

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 06 ” листопада 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Резніку Юрію Сергійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Метод R -функцій у математичному моделюванні стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах

затверджена наказом по університету від 2 листопада 2023 р. № 1276 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель теплопровідності у кусково-однорідному середовищі

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	6 – 12 листопада 2023 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	13 – 26 листопада 2023 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	27 листопада – 10 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	11 грудня – 24 грудня 2023 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	25 грудня 2023 р. – 9 січня 2024 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання 6 листопада 2023 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Сидоров М.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 68 с., 1 табл., 8 рис., 1 дод., 15 джерел.

ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ, КУСКОВО-ОДНОРІДНЕ СЕРЕДОВИЩЕ,
УМОВИ СПРЯЖЕННЯ, МЕТОД R -ФУНКЦІЙ, МЕТОД РІТЦА.

Об'єкт дослідження – стаціонарні процеси теплопровідності у кусково-однорідному середовищі.

Мета роботи – застосування структурного методу (методу R -функцій) до знаходження розв'язку крайової задачі, яка є математичною моделлю стаціонарного процесу теплопровідності у кусково-однорідному середовищі.

Методи дослідження – конструктивні методи теорії R -функцій та чисельні методи розв'язування задач математичної фізики.

У кваліфікаційній роботі розглянуто задачу математичного моделювання стаціонарного процесу теплопровідності у кусково-однорідному середовищі. Було проведено огляд математичних моделей теплопровідності, методів їх чисельного аналізу та зроблено висновок про доцільність використання структурного методу R -функцій у поєднанні з методом Рітца. На основі методики побудови структур розв'язку побудовано жмуток функцій, що точно задовольняє умови задачі, включаючи умови спряження. Для апроксимації невизначеної компоненти жмутка запропоновано використати метод Рітца. Запропонована методика була алгоритмізована та програмно реалізована у системі комп'ютерної алгебри Mathematica 13.2. Наведено результати обчислювального експерименту для тестової задачі.

ABSTRACT

Introductory note: 68 pages, 1 table, 8 figures, 1 appendix, 15 sources.

THERMAL CONDUCTIVITY, PIECEWISE HOMOGENEOUS MEDIUM, COUPLING CONDITIONS, *R*-FUNCTIONS METHOD, RITZ METHOD.

The object of research is the heat conduction stationary processes in a piecewise homogeneous medium.

The purpose of the work is to apply the structural method (*R*-functions method) to find the solution of the boundary value problem, which is a mathematical model of the stationary process of heat conduction in a piecewise homogeneous medium.

Methods of research are the constructive methods of the *R*-functions theory and numerical methods of solving the mathematical physics problems.

The qualifying work considers the problem of mathematical modeling of the stationary process of heat conduction in a piecewise homogeneous medium. A review of mathematical models of thermal conductivity, methods of their numerical analysis was conducted, and a conclusion about the appropriateness of using the *R*-functions structural method in combination with the Ritz method was made. Based on the methodology for constructing solution structures, a bundle of functions that exactly satisfies the conditions of the problem, including conjugation conditions, was constructed. It was proposed to use the Ritz method to approximate the undetermined component of the bundle. The proposed technique was algorithmized and implemented in the Mathematica 13.2 computer algebra system. The results of the computational experiment for the test problem are given.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	7
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	9
1.1 Огляд математичних моделей процесів теплопровідності	9
1.2 Огляд методів чисельного аналізу задач математичної фізики, що є математичними моделями стаціонарних теплофізичних процесів	17
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	26
1.4 Постановка задач дослідження	28
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	30
2.1 R -функції і розв'язання оберненої задачі аналітичної геометрії	30
2.2 Структурний метод акад. В.Л. Рвачова (метод R -функцій)	35
2.3 Застосування структурного методу (методу R -функцій) до математичного моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах	41
Висновки за розділом 2	44
3 Програмна реалізація	45
3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 13.2 в інженерних розрахунках	45
3.2 Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах	46
3.3 Опис програми	46
Висновки за розділом 3	47
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	49
4.1 Постановка тестової задачі для обчислювального експерименту	49
4.2 Обчислювальний експеримент з розв'язання тестової задачі	50
Висновки за розділом 4	56
Висновки	57
Перелік джерел посилання	58
Додаток А Лістинг програми	60

ВСТУП

Актуальність теми. Процеси теплопровідності зустрічаються в багатьох галузях науки та техніки. Зокрема, це процеси теплопередачі між двома тілами з різними температурами, що відбувається через теплопровідні матеріали; процеси теплопровідності в електронних пристроях, наприклад, у процесорах комп'ютерів; процеси теплопровідності в будівельних матеріалах, таких як стіни, підлоги, дахи; процеси теплопровідності в автомобільних двигунах та системах охолодження; процеси теплопровідності в промислових печах, котлах та інших технологічних процесах; процеси теплопровідності в організмі людини, наприклад, при вимірюванні температури тіла тощо. Отже, процеси теплопровідності мають широке коло застосувань. Проте пряме дослідження цих процесів може бути досить складним. Тому на перший план виходить застосування при дослідженні процесів теплопровідності методу математичного моделювання. Математичне моделювання дозволяє ефективно вивчати теплопередачу в різних матеріалах та системах, що проводить до економії часу та коштів на експериментах; дає можливість прогнозувати поведінку матеріалів та систем при різних умовах, що допомагає уникнути небезпеки та зберегти ресурси; дозволяє оцінити ефективність нових матеріалів у різних умовах, що сприяє розробці нових матеріалів з високою ефективністю; дозволяє визначити оптимальні параметри для енергоефективної роботи систем опалення та охолодження. Крім того, при математичному моделюванні широко використовуються комп'ютерні програми для створення точних та реалістичних моделей, що дозволяє зменшити помилки та підвищити точність.

Для чисельного дослідження математичних моделей процесів теплопровідності використовуються різні чисельні методи: методи скінченних різниць (сіток), методи граничних елементів, методи скінченних елементів тощо. Проте всі зазначені групи методів можуть лише наближено урахувати геометричну інформацію, що міститься у постановці задачі. Точно урахувати у обчислювальному алгоритмі на аналітичному рівні геометричну інформацію, що

входить до постановки задачі, можна лише завдяки використанню конструктивного апарату теорії R -функцій, який запропоновано акад. НАН України В.Л. Рвачовим. Особливо це є важливим при використанні чисельних методів в задачах розрахунку температурного поля у кусково-однорідному середовищі.

Отже, застосування для моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах структурного методу (методу R -функцій) є актуальною задачею.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є застосування структурного методу (методу R -функцій) до знаходження розв'язку крайової задачі, яка є математичною моделлю стаціонарного процесу теплопровідності у кусково-однорідному середовищі.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз математичних моделей процесів теплопровідності;
- ознайомитися з чисельними методами отримання наближеного розв'язку задач математичної фізики, застосованих для дослідження температурних полів;
- розробити алгоритм застосування структурного методу (методу R -функцій) до чисельного дослідження стаціонарного процесу теплопровідності у кусково-однорідному середовищі;
- виконати програмну реалізацію розробленого алгоритму в пакеті Mathematica 13.2;
- провести обчислювальний експеримент для тестової задачі.

Об'єктом дослідження є стаціонарні процеси теплопровідності у кусково-однорідному середовищі.

Предметом дослідження є двовимірні крайові задачі для температури та застосування до знаходження її розв'язку структурного методу (методу R -функцій).

Методи дослідження. У роботі використовуються конструктивні методи теорії R -функцій та чисельні методи розв'язування задач математичної фізики.

Публікації. Результати, отримані у роботі, було представлено на 27-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 10-12 травня 2023 р.) [8].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Огляд математичних моделей процесів теплопровідності

Теплопровідність – це молекулярне перенесення тепла (або внутрішньої енергії) між тілами, що безпосередньо стикаються, або частинками одного тіла з різною температурою, при якому відбувається обмін енергією руху структурних частинок (молекул, атомів, вільних електронів). Вона визначається тепловим рухом мікрочастинок тіла. У чистому вигляді явище теплопровідності спостерігається у твердих тілах, нерухомих газах та рідинах за умови неможливості виникнення в них конвективних струмів [5, 10].

Передача теплоти шляхом теплопровідності пов'язана з різницею температур тіла. Сукупність значень температур всіх точок тіла в даний час називається температурним полем. У загальному випадку рівняння температурного поля має вигляд:

$$u = f(x, y, z, t),$$

де u – температура тіла;

x, y, z – координати точки;

t – час.

Таке температурне поле називається нестационарним і відповідає режиму теплопровідності, що не встановився. Якщо температура тіла не змінюється з часом, то температурне поле називається стаціонарним.

Температура може бути функцією однієї, двох та трьох координат, відповідно температурне поле буде одновимірним, двовимірним та тривимірним.

Якщо з'єднати всі точки тіла з однаковою температурою, то отримаємо поверхню рівних температур, яка називається ізотермічною. Оскільки у певній точці тіла в даний час може бути тільки одна температура, ізотермічні поверхні

не перетинаються; всі вони або замикаються, або закінчуються на межі тіла. Перетин ізотермічних поверхонь площиною дає на ній сім'ю ізотерм.

Для розв'язування задач, пов'язаних із знаходженням температурного поля, необхідно скласти диференціальне рівняння теплопровідності, яке встановлює залежність між температурою, часом та координатами елементарного об'єму.

Таким чином, диференціальне рівняння теплопровідності встановлює зв'язок між часовою та просторовими змінними температури тіла, воно математично описує перенесення тепла всередині тіла. Для того щоб знайти температурне поле всередині тіла в будь-який момент часу, тобто щоб розв'язати диференціальне рівняння теплопровідності, треба знати розподіл температури всередині тіла у початковий момент часу (початкова умова), геометричну форму тіла та закон взаємодії між навколишнім середовищем та поверхнею тіла (межова умова).

Сукупність початкової та межових умов називається крайовими умовами; початкова умова називається часовою крайовою умовою, а межова умова – просторовою крайовою умовою.

Розглянемо нерівномірно нагріте тіло. Нехай температура в кожній точці (x, y, z) тіла у момент часу t визначається функцією $u(x, y, z, t)$. Також будь-якої миті часу t функція u визначає скалярне поле – поле температури. Ми розглядатимемо нестационарне поле, оскільки припускаємо, що температура точок тіла змінюється з часом. Якщо зафіксувати момент часу t , то сукупність точок, у яких температура $u(x, y, z, t)$ набуває те саме значення, утворює ізотермічну поверхню (поверхня рівня). На відміну від стаціонарного випадку, форма та розташування ізотермічних поверхонь з часом змінюватимуться.

Як відомо, напрямком найбільшої швидкості зміни температури u збігається з напрямком градієнта функції $u(x, y, z, t)$ при заданому значенні t . При цьому

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

У точках ізотермічної поверхні градієнт спрямований за нормаллю до цієї поверхні у бік збільшення значень u і модуль градієнта дорівнює похідній за цим напрямком:

$$|\text{grad } u| = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}.$$

Вважають, що величина теплового потоку через малу ділянку $\Delta\sigma$ ізотермічної поверхні за час Δt дорівнює

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Delta\sigma \Delta t, \quad (1.1)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, який ми вважаємо сталим.

У лінійному випадку ізотермічними поверхнями є перерізи стрижня, перпендикулярні осі Ox , і $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}$ (якщо напрямок нормалі збігається з додатним напрямом осі Ox).

