на $R^m \times R^m$, называется *аддитивным*, если при любых x, x', y, $y' \in R^m$ $E(x, y)$ и $E(x', y')$ влечет $E(x+x', y+y')$; *однород-*

ным, если при любых $x,\ y\in R^m$ $E(x,\ y)$ влечет $E(\alpha x,\ \alpha y)$ при любом $\alpha\in R$. Аддитивный и однородный предикат E называется *линейным*. Предикат E называется *n-мерным*, если существуют векторы $a_1,\ \ldots\ ,a_n\in R^m$, такие что для каждого $x\in R^m E\left(x, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\right)$ при единственном наборе вещественных чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, и *нульмерным*, если при любом $x\in R^m$ $E(x,0)$. Векторы $a_1,\ldots,a_n$ называются *основными* для предиката E.

Теорема 1. *Предикат эквивалентности E, определенный на $R^m\times R^m$, линеен в том и только том случае, если найдется проектор P в R^m такой, что при любых $x,\ y\in R^m$ $E(x,\ y)=D(Px,\ Py)$. Каждый линейный предикат E имеет единственную размерность n $(0\le n\le m)$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $S\subseteq R^m$, заданное условием $S=\{y\,|\,E(0,\ y)\}$. Оно является подпространством R^m размерности m-n. Выберем базис $a_1,\ldots,a_n$ в R^m так, чтобы векторы $a_{n+1},\ldots,a_m$ служили базисом для подпространства S. Пусть $x=\sum_{i=1}^{m}\xi_i a_i$ — разложение по базисным векторам произвольного $x\in R^m$. Если $n\neq 0$, то $P_x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i$ есть проекция x параллельно S на подпространство $T\subseteq R^m$, натянутое на векторы $a_1,\ldots,a_n$. При этом $\dim T=n$, $S\oplus T=R^m$, $S=\ker P$. Выбор дополнительного к S подпространства T неоднозначен, однако существует естественный изоморфизм $\varphi{:}T\to R^m/E$, сопоставляющий каждому вектору $u\in T$ класс $W_u=\{u+z\,/z\in S\}$ из фактор-пространства R^m/E. На множестве классов вводим операции сложения $W_x+W_y=W_{x+y}$ и умножения на число α $W_x=W_{\alpha x}$ $(\alpha\in R)$. Для любых x, $y\in R^m$ условия $E(x,\ y)$ и $\exists u\in T(x,y\in W_u)$ равносильны. Предикат E является ядерной эквивалентностью для проектора P [2].

Укажем алгоритм определения размерности n линейного предиката эквивалентности E и выбора его основных векторов. На первом шаге выбираем вектор a_1, удовлетворяющий условию $\overline{E}\,(0,\ a_1)$. Если вектор a_1 не существует, то предикат E нульмерен. На i-м шаге выбираем вектор a_i, удовлетворяющий условию $\forall\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}\in R\ \overline{E}\left(a_i, \sum_{k=1}^{i-1}\alpha_k a_k\right)$. Алгоритм обрывается на $(n+1)$ — м шаге, когда вектор a_n уже найден, а вектор a_{n+1} не существует. Возможны различные варианты выбора основных векторов для предиката E. Алгоритм позволяет получать любые варианты основных векторов. Векторы $a_1,\ldots,a_n$ могут быть использованы в качестве базисных для подпространства T.

Пусть $e_1,\ldots,e_m$ — базис пространства R^m. Предикат E называется *базисно рефлексивным*, если при любых $k=\overline{1,m}$ $E(e_k, e_k)$; *базисно n-мерным*, если для каждого $k=\overline{1,m}$ $E\left(e_k, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\right)$ при единственном наборе вещественных чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}$.

Теорема 2. *Линейный предикат, определенный на $R^m \times R^m$, является n-мерной эквивалентностью тогда и только тогда, когда он обладает свойствами базисной рефлексивности и базисной n-мерности. Указанная система свойств несократима.*

Теорема 3. *Для каждой n-мерной линейной эквивалентности E, определенной на $R^m \times R^m$, найдется линейный оператор A, отображающий R^m на R^n, такой, что при любых $x, y \in R^m$ $E(x, y)=D(Ax, Ay)$.*

Оператор A называется *характеристическим* для предиката E. Его выбор для заданного предиката неоднозначен. Найдем связь между проектором P и оператором A, о которых шла речь в теоремах 1 и 3. Пусть E — линейный n-мерный предикат эквивалентности на $R^m \times R^m$, $A{:}R^m \to R^n$ — его характеристический оператор, $A=\left\|\alpha_{ij}\right\|$ — матрица оператора A a_i $(i=\overline{1,n})$ — какие-нибудь прообразы базисных векторов из R^n. Тогда $Ae_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}a_i$.

