

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2019 р.

ЗАВДАННЯ НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Вороненку Микиті Дмитровичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування методу двобічних наближень до розв'язання
мішаних крайових задач для напівлінійних звичайних диференціальних
рівнянь

затверджена наказом по університету від 31 жовтня 2019 р. № 1600 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 9 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи напівлінійне звичайне диференціальне рівняння

$-u'' = \lambda u^p + \mu u^{-q}$, $x \in (0, 1)$, $p \in (0, 1)$, $q \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$,

з трьома комбінаціями крайових умов:

$u(0) = 0$, $u(1) = 0$;

$u(0) = 0$, $u'(1) = 0$;

$u'(0) - u(0) = 0$, $u(1) = 0$.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми конструктивного дослідження напівлінійних
крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2019 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2019 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2019 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2019 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2019 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2019 р.	виконано

Дата видачі завдання 2 вересня 2019 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Сидоров М.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 80 с., 16 табл., 17 рис., 1 дод., 22 джерел.

ДВОБІЧНІ НАБЛИЖЕННЯ, ДОДАТНИЙ РОЗВ'ЯЗОК, КРАЙОВА ЗАДАЧА, НАПІВЛІНІЙНЕ ЗВИЧАЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ФУНКЦІЯ ГРИНА, ГЕТЕРОТОННИЙ ОПЕРАТОР.

Об'єкт дослідження – крайові задачі для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Мета роботи – реалізувати метод двобічних наближень для отримання чисельних розв'язків напівлінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та виявити залежності отриманих розв'язків від параметрів, що входять у нелінійність рівнянь крайових задач.

Метод дослідження – двобічні ітераційні методи чисельного аналізу напівлінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, що базуються на теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах.

Роботу присвячено дослідженню можливості побудови двобічних наближень до єдиного додатного розв'язку крайових задач різних типів для напівлінійного звичайного диференціального рівняння $-u'' = \lambda u^p + \mu u^{-q}$, а також аналізу залежності отриманого наближеного розв'язку від параметрів, що входять до цього диференціального рівняння. Отримано умови існування єдиного додатного розв'язку та умови двобічної збіжності до нього послідовних наближень. Досліджено розв'язки розглядуваних крайових задач за допомогою побудованого методу двобічних наближень та проаналізовано їх залежність від значень параметрів.

ABSTRACT

Introductory note: 80 pages, 16 tables, 17 figures, 1 appendix, 22 sources.

BOUNDARY VALUE PROBLEM, GREEN'S FUNCTION, SEMILINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION, POSITIVE SOLUTION, HETERO-TONE OPERATOR, TWO-SIDED APROXIMATIONS.

The object of this study is semilinear boundary value problems for ordinary differential equations.

The purpose of the study is to receive numerical solutions of semilinear boundary value problems for ordinary differential equations with two-sided error estimation and dependence of approximate solutions on parameters of boundary value problems.

The methods of the study are two-sided iterative methods of numerical analysis of semilinear differential equations, which is based on the theory or nonlinear operators in partially ordered spaces.

The work is devoted to the study of the possibility of constructing two-sided approximations to unique positive solution of semilinear ordinary differential equation $-u'' = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ for different combination of boundary conditions types. The work is also devoted to the analysis of the dependences of received approximate solution on parameters of differential equation. Conditions for the existence of a unique positive solution and conditions for two-way convergence to successive approximations were obtained.

The solutions of considered boundary-value problems were obtained using the constructed method of two-sided approximations and their dependences on parameters values were analyzed.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Системний аналіз проблеми конструктивного дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та постановка задач дослідження	9
1.1 Системний аналіз проблеми конструктивного дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь	9
1.1.1 Вербальна модель системи	9
1.1.2 Морфологічний опис системи	10
1.1.3 Функціональна модель системи	10
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми конструктивного дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь	13
1.2.1 Модель аналізу проблеми	13
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	14
1.2.3 Модель вирішення проблеми	18
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	19
1.3.1 Змістовна постановка задачі	19
1.3.2 Формальна постановка задачі	20
1.4 Постановка задач дослідження	21
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	22
2.1 Конуси у напівупорядкованих банахових просторах	22
2.2 Основні типи операторів в просторах з конусом	30
2.3 Метод двобічних наближень для рівнянь з гетеротонним u_0 -псевдоувігнутим оператором	37
2.4 Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку крайових задач для рівняння $-u'' = \lambda u^p + \mu u^{-q}$	45
3 Програмна реалізація	55

	7
3.1 Система комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica	55
3.2 Опис програми	55
4 Результати обчислювального експерименту	57
5 Аналіз можливих застосувань	72
Висновки	73
Перелік джерел посилання	74
Додаток А Код програми	77

ВСТУП

При дослідженні методами математичного моделювання високотемпературних процесів у хімії, фізиці плазми, теорії горіння [16] приходять до необхідності розв'язання крайових задач для напівлінійного рівняння вигляду

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x, u), \quad x \in (0, l).$$

Зазвичай у прикладних задачах виконуються умови $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in [0, l]$, і ставиться задача знаходження додатного на $(0, l)$ розв'язку. Точні розв'язки крайових задач для цього рівняння відомі лише у поодиноких випадках. Крім того, до певних складностей приводить дослідження питання існування та єдиності розв'язку. У зв'язку з цим актуальним є розробка нових та розвиток існуючих методів конструктивного дослідження нелінійних крайових задач, тобто таких методів, які не тільки дозволяють з'ясувати питання існування розв'язку, але й пропонують алгоритм його знаходження. Серед таких методів особливе місце належить двобічним ітераційним методам. Метод двобічних наближень є універсальним інструментом як при дослідженні питань існування та єдиності розв'язків операторних рівнянь, так і для фактичного їх знаходження. При цьому двобічні наближення дозволяють отримати верхню та нижню оцінку розв'язку на кожній ітерації, а отже, пропонують зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку. Теоретичним підґрунтям розробки двобічних ітераційних методів є теорія напівупорядкованих банахових просторів, що була застосована М.О. Красносельским, В.І. Опойцевим та їх учнями [8, 9, 12] для дослідження питань додатної розв'язності операторних рівнянь. Розробці двобічних ітераційних методів розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних і еліптичних рівнянь та їх систем присвячено роботи [5 – 7, 13 – 15, 20 – 21], але в них розглядалися лише задачі з першими крайовими умовами.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ КОНСТРУКТИВНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми конструктивного дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – «Нелінійні крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь».