Теоретично формула (1.1) для величини теплового потоку має місце для будь-яких поверхонь (не тільки ізотермічних). Похідна $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ за напрямком нормалі до обраної поверхні дорівнює проєкції градієнта на цю нормаль, тобто скалярному добутку $\text{grad } u$ на одиничний вектор нормалі \vec{n} :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \text{grad } u \cdot \vec{n}.$$

Тому потік тепла через ділянку $\Delta\sigma$ будь-якої поверхні за час Δt дорівнюватиме

$$\Delta Q = -k \cdot \text{grad } u \cdot \vec{n} \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta t.$$

Для стислості назвемо вектор $-k \cdot \text{grad} u$ вектором теплового потоку і позначимо через $A = -k \cdot \text{grad} u$. Тоді ΔQ є потоком вектора A через елементарну площинку $\Delta\sigma$ за час Δt :

$$\Delta Q = A_n \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta t.$$

Якщо тепер виділити в тілі деяку частину, обмежену замкненою поверхнею S , то потік тепла зсередини через цю замкнену поверхню за час Δt дорівнюватиме добутку потоку вектора A на Δt :

$$\Delta Q = \Delta t \oiint_S A_n d\sigma, \quad (1.2)$$

де A_n – проєкція A на зовнішню нормаль.

Потік Q буде додатним, якщо обрана частина тіла втрачає тепло, і від'ємним, якщо отримує. Застосовуючи до інтегралу у формулі (1.2) теорему Гаусса-Остроградського, запишемо:

$$\oiint_S A_n d\sigma = \iiint_V \text{div} A dv,$$

де V – частина тіла, обмежена поверхнею S , та

$$\text{div} A = -k \cdot \text{div} \text{grad} u = -k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -k \Delta u,$$

де $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Таким чином, кількість тепла Q_1 , отримана виділеною частиною тіла за рахунок проходження теплового потоку, буде дорівнювати $Q_1 = \iiint_V k \Delta u dv$.

Припустимо далі, що у тілі є теплові джерела, щільність яких характеризується функцією $F(x, y, z, t)$. Тоді за проміжок часу $(t, t + \Delta t)$ у вибраній частині тіла виділиться тепло $Q_2 = \Delta t \iiint_V F(x, y, z, t) dv$.

Загальна кількість тепла, що отримає виділений об'єм V , дорівнюватиме сумі $Q_1 + Q_2$. Підрахуємо тепер це тепло інакше, враховуючи зміну температури у точках тіла, що лежать на поверхні S . У точці (x, y, z) за проміжок часу Δt температура зміниться на величину

$$u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t) = \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t.$$

Тому елементарному об'єму Δv для такої зміни температури потрібна кількість тепла, що дорівнює

$$c\rho\Delta v \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

де c – питома теплоємність;

ρ – густина.

А кількість теплоти $Q_3 = \Delta t \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv$ має дорівнювати сумі $Q_1 + Q_2$.

Отже,

$$\iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv = \iiint_V k \Delta u dv + \iiint_V F(x, y, z, t) dv.$$

Переносячи всі доданки в ліву частину, приходимо до рівності

$$\iiint_V \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - F \right) dv = 0.$$

Ця рівність повинна дотримуватися у будь-якій частині тіла V . Це є можливим лише тоді, коли в кожній точці всередині тіла

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - F = 0. \quad (1.3)$$

Такий висновок є правильним, коли всі складові у лівій частині рівності (1.3) є неперервними функціями.

Переписавши останню рівність як $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + \frac{1}{c\rho} F$, отримаємо основне рівняння теплопровідності, де $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ – коефіцієнт теплопровідності. Якщо теплові джерела всередині тіла відсутні, то $F = 0$ і рівняння стає однорідним:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \equiv a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

З фізичних міркувань випливає, що для однозначного опису процесу розповсюдження тепла необхідно задати ще початкову температуру

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

та температурний режим на межі [3, 4].

Для випадку, коли на межі $\partial\Omega$ тіла Ω підтримується задана температура, межева умова виглядає так:

$$u|_{\partial\Omega} = \psi(x, y, z, t).$$

Для випадку, коли на межі задано тепловий потік q , межова умова виглядає так:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = h(x, y, z, t),$$

де $h = -\frac{q}{k}$;

\vec{n} – зовнішня нормаль.

Зокрема, якщо тіло Ω теплоізольовано на межі, то

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0.$$

У випадку, коли оточуючий тіло Ω простір має задану температуру, вважаємо, що на межі відбувається теплообмін за законом Ньютона, тобто

$$q|_{\partial\Omega} = \alpha(u - u_{\text{сер.}})|_{\partial\Omega},$$

де q – тепловий потік;

α – коефіцієнт зовнішньої теплопровідності (теплообміну);

$u_{\text{сер.}}$ – температура простору, яке оточує тіло Ω .

З іншого боку, в одиницю часу з одиниці площі межі $\partial\Omega$ всередину тіла Ω за законом Фур'є йде тепловий потік

$$q_1 = -k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}.$$

Ці потоки мають дорівнювати один одному, тобто

$$-k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial \Omega} = \alpha(u - u_{\text{сеп.}}) \Big|_{\partial \Omega},$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + h_1 u \Big|_{\partial \Omega} = \varphi_1(x, y, z, t),$$

де позначено $h_1 = \frac{\alpha}{k}$, $\varphi_1 = \frac{\alpha u_{\text{сеп.}}}{k}$.

Якщо основним механізмом перенесення енергії з поверхні тіла є випромінювання, то за законом Стефана-Больцмана потрібно поставити на $\partial \Omega$ нелінійну межову умову вигляду

$$-k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \varepsilon_0 \sigma_0 u^4 \text{ на } \partial \Omega,$$

де ε_0 – ступінь чорноти матеріалу, який в загальному випадку залежить від температури;

σ_0 – стала Больцмана.

При описі температурних полів у багатошарових (кусково-однорідних) тілах та оболонках на поверхні контакту двох тіл використовують крайові умови спряження (іноді їх називають умовами четвертого роду).

Для ідеального контакту умови спряження мають вигляд (рівність температур та теплових потоків на контактній поверхні $\partial \Sigma$)

$$u_1 \Big|_{\partial \Sigma} = u_2 \Big|_{\partial \Sigma}, \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial \Sigma} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial \Sigma}.$$

Для неідеального теплового контакту з термічним опором R на поверхні контакту тіл має місце рівність теплових потоків, але з'являється пропорційна їм різниця температур

$$u_1|_{\partial\Sigma} = u_2|_{\partial\Sigma},$$

$$\frac{1}{R}(u_2 - u_1)\Big|_{\partial\Sigma} = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Sigma} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Sigma},$$

де \mathbf{n} – зовнішня нормаль відносно першого тіла до контактної поверхні Σ .

Якщо розглядається стаціонарний процес, от для усталеного значення температури маємо рівняння Пуассона

$$-\Delta u = \frac{F}{k}. \quad (1.4)$$

Початкова умова для рівняння (1.4) не задається, а межові умови не залежать від t .

1.2 Огляд методів чисельного аналізу задач математичної фізики, що є математичними моделями стаціонарних теплофізичних процесів

Опишемо застосування методу сіток [1, 11] на прикладі двовимірної задачі.

У прямокутнику

$$\bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$$

з межею $\partial\Omega$ розглянемо задачу Діріхле

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$u(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (1.6)$$

де $\mu(\mathbf{x})$ – задана функція, що є неперервною на $\partial\Omega$.

Задачу (1.5), (1.6) є математичною моделлю двовимірного стаціонарного процесу теплопровідності у прямокутнику, коли на межі прямокутника підтримується задана температура.

В області Ω введемо рівномірну сітку з кроком h_1 за змінною x_1 і кроком h_2 за змінною x_2 :

$$\bar{\Omega}_h = \{\mathbf{x}_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) = (ih_1, jh_2), i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2, \\ h_1 N_1 = l_1, h_2 N_2 = l_2\}.$$

Вважатимемо, що задача (1.5), (1.6) має єдиний розв'язок, який належить простору $C^4(\Omega)$.

Нехай

$$y = \{y_{ij}, i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2\}$$

– сіткова функція, що задана на сітці $\bar{\Omega}_h$ і апроксимує розв'язок u диференціальної задачі (1.5), (1.6), а

$$[u]_h = \{u_{ij} = u(\mathbf{x}_{ij}), i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2\}$$

– проєкція точного розв'язку стаціонарної задачі на сітку $\bar{\Omega}_h$.

Для апроксимації оператора Лапласа скористаємось п'ятиточковим шаблоном «хрест», що складається з точок \mathbf{x}_{ij} , $\mathbf{x}_{i\pm 1, j}$, $\mathbf{x}_{i, j\pm 1}$. У множині $\bar{\Omega}_h$ виділимо множину внутрішніх вузлів

$$\Omega_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x}_{ij} = (ih_1, jh_2), i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}$$

і множину межових вузлів

$$\partial\Omega_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x}_{0j}, \mathbf{x}_{N_1j}\}_{j=1}^{N_2-1} \cup \{\mathbf{x}_{i0}, \mathbf{x}_{iN_2}\}_{i=1}^{N_1-1}.$$

У внутрішніх вузлах сітки $\mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}}$ оператор Лапласа Δu апроксимуємо виразом $\Delta_{\mathbf{h}} u = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}$, що задається у вузлу $\mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}}$ рівністю

$$\Delta_{\mathbf{h}} u_{ij} = y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = \frac{y_{i-1, j} - 2y_{ij} + y_{i+1, j}}{h_1^2} + \frac{y_{i, j-1} - 2y_{ij} + y_{i, j+1}}{h_2^2}.$$

При цьому оцінка похибки апроксимації має вигляд

$$\Delta_{\mathbf{h}} u_{ij} - \Delta u_{ij} = \frac{h_1^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(\xi_i, x_2^{(j)}) + \frac{h_2^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1^{(i)}, \eta_j),$$

де

$$\xi_i \in (x_1^{(i-1)}, x_1^{(i+1)}), i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \eta_j \in (x_2^{(j-1)}, x_2^{(j+1)}), j = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Тоді задачі (1.5), (1.6) поставимо у відповідність різницеву схему

$$-\Delta_{\mathbf{h}} u_{ij} = f(\mathbf{x}_{ij}), \text{ якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \quad (1.7)$$

$$u_{ij} = \mu_{ij}, \text{ якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega_{\mathbf{h}}. \quad (1.8)$$

Тут $\mu_{ij} = \mu(\mathbf{x}_{ij})$, $i = 0, 1, \dots, N_1$, $j = 0, 1, \dots, N_2$.