В то же время, для проектора P в роли T можно выбрать подпространство R^m натянутое на векторы $a_1,\ldots,a_n$. Сделав так, получим: $Pe_j=\sum_{i-1}^{n}\alpha_{ij}a_i$. Таким образом, $\ker A=\ker P$.

Характеристический оператор A n-мерного линейного предиката эквивалентности E определяется матрицей $A=\left\|\alpha_{ij}\right\|$ размера $n \times m$. Укажем метод отыскания последней. Используем специально подобранные векторы $b_j \in R^m$ $(j=\overline{1,m})$, для которых отыскиваются числа β_{ij}, удовлетворяющие условию $E(b_j, \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} a_i)$. По числам β_{ij} затем определяем числа α_{ij}, образующие матрицу A. В первом варианте метода берем векторы $b_1=(\delta_1, 0,\ldots,0)$, $b_2=(0,\delta_2, 0,\ldots,0),\ldots,b_m=(0,\ldots, 0,\delta_m)$, во втором — векторы $b_1=(\delta_1, 0,\ldots,0)$, $b_2=(\delta_1, \delta_2, 0, \ldots,0),\ldots,b_m=(\delta_1, \delta_2,\ldots,\delta_m)$. Здесь $\delta_1, \delta_2,\ldots, \delta_m$ —

произвольно выбираемые ненулевые вещественные числа. Числа α_{ij} $(i=\overline{1,n}\,,\ j=\overline{1,m}\,)$ вычисляем в первом варианте метода по формуле $\alpha_{ij}=\beta_{ij}/\delta_j$, во втором — по формуле $\alpha_{ij}=(\beta_{ij}-\beta_{i,j-1})/\delta_j$. В более общем случае в роли β_{ij} берем такие векторы $b_j=\sum\limits_{i=1}^{m}\gamma_{ij}e_i$ $(j=\overline{1,m})$, чтобы для матрицы $C=\left\|\gamma_{ij}\right\|$ существовала обратная матрица C^{-1}. К векторам b_j подбираем вещественные числа β_{ij} такие, чтобы удовлетворялось условие $E\left(b_j,\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_{ij}a_i\right)$. Искомая матрица $A=\left\|a_{ij}\right\|$ определяется формулой $A=BC^{-1}$, где $B=\left\|b_{ij}\right\|$.

Линейные операторы A и A', отображающие R^m на R^n, называются конгруэнтными, если найдется взаимно однозначное отображение B: $R^m\to R^n$ такое, что $A'=BA$. Линейные предикаты эквивалентности, определенные на $R^m\times R^m$, совпадают в том и только том случае, если их размерности одинаковы, а характеристические операторы конгруэнтны. Условие равенства предикатов E и E' можно записать также в виде ker A = =ker A', где A и A' — характеристические операторы предикатов E и E'. Пусть A и A' — матрицы операторов A и A'. Условие равенства предикатов E и E' запишется следующим образом: $rang\,A=rang\,A'=rang\left\|\begin{matrix}A\\A'\end{matrix}\right\|$, где $\left\|\begin{matrix}A\\A'\end{matrix}\right\|$ — матрица, составленная из матриц A и A', выписанных одна под другой. Это же условие можно представить также и в виде $A'=BA$, где B — невырожденная матрица размера $n\times n$.

Пусть E и E_1 — линейные n-мерные предикаты эквивалентности на $R^m\times R^m$ и $R_1{}^m\times R_1{}^m$. Предикат E называется F-изоморфным предикату E_1, если при любых $x,\ y\in R^m$ $E(x,y)=E_1(Fx,Fy)$, где $F:R^m\to R_1{}^m$ — обратимый линейный оператор. Пусть $A:R^m\to R^n$ и $A_1:R_1{}^m\to R_1{}^n$ — характеристические операторы предикатов E и E'.

Теорема 4. *Линейные n-мерные предикаты эквивалентности E и E_1 F-изоморфны тогда и только тогда, когда существует обратимый линейный оператор $G_1:R^n\to R_1{}^n$, такой что $A=G^{-1}A_1F$.*

Из теоремы следует, что установление F-изоморфности линейных эквивалентностей E и E_1 сводится к проверке равенств

$rang\, A = rang\, A' = rang \left\| \begin{matrix} A & \\ A_1 & F \end{matrix} \right\|$, где A, A_1, F — матрицы операторов A, A_1, F.