Недоліком скінченно-різничевих схем є те, що замість отримання наближеного розв'язку у вигляді неперервної функції ми отримаємо лише

каркас наближеного розв'язку, до якого ще треба застосувати апарат інтерполяції. Нехай y_{ij} , $i=0,1,\dots,N_1$, $j=0,1,\dots,N_2$, – значення каркасу наближеного розв'язку задачі (1.5), (1.6), знайдені з системи (1.7), (1.8). Тоді наближений розв'язок задачі (1.5), (1.6) можна записати у вигляді неперервної функції, наприклад, за допомогою кусково-лінійного сплайна:

$$u_{N_1, N_2}(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} y_{ij} \cdot B_1\left(\frac{N_1 x_1}{l_1} - i\right) B_1\left(\frac{N_2 x_2}{l_2} - j\right),$$

$$\text{де } B_1(t) = \begin{cases} t+1, & t \in [-1, 0], \\ 1-t, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases} \text{ – фінітний сплайн Шенберга першого степеня.}$$

Тепер розглянемо загальнішу задачу стаціонарної теплопровідності

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = f(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1.9)$$

$$u(x) = g(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \quad (1.10)$$

Наведемо деякі різницьві схеми для задачі (1.9), (1.10). Вважатимемо, що Ω прямокутник і в ньому введено рівномірну прямокутну сітку $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ з кроками h_1 і h_2 за змінними x_1 і x_2 відповідно. Поставимо у відповідність задачі (1.9), (1.10) нелінійну різницьву схему

$$\Delta u = \varphi, \quad x \in \omega, \quad (1.11)$$

$$y(x) = g(x), \quad x \in \partial\omega. \quad (1.12)$$

Для достатньо гладких функцій $f(x)$ праву частину (1.11) можна взяти у вигляді

$$\varphi = f(x), \quad x \in \omega.$$

Різницевий оператор в (1.11) подається так

$$\Lambda u = -(a_1(x)y_{\bar{x}_1})_{x_1} - (a_2(x)y_{\bar{x}_2})_{x_2}. \quad (1.13)$$

Коефіцієнти різницевого оператора (1.13) можна взяти, наприклад, у вигляді [1]

$$\begin{aligned} a_1(x) &= k(x_1 - 0,5h_1, x_2), \\ a_2(x) &= k(x_1, x_2 - 0,5h_2). \end{aligned}$$

Різницева схема (1.11), (1.12) є системою лінійних рівнянь, тому для її розв'язання треба використовувати якісь ітераційні методи. Огляд можливих ітераційних схем та питання їх збіжності розглянуто у [1, 11].

Іншу групу чисельних методів, що застосовуються для дослідження стаціонарних задач математичної фізики складають варіаційні та проєкційні методи [1, 9, 11]. Розглянемо застосування варіаційного методу Рітца (енергетичного методу) для розв'язування задачі

$$-\Delta u + ru \equiv -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + ru = f, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.14)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.15)$$

де Ω – обмежена область з \mathbb{R}^2 із кусково-гладкою межею $\partial\Omega$;

$$r \in C(\bar{\Omega}), \quad f \in L_2(\Omega).$$

Задачу (1.14), (1.15) розглядатимемо у гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega)$.

Введемо оператор A , що діє за правилом

$$Au = -\Delta u + ru \quad (1.16)$$

на області визначення $D_A \subset H$, що складається з функцій $u \in H$ таких, що:

а) u, u'_x, u'_y неперервні в $\bar{\Omega}$, $u''_{x^2}, u''_{xy}, u''_{y^2}$ неперервні в Ω і належать $L_2(\Omega)$ (умова гладкості);

б) задоволена крайова умова (1.15).

Зауважимо, що умова а) не виключає необмеженого зростання других похідних при наближенні до границі області.

З'ясуємо, які додаткові вимоги потрібно накласти на ці задачі, щоб було обґрунтованим застосування енергетичного методу.

Очевидно, що оператор A є лінійним.

Нехай $u, v \in D_A$. Розглянемо скалярний добуток (Au, v) . Застосовуючи першу формулу Гріна для оператора Лапласа (можливість її застосування забезпечується умовою гладкості), отримаємо

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \iint_{\Omega} (-\Delta u + ru)v dx dy = -\iint_{\Omega} \Delta u \cdot v dx dy + \iint_{\Omega} ruv dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds + \iint_{\Omega} ruv dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + ruv \right) dx dy - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds. \end{aligned}$$

Через умову (1.15) інтеграл за $\partial\Omega$ перетворюється на нуль і

$$(Au, v) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + ruv \right) dx dy,$$

а отже, A – симетричний оператор.

Оскільки

$$(Au, u) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + ru^2 \right] dx dy,$$

то умова $(Au, u) \geq 0$ буде виконана, якщо вимагати невід'ємність функції $r(x, y)$ в Ω . При цьому (з урахуванням того, що $u|_{\partial\Omega} = 0$) рівність $(Au, u) = 0$ буде можлива лише за $u = 0$.

Отже, за умови $r(x, y) \geq 0$ в Ω оператор A буде додатним.

Для подальшого дослідження оператора A нам потрібна нерівність Фрідрікса: якщо u задовольняє умовам гладкості а), то має місце нерівність

$$\|u\|^2 = \iint_{\Omega} u^2 dx dy \leq C_F \left\{ \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\partial\Omega} u^2 ds \right\},$$

де C_F залежить тільки від області Ω .

Нехай $r_0 = \min_{(x,y) \in \bar{\Omega}} r(x, y)$. Тоді, застосовуючи нерівність Фрідрікса (з урахуванням того, що $u|_{\partial\Omega} = 0$), отримаємо

$$\begin{aligned} (Au, u) &= \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + ru^2 \right] dx dy \geq \\ &\geq \frac{1}{C_F} \iint_{\Omega} u^2 dx dy + r_0 \iint_{\Omega} u^2 dx dy = \left(\frac{1}{C_F} + r_0 \right) \|u\|^2. \end{aligned}$$

Таким чином, виконано нерівність

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2,$$

де $\gamma^2 = \frac{1}{C_F} + r_0 > 0$.

Отже, оператор A буде додатно-означеним за умови $\gamma^2 = \frac{1}{C_F} + r_0 > 0$,

причому число r_0 може бути і від'ємним.

На D_A введемо енергетичні скалярний добуток та норму за формулами

$$[u, v] = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + ruv \right) dx dy,$$

$$\|u\|^2 = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + ru^2 \right] dx dy,$$

і, поповнивши D_A у сенсі збіжності за нормою $\|u\|$, отримаємо енергетичний простір H_A .

Тоді перша крайова задача (1.14), (1.15) є еквівалентною задачі знаходження в H_A мінімуму функціонала енергії

$$F[u] = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + ru^2 - 2uf \right] dx dy.$$

Крайова умова (1.15) є головною, тому при виборі координатної послідовності їй треба задовольнити.

Якщо область Ω – прямокутник $(0; a) \times (0; b)$, координатну послідовність для розв'язання першої крайової задачі можна вибрати у вигляді

$$\varphi_{ij}(x, y) = (a-x)(b-y)x^i y^j, \quad i+j=2, 3, 4, \dots,$$

або

$$\varphi_{ij}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi j y}{b}\right), \quad i+j=2, 3, 4, \dots$$

У разі довільної області Ω , якщо відома функція $\omega(x, y)$, що задовольняє умови:

- а) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$;
- б) $\omega(x, y) > 0$ в Ω ;
- в) $|\nabla\omega(x, y)| \neq 0$ на $\partial\Omega$,

то координатну послідовність для розв'язання першої крайової задачі можна вибрати у вигляді

$$\varphi_{ij}(x, y) = \omega(x, y)x^i y^j, \quad i + j = 0, 1, 2, \dots$$

Таку функцію $\omega(x, y)$ можна побудувати для досить широкого класу областей за допомогою методу R -функцій, запропонованого академіком НАН України В.Л. Рвачовим.

Якщо шукати тепер наближений розв'язок задачі у вигляді (використовуємо одновимірну нумерацію координатних функцій)

$$u_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k,$$

то згідно з методом Рітца коефіцієнти c_1, \dots, c_n знаходяться з системи

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_i, \varphi_k] c_k = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

де

$$[\varphi_i, \varphi_k] = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \frac{\partial\varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} \frac{\partial\varphi_k}{\partial y} + r\varphi_i\varphi_k \right) dx dy, \quad i, k = 1, \dots, n,$$

$$(f, \varphi_i) = \iint_{\Omega} f \varphi_i dx dy, i = 1, \dots, n.$$

Теорема 1.1. Нехай задача (1.14), (1.15) розв'язуються енергетичним методом, $r \in C(\bar{\Omega})$, $f(x) \in R_A$ та виконано умови додатної-означеності оператора A крайової задачі. Тоді послідовність $\{u_n\}$ наближених за Рітцем

розв'язків та послідовності $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y} \right\}$ збігаються в середньому до точного

розв'язку u^* та його похідних $\frac{\partial u^*}{\partial x}$, $\frac{\partial u^*}{\partial y}$ відповідної крайової задачі, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} (u_n - u^*)^2 dx dy = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^2 dx dy = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial y} - \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 dx dy = 0.$$

Відмітимо, що безумовною перевагою енергетичного методу є те, що на відміну від скінченно-різницевих методів ми отримуємо ним наближений розв'язок у аналітичному вигляді.

Крім енергетичного методу слід також відзначити метод найменших квадратів та метод Гальоркіна, а також те, що на основі останнього будуються методи скінченних елементів [9, 15].

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Нехай деяка пластинка займає плоску область Ω і складається з двох частин Ω_1 і Ω_2 (рис. 1.1) з коефіцієнтами теплопровідності k_1 і k_2 відповідно. Всередині пластинки наявні джерела тепла, причому щільність внутрішніх

джерел тепла у пластинці описується функцією $F(x, y)$. Бічна поверхня пластинки підтримується при нульовій температурі. Ставиться задача знаходження стаціонарного теплового поля всередині пластинки Ω .

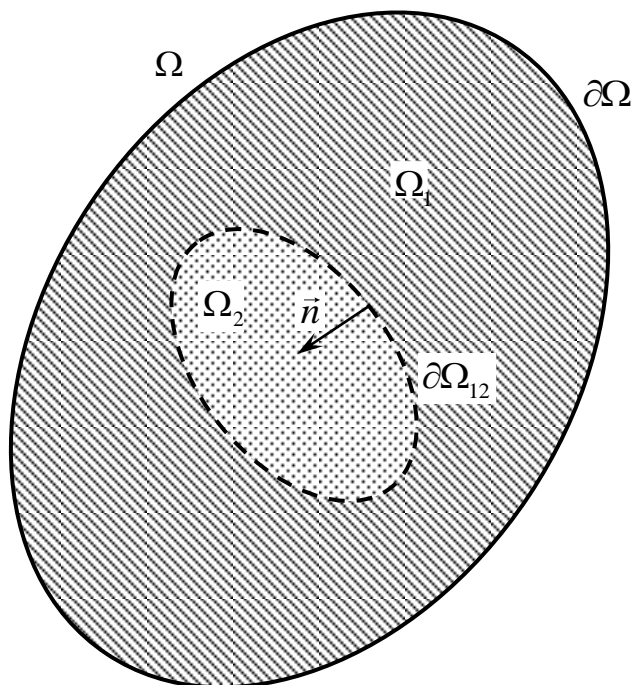


Рисунок 1.1 – Геометрія пластинки Ω

Математичною моделюю такого процесу є наступна крайова задача:

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = F, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.17)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.18)$$

$$u|_{\partial\Omega_{12}-0} = u|_{\partial\Omega_{12}+0}, \quad k_1 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}-0} = k_2 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}+0}, \quad (1.19)$$

де u – температура,

$$k(x, y) = \begin{cases} k_1, & (x, y) \in \Omega_1, \\ k_2, & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad \text{– коефіцієнт теплопровідності.}$$

Зазначимо, що на межі $\partial\Omega_{12}$ розділу двох середовищ задано умови спряження (1.19), які означають, що при переході від підобласті Ω_1 до

підобласті Ω_2 неперервно змінюються температура u та тепловий потік $k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$, де \vec{n} – нормаль до $\partial\Omega_{12}$.