Применим изложенные выше теоретические результаты для идентификации процесса цветового зрения человека. Световое излучение, действующее на глаз человека, формально представляем в виде вектора пространства R^m . Спектр светового излучения выражается координатным представлением вектора. Число m координат вектора совпадает с числом участков, на которые разбивается частотный интервал спектра. Уровни лучистой яркости на участках спектра соответствуют координатам вектора. Число m выбирается исследователем в зависимости от требуемой точности математического описания светового излучения. В роли базисных можно использовать излучения единичной яркости, ограниченные одним из только что упомянутых участков спектра. Однонаправленное совмещение в пространстве двух световых излучений соответствует сложению векторов. Изменение потока излучения в α раз при сохранении его спектрального состава (например, диафрагмированием) соответствует умножению числа α на вектор.

Предикат $E(x, y)$ описывает поведение человека, воспринимающего на соседних полях сравнения световые излучения x, y и устанавливающего равны или нет возбуждаемые ими цвета. Если цвета равны, то человек реагирует на излучения x, y утвердительным ответом $E(x, y)=1$, если не равны, то отрицательным $E(x, y)=0$. Свойства предиката E интерпретируются как законы цветового зрения. Закон рефлексивности гласит: *одинаковые световые излучения одноцветны*. Закон симметричности: *одноцветные излучения остаются одноцветными после их перестановки на полях сравнения*. Закон транзитивности: *если световые излучения x, y и y, z попарно одноцветны, то излучения x, z также одноцветны*. Закон аддитивности: *суммы одноцветных излучений одноцветны*. Закон однородности: *после одинакового изменения интенсивности одноцветные излучения остаются одноцветными*. Закон n-мерности: *для каждого человека найдутся основные излучения $a_1,\ldots,a_n$ такие, что любое излучение x может быть уравнено по цвету со смесью $\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n$ основных излучений при единственном наборе их интенсивностей $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$*. Перечисленные законы с высокой точностью выполняются в эксперименте. У большинства людей зрение трехкомпонентно. Однако встречаются лица с двух- и однокомпонентным зрением. Слепота соответствует нулькомпонентному зрению.

Для идентификации цветового зрения человека как линейного процесса, преобразующего m-мерные сигналы в n-мерные, достаточно выполнения законов аддитивности, однородности, базисной рефлексивности и базисной

n-мерности (теорема 2). Каждый цвет представляем в виде вектора n-мерного линейного пространства, называемого *цветовым*. Размерность цветового пространства и основные излучения отыскиваются экспериментально вышеописанным методом. Цвет u, возбуждаемый в сознании человека световым излучением x, определяется линейным оператором $u= Ax$, матрица которого находится методом, описанным выше. Оператор A определяет преобразование светового излучения в цвет, осуществляемое зрительной системой человека. Предикат E представляется в виде $E(x, y)=D(Ax, Ay)$. Предикат равенства $D(u, v)$ описывает работу сознания человека, сравнивающего цвета $u=Ax$ и $v=Ay$. Все световые излучения x одного цвета $u=Ax$ называются *метамерными*, они образуют множество W_u, которое естественно принять в качестве объективного представления цвета u. Сложение цветов $u=Ax$ и $v=Ay$ определяется зависимостью $u+v=A(x+y)$, умножение числа α на цвет $u=Ax$ — зависимостью $\alpha u=A(\alpha x)$.

Строки матрицы A преобразования A светового излучения в цвет интерпретируем как *функции спектральной чувствительности зрения* (*кривые сложения*) [3], они могут быть найдены из эксперимента по методу, описанному выше. Пересчет координат цвета излучения x при переходе к новым основным цветам можно выполнить, используя понятия конгруэнтности операторов по формуле $A'(x)=BA(x)$. Пересчет кривых сложения может быть осуществлен с помощью формулы $A'=BA$. Иногда в роли базисных удобнее брать не монохроматические, а произвольные излучения (например, когда базис излучений представлен набором цветных ламп). В этом случае возникает необходимость пересчета результатов идентификации зрения конкретного испытуемого из одного базиса излучений в произвольно выбранный другой. Данная задача решается на базе теоремы 4 при помощи формулы $A=G^{-1}A_1F$.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. Х.: Выща шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1987. 160 с. 2. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука. 1970. 392 с. 3. *Мешков В.В., Матвеев А.Б.* Основы светотехники. Ч. 2. М.: Энергоатомиздат, 1989. 429 с.

Поступила в редколлегию 28.10.97