Якщо позначити $u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases}$ то рівняння (1.17) можна

записати у вигляді

$$-\Delta u_1 = \frac{F}{k_1}, \quad (x, y) \in \Omega_1,$$

$$-\Delta u_2 = \frac{F}{k_2}, \quad (x, y) \in \Omega_2,$$

а умови (1.18), (1.19) – відповідно у вигляді

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$u_1|_{\partial\Omega_{12}} = u_2|_{\partial\Omega_{12}}, \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}}.$$

1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного аналізу математичних моделей теплопровідності та методів їх чисельного аналізу, можна зробити висновок, що перспективним є дослідження стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах із застосуванням до їх наближеного розв'язання структурного методу (методу R -функцій).

Отже, метою кваліфікаційної роботи є застосування структурного методу (методу R -функцій) до знаходження розв'язку крайової задачі, яка є математичною моделлю стаціонарного процесу теплопровідності у кусково-однорідному середовищі.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз математичних моделей процесів теплопровідності;
- ознайомитися з чисельними методами отримання наближеного розв'язку задач математичної фізики, застосовних для дослідження температурних полів;
- розробити алгоритм застосування структурного методу (методу R -функцій) до чисельного дослідження стаціонарного процесу теплопровідності у кусково-однорідному середовищі;
- виконати програмну реалізацію розробленого алгоритму в пакеті Mathematica 13.2;
- провести обчислювальний експеримент для тестової задачі.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 R -функції і розв'язання оберненої задачі аналітичної геометрії

При проведенні розрахунків багатьох фізичних процесів виникає потреба в аналітичному описі заданих геометричних об'єктів за допомогою одного рівняння. В цьому полягає обернена задача аналітичної геометрії.

Сформулюємо обернену задачу аналітичної геометрії формально [2, 7, 13]. Нехай в \mathbb{R}^2 задано геометричний об'єкт Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ і необхідно побудувати функцію $\omega(x, y)$, додатну всередині Ω , від'ємну зовні Ω та рівну нулеві на $\partial\Omega$. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ буде в неявній формі визначати геометричне місце точок, що є межею $\partial\Omega$ області Ω [2, 7, 13].

Функція $\omega(x, y)$ може бути досить просто побудована за допомогою методу R -функцій для областей довільної форми, причому функція $\omega(x, y)$ у цьому випадку буде елементарною функцією та матиме вигляд єдиного аналітичного виразу.

Введемо до розгляду характеристичну функцію, що відповідає області Ω

$$\chi(\omega(x, y)) = \begin{cases} 0, & \omega(x, y) < 0, \\ 1, & \omega(x, y) \geq 0. \end{cases}$$

Маючи в розпорядженні деяку систему характеристичних функцій $\chi_i = (\omega_i(x, y) \geq 0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) та булеву функцією $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_m)$, можна побудувати предикат

$$\chi = F(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m) = F((\omega_1 \geq 0), (\omega_2 \geq 0), \dots, (\omega_m \geq 0)),$$

який визначає область Ω , побудовану з допоміжних областей $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ за логічними правилами, що визначаються булевою функцією F , за допомогою

наступних логічних операцій над множинами: “ \cap ” – перетину, “ \cup ” – об’єднання та “ \neg ” – доповнення. Формально це можна подати у вигляді

$$\Omega = F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}, \{\cap, \cup, \neg\}). \quad (2.1)$$

Вважаємо, що вихідні (опорні) області $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ мають простішу форму, ніж Ω , і для кожної з них відоме рівняння її межі $\omega_i(x, y) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Метод R -функцій дозволяє на основі теоретико-множинного опису області Ω отримати в аналітичному вигляді рівняння її межі $\omega(x, y) = 0$.

Означення 2.1. R -функцією (функцією В.Л. Рвачова), що відповідає розбиттю числової осі на інтервали $(-\infty, 0)$ та $[0, +\infty)$, називається така функція, знак якої цілком визначається знаками її аргументів.

Дещо порушуючи строгість, задля уникнення використання тризначної логіки, нуль вважатимемо додатнім числом. При цьому одночасно з R -функцією є заданою деяка супровідна функція булевої алгебри з тією ж кількістю аргументів. Тому можна дати наступне еквівалентне означення R -функції [2, 7, 13].

Означення 2.2. Функція $z = f(x, y)$ називається R -функцією, якщо існує така булева функція F , що $S[z(x, y)] = F[S(x), S(y)]$, де двозначний предикат

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Кожній R -функції відповідає єдина супровідна булева функція. Зворотне твердження не є вірним, і одній і тій самій булевій функції відповідає нескінченна множина (гілка) R -функцій. Множина R -функцій функціонально замкнена, тобто суперпозиція R -функцій також є R -функцією.

Означення 2.3. Система функцій H , складена з R -функцій, називається достатньо повною, якщо множина всіх суперпозицій елементів H (множина

H -реалізованих функцій), має непорожній перетин з кожною гілкою множини R -функцій.

Достатньою умовою повноти системи H є повнота системи H^* відповідних супроводжуючих булевих функцій. Однією з найбільш уживаних у множині булевих функцій є система $H^* = \{X \wedge Y, X \vee Y, \bar{X}\}$.

Перехід від предикатного задання множини Ω у вигляді (2.1) до її задання за допомогою нерівності $\Omega = (\omega(x, y) \geq 0)$ може бути здійснений за допомогою однієї з достатньо повних систем R -функцій.

Наприклад, найбільш часто використовується система \mathfrak{R}_α :

$$\begin{aligned} x \wedge_\alpha y &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right), \\ x \vee_\alpha y &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right), \\ \bar{x} &\equiv -x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тут

$$-1 < \alpha(x, y) \leq 1, \quad \alpha(x, y) \equiv \alpha(y, x) \equiv \alpha(-x, y) \equiv \alpha(x, -y).$$

Перехід від предикатної форми задання області (2.1) до звичайної, прийнятої в аналітичній геометрії, рівняння для межі області відбувається за допомогою формальної заміни Ω на $\omega(x, y)$, Ω_i на $\omega_i(x, y)$ ($i=1, 2, \dots, m$), а символи $\{\cap, \cup, \neg\}$ – на символи R -операцій $\{\wedge_\alpha, \vee_\alpha, -\}$ відповідно. В результаті отримуємо аналітичний вираз $\omega(x, y)$, що задає в елементарних функціях необхідне рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$. При цьому для внутрішніх точок області $\omega(x, y) > 0$, а для зовнішніх $\omega(x, y) < 0$.

Розглянемо деякі окремі випадки системи (2.2).

Із системи (2.2) при $\alpha \equiv 0$ отримаємо систему \mathfrak{R}_0 , яку частіше за все використовують на практиці

$$\begin{aligned}x \wedge_0 y &\equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\x \vee_0 y &\equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \bar{x} &\equiv -x;\end{aligned}\tag{2.3}$$

при $\alpha \equiv 1$ отримуємо систему \mathfrak{R}_1 :

$$\begin{aligned}x \wedge_1 y &\equiv \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \equiv \min(x, y), \\x \vee_1 y &\equiv \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \equiv \max(x, y), \\ \bar{x} &\equiv -x.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Функції системи \mathfrak{R}_1 найбільше легко реалізуються, з точки зору обчислень, а її операції комутативні та асоціативні. Однак, недоліком цієї системи є недиференційованість двомісних R -операцій, що до неї входять, вздовж прямих $x = \pm y$. В той же час, відповідні операції системи \mathfrak{R}_0 мають розриви похідних лише в точці $(0, 0)$.

Існують також і інші достатньо повні системи R -функцій \mathfrak{R}_0^m , \mathfrak{R}_p , \mathfrak{R}_n , \mathfrak{R}_{spl}^m [2, 7, 13]. Двомісні операції системи \mathfrak{R}_0^m при цілих невід'ємних m належать класу C^m в точці $(0, 0)$, а операції з \mathfrak{R}_n є комутативними, асоціативними та належать класу C^{n-1} . Система \mathfrak{R}_p при $p = 2$ перетворюється в \mathfrak{R}_0 , а при $p \rightarrow \infty$ переходить в \mathfrak{R}_1 . Система \mathfrak{R}_{spl}^m є системою поліноміальних сплайнів ступеню m з лінією розриву похідних порядку m : $y = (-1)^{m-1}x$.

Означення 2.4. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ локуса $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ називається нормалізованим на межі $\partial\Omega$ до n -го порядку, якщо функція $\omega(x, y)$ задовольняє умовам

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = -1, \quad \frac{\partial^l\omega}{\partial\vec{n}^l}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (l=2, 3, \dots, n), \quad (2.5)$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

Умови (2.5) означають, що вздовж нормалі до $\partial\Omega$ функція $\omega(x, y)$ поводить себе приблизно як функція відстані r точок цієї нормалі від межі $\partial\Omega$.

Нормалізоване до першого порядку рівняння $\omega(x, y) = 0$ може бути отримане із рівняння $\omega_1(x, y) = 0$ наступним чином [2, 7, 13].

Теорема 2.1. Якщо $\omega(x, y) \in C^m(\mathbb{R}^2)$ задовольняє умови

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial\omega}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} > 0,$$

то функція

$$\omega_1 \equiv \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + |\nabla\omega|^2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^2), \quad (2.6)$$

де $|\nabla\omega| \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2}$, задовольняє умови $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = -1$ у всіх регулярних точках межі $\partial\Omega$.

Якщо $|\nabla\omega_1| \neq 0$ в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, то для побудови нормалізованого до першого порядку рівняння $\omega(x, y) = 0$ локуса Ω можна скористатись простішою формулою

$$\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla \omega_1|}.$$

Для таких областей, як півплощина, смуга, круг, сфера та багато інших, нормалізовані рівняння отримуються шляхом введення простих нормувальних множників. Виявляється, що застосування деяких достатньо повних систем R -функцій дозволяє перенести їх властивість нормалізованості і на випадок складних локусів, для яких наведені прості області є опорними.

З конструктивної точки зору, нормалізація рівняння області призводить до ускладнення аналітичного виразу в (2.6). Проте на практиці процес побудови нормалізованих рівнянь для широкого класу областей можна спростити.

Теорема 2.2. Функція $\omega(x, y)$, утворена з нормалізованих функцій $\omega_i(x, y)$ за допомогою R -операцій систем \mathfrak{R}_α , \mathfrak{R}_p чи \mathfrak{R}_n^0 , також нормалізована в регулярних точках межі, якщо $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

В таблиці 2.1 наведені нормалізовані рівняння деяких простих геометричних об'єктів.

2.2 Структурний метод акад. В.Л. Рвачова (метод R -функцій)

Нехай Ω – деяка відкрита область у просторі \mathbb{R}^2 , $\partial\Omega$ – її межа, $\partial\Omega_i$ – покриття межі $\partial\Omega$, таке, що $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^m \partial\Omega_i$. Ділянки $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) межі $\partial\Omega$ не обов'язково різні і можуть співпадати зі всією межею $\partial\Omega$.

Нехай, надалі, f і φ_i ($i=1, 2, \dots, m$) – деякі відображення області Ω та ділянок $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) відповідно на деякі множини F та Θ_i ($i=1, 2, \dots, m$), u – відображення замкненої області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ на деяку множину U , а A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) – відображення множини U на множини F та Θ_i ($i=1, 2, \dots, m$) відповідно.

Таблиця 2.1 – Нормалізовані рівняння меж деяких простих геометричних областей

Геометричний об'єкт	Нормалізоване рівняння
Смуга шириною $2a$, паралельна осі Oy	$\frac{1}{2a}(a^2 - x^2) = 0$
Коло радіусу R з центром в точці $(0,0)$	$\frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2) = 0$
Еліпс з півосьми a, b та центром в точці $(0,0)$	$\frac{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}} = 0$
Півплощина $c + ax + by \geq 0$	$\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$
Смуга $(-c - ax - by)(d + ax + by) \geq 0$ між паралельними прямими	$-\frac{(c + ax + by)(d + ax + by)}{2 c - d \sqrt{a^2 + b^2}} = 0$

Вимагатимемо виконання умов

$$Au = f, \quad (2.7)$$

та

$$L_i u = \varphi_i \text{ на } \partial\Omega_i \text{ (} i=1, 2, \dots, m \text{)}. \quad (2.8)$$

В такому випадку говорять, що поставлено крайову задачу. До крайових задач такого вигляду зводяться більшість задач, що виникають в теорії пружності та гнучкості, теорії потенціалу, електростатиці та електродинаміці, теорії коливань, теорії пластин та оболонок, теплофізиці, теорії фільтрації, аеро- і гідродинаміці та в інших областях фізики та техніки.

Вигляд відображень u , f та φ_i ($i=1, 2, \dots, m$), що входять в постановку задачі, визначається конкретними фізичними умовами задачі. Вони можуть бути скалярами, векторами, тензорами. Зазвичай відображення A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) є диференціальними, інтегральними або інтегро-диференціальними операторами.

Відображення A , L_i , u , f , φ_i ($i=1, 2, \dots, m$), що входять у постановку крайової задачі, є аналітичними компонентами крайової задачі, а область Ω , межа $\partial\Omega$ та її ділянки $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) – геометричними компонентами. В залежності від того, які компоненти задані, а які є шуканими, говорять про пряму та обернену краєві задачі. Крайова задача називається прямою, якщо шуканою є компонента u , а решта – заданими. В решті випадків крайові задачі називаються оберненими. Вважатимемо, що задача є правильно поставленою, тобто всі задані в (2.7), (2.8) відображення забезпечують існування і єдиність розв'язку. Особливої уваги щодо цього вимагають крайові задачі для областей, межа яких містить нерегулярні точки, ребра та інші особливості (так звані геометричні сингулярності), а також задачі з крайовими умовами, що мають різний характер на різних ділянках межі $\partial\Omega$ (так звані мішані задачі). В таких задачах оператори L_i ($i=1, 2, \dots, m$) можуть не мати сенсу в особливих точках межі. В такому випадку необхідна постановка деяких додаткових умов.

Характерною особливістю крайових задач є залежність поля від геометричних форм, що мають в реальних об'єктах доволі складну конфігурацію. Це може бути форма області Ω , ділянок $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$), межі $\partial\Omega$, ліній чи поверхонь розриву аналітичних компонент та ін. Більше того, у випадку крайових задач для кусково-однорідних середовищ, самі оператори A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) можуть мати зовсім різний вигляд в різних підобластях $\Omega_j \subset \Omega$ та на ділянках $\partial\Omega_i \subset \Omega$ ($i=1, 2, \dots, m$). Таким чином, побудова ефективних чисельних методів розв'язання крайових задач можлива лише з урахуванням всіх видів вхідної інформації, як аналітичної, так і геометричної. Значить, необхідно не тільки враховувати вигляд формул, що

входять у постановку задачі, але і приводити геометричну інформацію до аналітичного вигляду, що дозволить внести її до алгоритму розв'язання. Здійснити цю процедуру дозволяє метод R -функцій, який часто називають конструктивним. Цей метод дозволяє враховувати геометричну інформацію на аналітичному рівні без будь-якої її апроксимації. Для досягнення цієї цілі, враховуватимемо той конструктивний апарат описаний в попередньому пункті. Розглянемо основні поняття структурного методу R -функцій [2, 7, 13].

Нехай $D_A(\Omega) \subseteq U$ – область визначення оператора A , що входить в рівняння (2.7), а

$$L_{i_k} u = \varphi_{i_k} \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (2.9)$$

де $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ – деяка підмножина індексів $\{1, 2, \dots, m\}$.

Означення 2.5. Формула $u = B(\Phi)$, де Φ – елемент деякої множини \mathfrak{M} , а $B: \mathfrak{M} \rightarrow D_A(\Omega)$, називається структурою розв'язку, що враховує умови (2.9) і визначена на \mathfrak{M} , якщо для всіх $\Phi \in \mathfrak{M}$

$$L_{i_k} B(\Phi) = \varphi_{i_k} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (2.10)$$

Зазначимо, що оператор B залежить від геометрії області Ω та ділянок $\partial\Omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) її межі, а також операторів крайових умов.

Структура, що враховує всі крайові умови (2.8), називається загальною структурою, а якщо задовольняється лише частина умов (2.8), то структура називається частковою. Зазначимо, що задоволення умов (2.9) може розумітись також в тому чи іншому узагальненому сенсі, наприклад, за нормою, чи метрикою деякого простору, що прямує до нуля. В цьому випадку мова йде про узагальнені структури.

Структура $u = B(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{M}$, визначає деяку множину $D_B \subset D_A$, $D_B = \{u : u = B(\Phi) \quad \forall \Phi \in \mathfrak{M}\}$. Проте може виявитись, що шуканий розв'язок u_0

крайової задачі не міститься в D_B . У цьому випадку структуру $u = B(\Phi)$ називатимемо неповною. Якщо $u_0 \in D_B$, то структура $u = B(\Phi)$ називається повною (в класичному сенсі). В багатьох випадках не існує класичного розв'язку крайової задачі, якщо і існує, то методи його відшукування не відомі або такі, що важко реалізуються.

Означення 2.6. Структура $u = B(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{M}$, називається повною в сенсі метрики $\rho(u, v)$ (або за нормою $\|\cdot\|$), якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Phi_\varepsilon \in \mathfrak{M}, \rho[u_0, B(\Phi_\varepsilon)] < \varepsilon$ (або $\|u_0 - B(\Phi_\varepsilon)\| < \varepsilon$), де u_0 – класичний (або узагальнений) розв'язок задачі.

Після того, як повна або повна в деякому сенсі структура побудована, виникає питання про відшукування елемента $\Phi \in \mathfrak{M}$. Природно, що чим більше множина, тим, загалом кажучи, більш складною є задача пошуку. Тому при побудові структур необхідно прагнути до того, щоб множина \mathfrak{M} була якомога вужчою.

Нехай $u = B_i(\Phi_i)$, $\Phi \in \mathfrak{M}_i$ ($i=1, 2$) – повні або повні в деякому сенсі структури, що враховують деяку систему умов. Тоді якщо $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, то структуру $u = B_1(\Phi_1)$ називатимемо структурою кращої якості, ніж $u = B_2(\Phi_2)$. Чим краща якість структури, тим вужча множина \mathfrak{M} , в якій необхідно шукати невизначену компоненту Φ , що відповідає точному розв'язку задачі чи достатньо гарному його наближенню.

В більшості випадків крайові умови мають вигляд

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}, \frac{\partial u}{\partial \bar{\tau}}, \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{n}^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{n} \partial \bar{\tau}}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial \bar{\tau}^k}, x, y\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = \Phi_0|_{\partial\Omega}, \quad (2.11)$$

де F – деяка, зазвичай лінійна відносно своїх аргументів $u, \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial \bar{\tau}^k}$

функція;

\bar{n} і $\bar{\tau}$ – напрямки нормалі (внутрішньої) та дотичної до межі $\partial\Omega$.

Похідні за нормаллю та дотичною, що входять у формулу (3.11), мають сенс лише на межі області, а структура, що задовольняє умові (3.11), повинна мати сенс усюди в області Ω .

Розглянемо диференціальні оператори, за допомогою яких можна продовжити крайові умови всередину області Ω

$$D_n = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^{n-i} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^i \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i} \partial y^i}, \quad (2.12)$$

$$T_n = \left(-\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^{n-i} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i} \partial y^i},$$

де $\omega(x, y)$ – функція, що задовольняє умови:

- 1) $\omega(x, y) > 0$ всередині Ω ;
 - 2) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$;
 - 3) $\frac{\partial \omega}{\partial \vec{n}} = 1$ на $\partial\Omega$.
- (2.13)

Можна довести, що для будь-якої функції $u \in C^n$ мають місце співвідношення

$$D_n u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial \vec{n}^n}, \quad T_n u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial \vec{\tau}^n}, \quad D_k T_{n-k} u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial \vec{n}^k \partial \vec{\tau}^{n-k}}.$$

Зокрема, для $k=1$ через умови 2), 3) із (2.13) для $\omega(x, y)$ та добутку $\omega(x, y)\Phi$, де Φ – обмежена диференційована функція, отримаємо

$$D_1 \omega = 1 + O(\omega), \quad T_1 \omega = 0,$$

$$D_1(\omega\Phi) = (D_1 \omega)\Phi + \omega D_1 \Phi = \Phi + O(\omega),$$

$$T_1(\omega\Phi) = O(\omega).$$

2.3 Застосування структурного методу (методу R -функцій) до математичного моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах

Побудуємо структуру розв'язку задачі (1.17) – (1.19).

Нехай функція $\omega(x, y)$ є такою, що:

а) $\omega(x, y) > 0$ в Ω ;

б) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$.

Функцію $\omega(x, y)$, що справджує умови а), б), можна побудувати за допомогою конструктивного апарату теорії R -функцій, описаному у п. 2.1, у вигляді єдиного аналітичного виразу, що до того ж є елементарною функцією.

Тоді крайову умову (1.18) задовольнятиме жмуток функцій

$$u = \omega\Phi$$

для будь-якого вибору невизначеної компоненти Φ

Для того, щоб задовольнити умови спряження (1.19) функцію $u(x, y)$ шукатимемо в вигляді [6, 12]

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) = \omega\Phi, & (x, y) \in \Omega_1, \\ u_2(x, y) = \omega\Phi - A\omega_{12}D_1^{(12)}(\omega\Phi), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2.14)$$

де $\omega_{12} = 0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega_{12}$ розділу двох середовищ, причому $\omega_{12} > 0$ в Ω_2 , а оператор $D_1^{(12)}$ визначається рівністю

$$D_1^{(12)} = \frac{\partial\omega_{12}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega_{12}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Оператор $D_1^{(12)}$ має властивість $D_1^{(12)}u|_{\partial\Omega_{12}} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega_{12}}$, де \vec{n} – одинична нормаль до $\partial\Omega_{12}$, що направлена всередину Ω_2 . Тоді

$$D_1^{(12)}\omega_{12}|_{\partial\Omega_{12}} = \frac{\partial\omega_{12}}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega_{12}} = 1.$$

Зауважимо, що функція вигляду (2.14) задовольнятиме на $\partial\Omega_{12}$ першу з умов спряження (1.19) за будь-якого вибору сталої A . Отже, сталу A виберемо так, щоб задовольнити другу з умов спряження (1.19). Отримуємо:

$$\begin{aligned} k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega_{fv}} &= k_2 D_1^{(12)}u_2|_{\partial\Omega_{12}} = k_2 D_1^{(12)}[\omega\Phi - A\omega_{12}D_1^{(12)}(\omega\Phi)]|_{\partial\Omega_{12}} = \\ &= k_2 \{D_1^{(12)}(\omega\Phi) - AD_1^{(12)}\omega_{12} \cdot D_1^{(12)}(\omega\Phi) - A\omega_{12}D_1^{(12)}[D_1^{(12)}(\omega\Phi)]\}|_{\partial\Omega_{12}} = \\ &= k_2(1-A)D_1^{(12)}(\omega\Phi)|_{\partial\Omega_{12}}, \\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega_{fv}} &= k_1 D_1^{(12)}u_1|_{\partial\Omega_{12}} = k_1 D_1^{(12)}(\omega\Phi)|_{\partial\Omega_{12}}. \end{aligned}$$

Тоді друга з умов спряження (1.19) виконуватиметься, якщо $k_2(1-A) = k_1$, тобто якщо $A = 1 - \frac{k_1}{k_2} = \frac{k_2 - k_1}{k_2}$.

Отже, структура розв'язку задачі (1.17) – (1.19) має вигляд

$$u(x, y) = \begin{cases} \omega\Phi, & (x, y) \in \Omega_1, \\ \omega\Phi - \frac{k_2 - k_1}{k_2} \omega_{12} D_1^{(12)}(\omega\Phi), & (x, y) \in \Omega_2. \end{cases} \quad (2.15)$$

Для апроксимації невизначеної компоненти Φ можна скористатися, розглянувши у п. 1.2 методом Рітца.

Нехай $\{\tau_k\}$ – деяка повна у просторі $L_2(\Omega)$ система функцій (це можуть бути, наприклад, степеневі чи тригонометричні поліноми, сплайни). Невизначену компоненту Φ апроксимуємо виразом вигляду

$$\Phi \approx \Phi_n = \sum_{k=1}^n c_k \tau_k.$$

Тоді з (2.15) випливає, що

$$u(x, y) \approx u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k, \quad (2.16)$$

де координатна послідовність $\{\Phi_k\}$ визначається так:

$$\Phi_k = \begin{cases} \omega \tau_k, & (x, y) \in \Omega_1, \\ \omega \tau_k - \frac{k_2 - k_1}{k_2} \omega_{12} D_1^{(12)}(\omega \tau_k), & (x, y) \in \Omega_2. \end{cases} \quad (2.17)$$

Для визначення коефіцієнтів c_k , $k = 1, 2, \dots, n$, у (2.16) згідно з методом Рітца отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^n c_k [\Phi_k, \Phi_j] = (F, \Phi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.18)$$

де

$$[\Phi_k, \Phi_j] = k_1 \iint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) dx dy +$$

$$+k_2 \iint_{\Omega_2} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.19)$$

$$(F, \varphi_j) = \iint_{\Omega} F \varphi_j dx dy = \iint_{\Omega_1} F \varphi_j dx dy + \iint_{\Omega_2} F \varphi_j dx dy, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.20)$$

Збіжність побудованої у такий спосіб послідовності $\{u_n(x, y)\}$, коли $n \rightarrow \infty$, впливає з загальних теорем збіжності методу Рітца [9].

Висновки за розділом 2

Було проведено вибір та обґрунтування методу розв'язання задачі математичного моделювання процесу стаціонарної теплопровідності у кусково-однорідних середовищах.

1. Розглянуто основні поняття структурного методу (методу R -функцій) та з'ясовано доцільність його застосування для розв'язування поставленої задачі.

2. Застосовано сумісно структурний метод (метод R -функцій) та метод Рітца до розв'язання задачі математичного моделювання процесу стаціонарної теплопровідності у кусково-однорідних середовищах.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 13.2 в інженерних розрахунках

Система Mathematica – система комп'ютерної алгебри, яка була розроблена Стівеном Вольфрамом, а в подальшому – компанією Wolfram Research. На сьогодні ця система широко використовується в наукових, інженерних, математичних та комп'ютерних областях. Вона містить багато функцій як для аналітичних перетворень, так і для чисельних розрахунків. Крім того, програма підтримує роботу з графікою і звуком, включаючи побудову дво- і тривимірних графіків функцій, візуалізацію довільних геометричних фігур, імпорт та експорт зображень і звуку [14].

Версія Mathematica 13.2 – це програмне забезпечення комп'ютерної алгебри, яке широко використовується в інженерних розрахунках та дослідженнях. Воно дозволяє розв'язувати складні математичні задачі, включаючи чисельне розв'язування диференціальних рівнянь, оптимізацію функцій та статистичний аналіз даних. Зазначена система має багато функцій та можливостей для інженерних розрахунків. Наприклад, вона має вбудовану підтримку для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь, що дозволяє розв'язувати складні задачі механіки, електротехніки та інших галузей інженерної науки. Крім того, Mathematica 13.2 має можливості для символічного обчислення, що дозволяє проводити аналітичні розрахунки та отримувати точні формули для результатів. Це особливо корисно для розрахунків в галузях математики, фізики та інженерії. Mathematica 13.2 також має вбудовані функції для статистичного аналізу даних, що дозволяє виконувати розрахунки, такі як регресійний аналіз та кластеризацію даних. Також пакет Mathematica 13.2 має вбудовану підтримку для роботи з графіками та візуалізації даних, що дозволяє представляти результати розрахунків у зручному для сприйняття вигляді.

Усі ці можливості роблять Mathematica 13.2 потужним інструментом для інженерних розрахунків та досліджень. Вона дозволяє ефективно розв'язувати

складні задачі та отримувати точні результати, що забезпечує більш ефективну роботу інженерів та науковців.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах

З огляду на викладене у п. 2.3 алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах можна задати наступними етапами:

а) задати фізичні параметри процесу теплопровідності (коефіцієнти теплопровідності k_1 і k_2) та геометрію області Ω , у якій відбувається зазначений процес;

б) побудувати методом R -функцій рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$ області Ω ;

в) обрати систему $\{\tau_k\}$ та задати за формулою (2.17) послідовність координатних функцій;

г) обрати номер наближення n ;

д) сформувати матрицю Рітца $A = \{[\varphi_k, \varphi_j]\}_{k, j=1, \dots, n}$ і вектор $b = \{(F, \varphi_j)\}_{j=1, \dots, n}$ з елементами, що визначаються відповідно формулами за формулами (2.19) і (2.20);

е) розв'язати систему Рітца (2.18) для визначення коефіцієнтів c_1, \dots, c_n ;

є) записати наближений розв'язок задачі за формулою (2.16);

ж) провести аналіз та візуалізацію побудованого наближеного розв'язку.

3.3 Опис програми

Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах, розроблений у

п. 3.2, було програмно реалізовано у системі Mathematica 13.2. Програма складається з наступних блоків.

Блок 1. Задання та аналітичний опис геометрії області. У цьому блоці користувач має задати лінійні розміри області. Далі задаються R -операції системи \mathfrak{R}_α , значення α та будуються функції $\omega(x, y)$ і $\omega_{12}(x, y)$ такі, що рівняння $\omega(x, y) = 0$ є рівнянням межі $\partial\Omega$, а рівняння $\omega_{12}(x, y) = 0$ є нормалізованим рівнянням лінії розділу $\partial\Omega_{12}$ середовищ, що займають області Ω_1 і Ω_2 .

Блок 2. Задання фізичних параметрів процесу. У цьому блоці користувач має задати коефіцієнти теплопровідності k_1 і k_2 середовищ, що займають області Ω_1 і Ω_2 , а також функцію $F(x, y)$ щільності внутрішніх джерел тепла.

Блок 3. Задання координатної послідовності. У цьому блоці задається порядок наближення n , задаються послідовності $\{\tau_k\}$ та координатних функцій $\{\varphi_k\}$ за формулою (2.17), а також задаються їх похідні.

Блок 4. Формування та розв'язування системи Рітца. У цьому блоці за формулами (2.19) обчислюються елементи $[\varphi_k, \varphi_j]$ матриці Рітца $A = \{[\varphi_k, \varphi_j]\}_{k, j=1, \dots, n}$ і за формулами (2.20) обчислюються елементи (F, φ_j) вектора $b = \{(F, \varphi_j)\}_{j=1, \dots, n}$, а також розв'язується система Рітца для визначення коефіцієнтів c_1, \dots, c_n .

Блок 5. Виведення результатів. У цьому блоці записується наближений за Рітцем розв'язок задачі (формула (2.16)) і за допомогою функцій Plot3D, ContourPlot побудовано поверхню та лінії рівня температури.

Висновки за розділом 3

Для розв'язання поставленої задачі математичного моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах

була обрана система Mathematica 13.2. Ця система комп'ютерної алгебри має широкий функціонал, який дозволяє виконувати складні наукоміські обчислення та аналізувати різними способами отримані результати. Програма, розроблена у системі Mathematica 13.2, була створена з урахуванням специфічних вимог задачі моделювання процесів теплопровідності. Було використано вбудовані функції пакету Mathematica для реалізації різних етапів моделювання, таких як розв'язання стаціонарного рівняння теплопровідності, візуалізація результатів у вигляді 3D моделі та ліній рівня функції температури.

1. Описано особливості системи Mathematica 13.2, а саме її переваги та найчастіше використовувані вбудовані функції.

2. Розроблено алгоритм розв'язування задачі математичного моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах.

3. Описано розроблену у системі Mathematica 13.2 програму за побудованим алгоритмом.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Постановка тестової задачі для обчислювального експерименту

Для обчислювального експерименту оберемо тестову задачу, яка розглядається в області, зображеній на рис. 4.1.

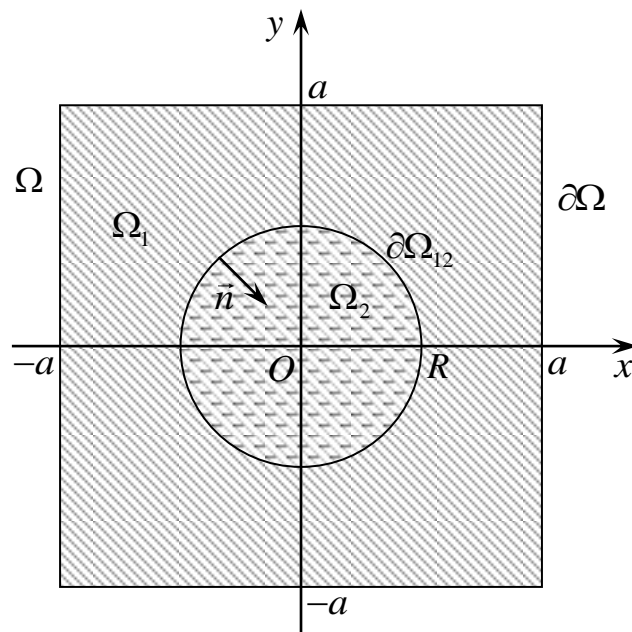


Рисунок 4.1 – Область, у якій розглядається тестова задача

Область Ω є квадратом $-a < x, y < a$ зі вставкою у формі круга радіуса R з центром у початку координат ($R < a$). Вважатимемо, що коефіцієнт теплопровідності в області Ω_1 дорівнює k_1 , а в області Ω_2 – k_2 . Функцію щільності внутрішніх джерел тепла візьмемо у вигляді

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{R^2}{4} - x^2 - y^2, & \frac{R^2}{4} - x^2 - y^2 > 0, \\ 0, & \frac{R^2}{4} - x^2 - y^2 \leq 0. \end{cases}$$

Отже, для обчислювального експерименту відносно температури

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \text{ маємо наступну крайову задачу:}$$

$$-\Delta u_1 = \frac{F}{k_1}, \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad (4.1)$$

$$-\Delta u_2 = \frac{F}{k_2}, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (4.2)$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.3)$$

$$u_1|_{\partial\Omega_{12}} = u_2|_{\partial\Omega_{12}}, \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}}. \quad (4.4)$$

4.2 Обчислювальний експеримент з розв'язання тестової задачі

Область Ω можна подати у вигляді кон'юнкції двох смуг шириною $2a$ (опорні області Σ_1, Σ_2):

$$\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2,$$

$$\text{де } \Sigma_1 = \left\{ \frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \geq 0 \right\}, \quad \Sigma_2 = \left\{ \frac{1}{2a}(a^2 - y^2) \geq 0 \right\}.$$

Тоді функція $\omega(x, y)$ така, що рівняння $\omega(x, y) = 0$ є нормалізованим рівнянням межі $\partial\Omega$ має вигляд

$$\omega(x, y) = \left[\frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \geq 0 \right] \wedge_{\alpha} \left[\frac{1}{2a}(a^2 - y^2) \geq 0 \right],$$

де \wedge_{α} – знак R -кон'юнкції системи \mathfrak{R}_{α} .

Візьмемо $\alpha = 0$. Тоді

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2a} [2a^2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (a^2 - y^2)^2}].$$

Нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega_{12}$ розділу двох середовищ можна взяти у вигляді

$$\omega_{12}(x, y) = \frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2).$$

Тоді оператор $D_1^{(12)}$ діятиме за правилом

$$D_1^{(12)} = -\frac{1}{R} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

За повну у $L_2(\Omega)$ систему функцій $\{\tau_{ij}\}$ було обрано змасштабовані поліноми Лежандра:

$$\tau_{ij}(x, y) = P_i \left(\frac{x}{a} \right) P_j \left(\frac{y}{a} \right), \quad i + j = 0, 1, 2, \dots$$

Поліноми Лежандра $P_k(t)$ утворюють повну у $L_2(-1, 1)$ систему ортогональних поліномів і можуть бути обчислені, наприклад, за формулою Родріга

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(t^2 - 1)^k].$$

Перші поліноми Лежандра мають вигляд

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

Тоді координатні функції визначатимуться формулою

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(x, y) = & \\ = & \begin{cases} \omega(x, y) P_i\left(\frac{x}{a}\right) P_j\left(\frac{y}{a}\right), & (x, y) \in \Omega_1, \\ \omega(x, y) P_i\left(\frac{x}{a}\right) P_j\left(\frac{y}{a}\right) - \frac{k_2 - k_1}{k_2} \omega_{12}(x, y) D_1^{(12)} \left[\omega(x, y) P_i\left(\frac{x}{a}\right) P_j\left(\frac{y}{a}\right) \right], & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \\ & i + j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Наближений розв'язок тоді шукатимемо у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{i+j=0}^n c_{ij} \varphi_{ij}(x, y).$$

Для обчислювального експерименту було обрано наступні значення параметрів: $a=2$, $R=1$, $k_1=1$, $k_2=10$. Обрано також $n=4$ (усього 15 координатних функцій).

На рис. 5.1 наведено лінії рівня перших шести координатних функцій (червоним пунктиром позначено лінію розділу двох середовищ). Як бачимо з цих рисунків на лінії розділу двох середовищ спостерігається злам ліній рівня.

Застосовуючи до знаходження коефіцієнтів c_1, \dots, c_{15} отримано наступні значення (коефіцієнти, що не виписані, дорівнюють нулю):

$$\begin{aligned} c_{00} = 0,013536, \quad c_{02} = -0,008840, \quad c_{20} = -0,008840, \quad c_{04} = -0,000996, \\ c_{22} = -0,002266, \quad c_{40} = -0,000996. \end{aligned}$$

На рис. 5.2 наведено лінії рівня наближеного розв'язку $u_4(x, y)$, на рис. 5.3 – його поверхня, а на рис. 5.4 – переріз поверхні наближеного розв'язку лінією $y = 0$. Як бачимо лінії розділу двох середовищ відповідає злам поверхні наближеного розв'язку, що повністю відповідає умовам спряження та фізичному змісту процесу. При цьому отримано, що $\max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} u_4(x, y) = u_4(0,0) = 0,012338$, а значення температури на лінії розділу середовищ дорівнює $0,009417$.

На рис. 5.5 наведено лінії рівня модуля градієнта $|\nabla u_4| = \sqrt{\left(\frac{\partial u_4}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_4}{\partial y}\right)^2}$

наближеного розв'язку $u_4(x, y)$, на рис. 5.6 – його поверхня.

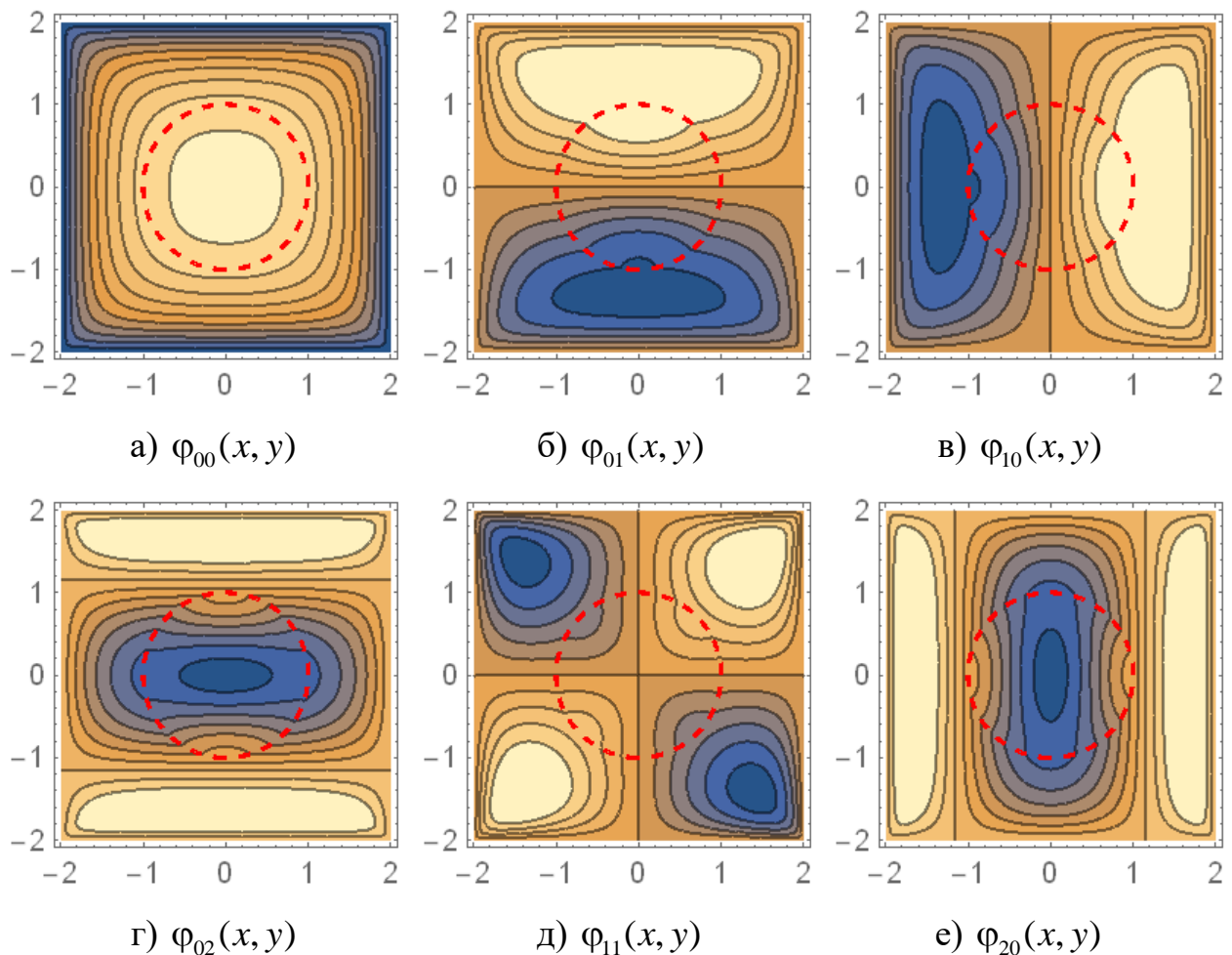


Рисунок 5.1 – Лінії рівня перших шістьох координатних функцій

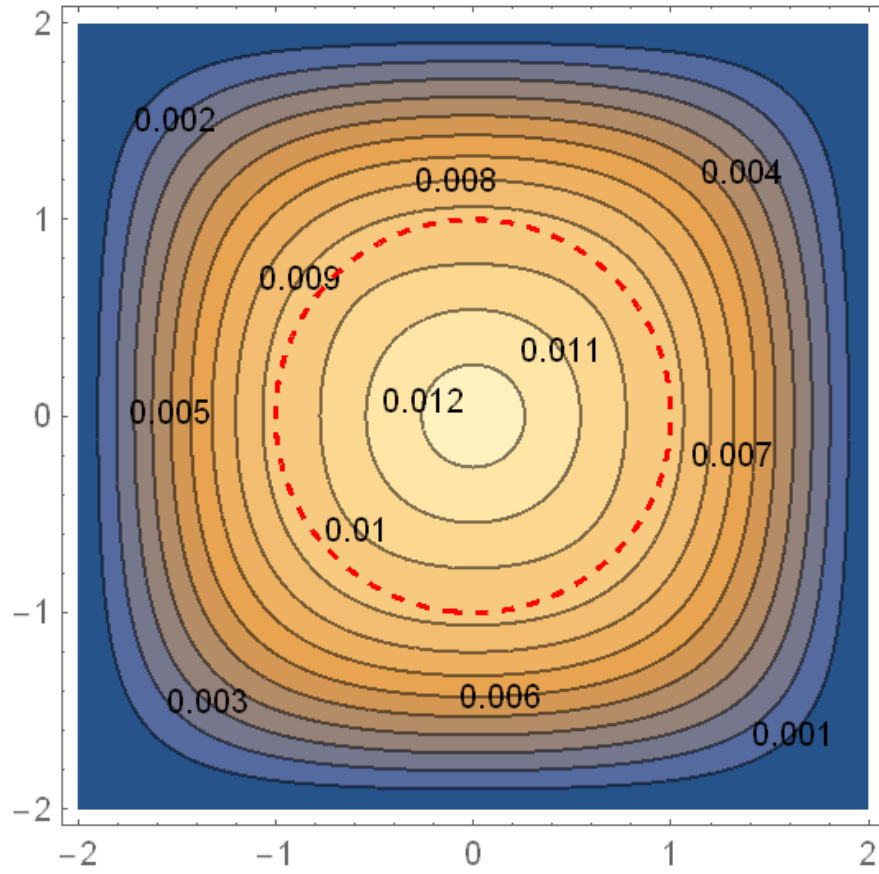


Рисунок 5.2 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u_4(x, y)$

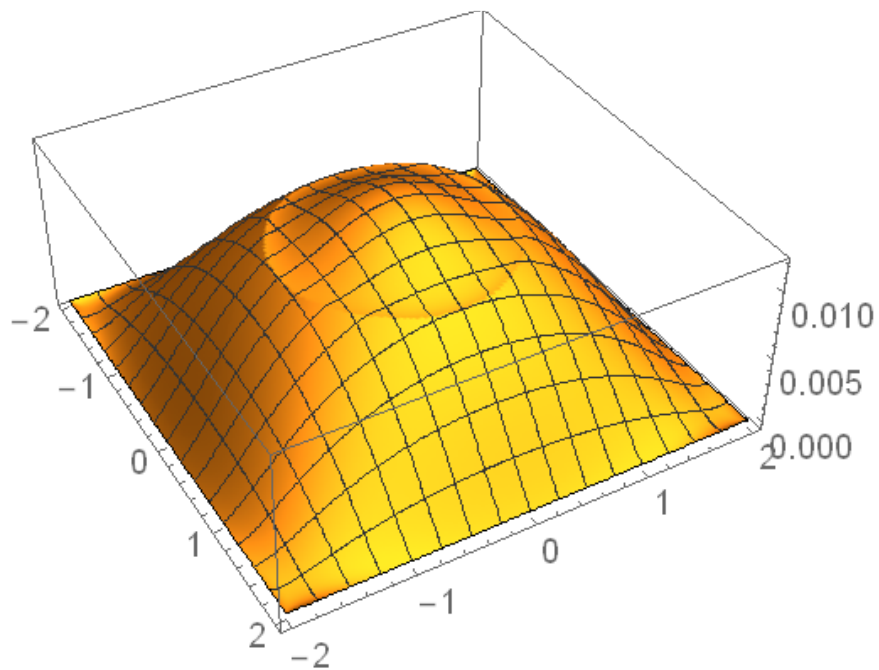


Рисунок 5.3 – Поверхня наближеного розв'язку $u_4(x, y)$

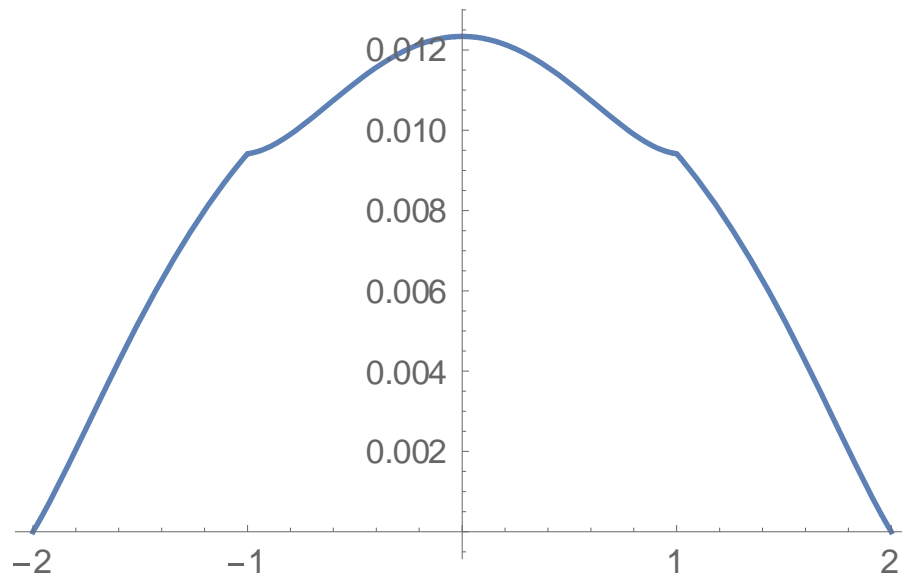


Рисунок 5.4 – Графік наближеного розв'язку $u_4(x, y)$ у перерізі $y = 0$

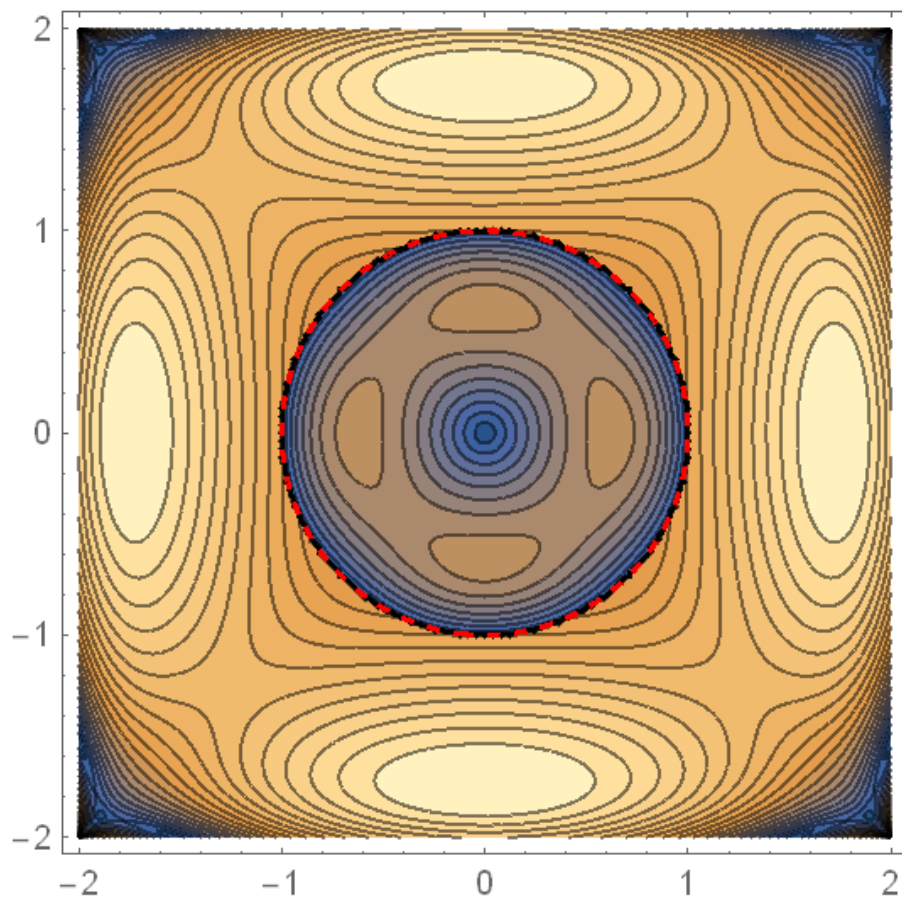


Рисунок 5.5 – Лінії рівня модуля градієнта $|\nabla u_4|$
наближеного розв'язку $u_4(x, y)$

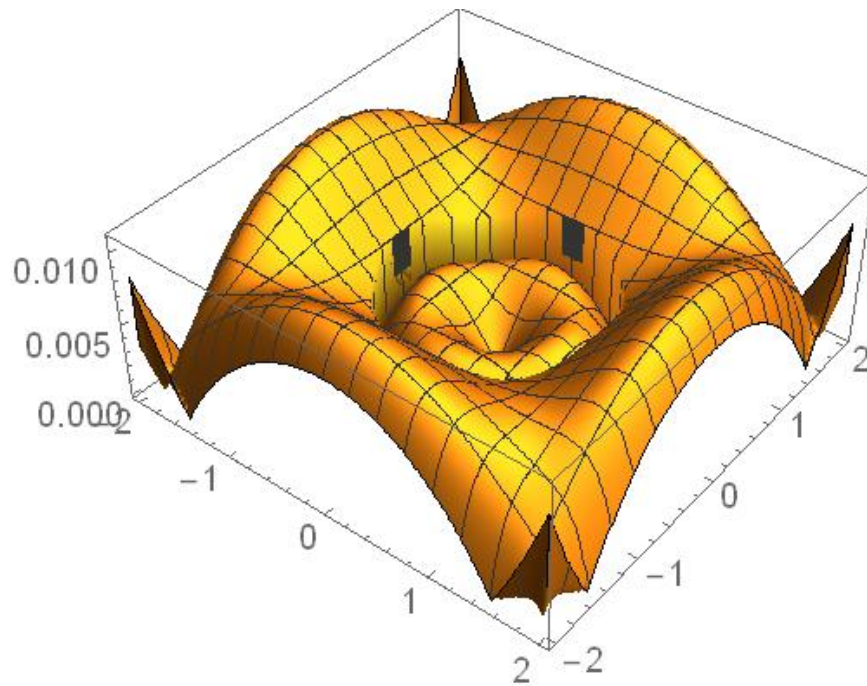


Рисунок 5.6 – Поверхня модуля градієнта $|\nabla u_4|$
наближеного розв'язку $u_4(x, y)$

Висновки за розділом 4

Проведено обчислювальний експеримент для тестової задачі знаходження стаціонарного розподілу температур у квадраті з круглою вставкою. Результати обчислювального експерименту представлені у числовій та графічній формі. Аналіз результатів показує, що застосування до розв'язування задачі математичного моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах структурного методу (методу R -функцій) дає хороші результати, які добре співвідносяться як з математичною постановкою задачі, так і з її фізичним змістом.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було застосовано структурний метод (метод R -функцій) у поєднанні з варіаційним методом Рітца до чисельного аналізу стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах.

1. Було проведено аналіз математичних моделей процесів теплопровідності та методів їх чисельного аналізу. Зроблено висновок про перспективність застосування до математичного моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах саме структурного методу акад. НАН України В.Л. Рвачова.

2. На основі сумісного застосування методів R -функцій та Рітца розроблено алгоритм чисельного аналізу математичної моделі, що описує стаціонарний процес теплопровідності у кусково-однорідному середовищі.

3. Програмно реалізовано розроблений алгоритм у системі комп'ютерної алгебри Mathematica 13.2 і за допомогою розробленої програми проведено обчислювальний експеримент для тестової задачі, що підтвердило ефективність застосованого методу.

4. Дослідження процесів стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах може бути застосовано, зокрема, у енергетиці при розрахунку теплообміну в енергетичних установках, таких як котли, турбіни, реактори ядерної енергетики тощо; у матеріалознавстві при вивченні теплопередачі в матеріалах з різними фізичними властивостями, таких як метали, пластмаси, кераміка тощо.

5. Результати, отримані у роботі, можуть бути використані для створення та аналізу комп'ютерних моделей, програм або алгоритмів, що зможуть вдосконалити та оптимізувати проведення математичного моделювання стаціонарних процесів теплопровідності.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень. У 2 ч. Ч. 2. Київ : Вища школа, 1995. 432 с.
2. Максименко-Шейко К. В. R -функції в математическому моделюванні геометричних об'єктів і фізических полів. Харків : ІПМаш НАН України, 2009. 306 с.
3. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики. Львів : Видавництво Національного університету Львівська політехніка, 2008. 366 с.
4. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ : Либідь, 2006. 424 с.
5. Погорелов А. І. Тепломасообмін (основи теорії і розрахунку). 4-те вид., випр. Львів : Новий Світ-2000, 2006. 144 с.
6. Подгорний О. Р., Сидоров М. В. Застосування методу R -функцій до аналізу фільтраційних течій у кусково-однорідному середовищі. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. №4 (83). С. 32–37.
7. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.
8. Резнік Ю. С. Метод R -функцій в математичному моделюванні стаціонарних процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах. *27-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті»* : зб. матеріалів форуму. Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2023. С. 187–188.
9. Савула Я. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. 224 с.
10. Теплотехніка / Б. Х. Драганов, А. А. Долінський, А. В. Міщенко, Є. М. Письменний ; за ред. Б. Х. Драганова. Київ : ІНКОС, 2005. 504 с.
11. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. Київ : Видавнича група BHV, 2006. 480 с.
12. Podhornyj O. R., Sidorov M. V. Mathematical modeling of fluid flows through the piecewise homogeneous porous medium by R -function method. *Mathematical Modeling and Computing*. 2021. Vol. 8, № 3. Pp. 499–508.

13. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R-Functions in Boundary Value Problems in Mechanics. *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 48, № 4. Pp. 151-188.

14. The Wolfram Mathematica. URL: <http://www.worlfram.com/index.ru.html>
(дата звернення: 21.12.2023).

15. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method. Vol. 2: Solid Mechnics. Oxford : BH, 2000. 459 p.