Предмет аналізу – «Двобічні ітераційні методи чисельного аналізу нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь».

Точка зору: дослідник.

Ціль: отримання чисельних розв'язків нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з двобічною оцінкою похибки та залежності наближених розв'язків від параметрів крайових задач.

Взаємодію системи із зовнішнім середовищем найкраще ілюструє модель типу «чорний ящик» (рис. 1.1). Увага звертається на відокремленість системи, її цілісність та взаємодію системи і середовища. Входами системи є вплив системи на середовище, а виходами – її цільові продукти. Важлива лише границя системи, тому внутрішній зміст «чорного ящика» ніяк не розкривається [4].

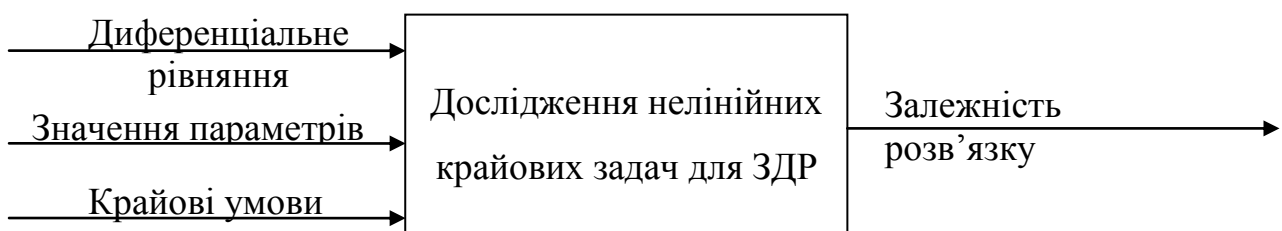


Рисунок 1.1 – Модель типу «чорний ящик»

1.1.2 Морфологічний опис системи

Морфологічний опис системи розпочнемо з опису зовнішнього середовища, модель якого наведено на рис. 1.2.

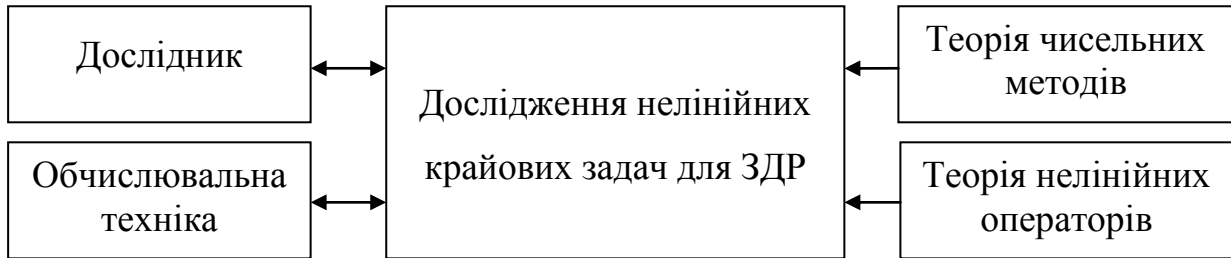


Рисунок 1.2 – Модель зовнішнього середовища системи

Зовнішнє середовище – це сукупність всіх об'єктів за межею системи, зміна властивостей яких впливає на систему, або властивості яких змінюються в результаті поведінки системи

1.1.3 Функціональна модель системи

Методологія IDEF0 пристосована для відображення функцій системи, а також механізмів, які використовуються при виконанні цих функцій. IDEF0 може бути застосована як для означення вимог до розробки нової системи, що буде реалізовувати виділені функції, так і для аналізу функцій, які виконує вже існуюча система. Згідно методології IDEF0, процес зображується як множина взаємодіючих елементів, і для кожної взаємодії показуються необхідні ресурси [10]. На вхід до системи поступають диференціальне рівняння, значення параметрів та крайові умови; керуючими засобами є теорія математичної фізики, теорія нелінійних операторів, теорія чисельних методів; до механізмів відносяться програмне забезпечення та дослідник; а на виході ми отримуємо чисельний розв'язок задачі з двобічною оцінкою похибки, та його залежність від параметрів.

Перша діаграма в ієрархії діаграм IDEF0 є контекстною. Контекстна діаграма містить поведінку системи в цілому і необхідна для самого загального представлення системи та взаємодії із середовищем. Загальне зображення системи далі деталізується розділенням контекстної діаграми на великі фрагменти, тобто проводиться декомпозиція. Після цього, для переходу на наступний рівень деталізації в ієрархії діаграм, виконується декомпозиція кожного отриманого фрагменту. Таким чином можна уточнювати опис системи до досягнення необхідного рівня деталізації [4]. У нашому випадку розглядається функціонування системи «Дослідити нелінійну крайову задачу для ЗДР». Декомпозиція контекстної діаграми (рис. 1.4) демонструє основні функції системи та їх деталізації за рівнями (рис. 1.5).

Описати процеси, які виконуються у певній послідовності, а також описати об'єкти, які спільно беруть участь в одному процесі, зручно за допомогою методу IDEF3 (рис. 1.6, 1.7).

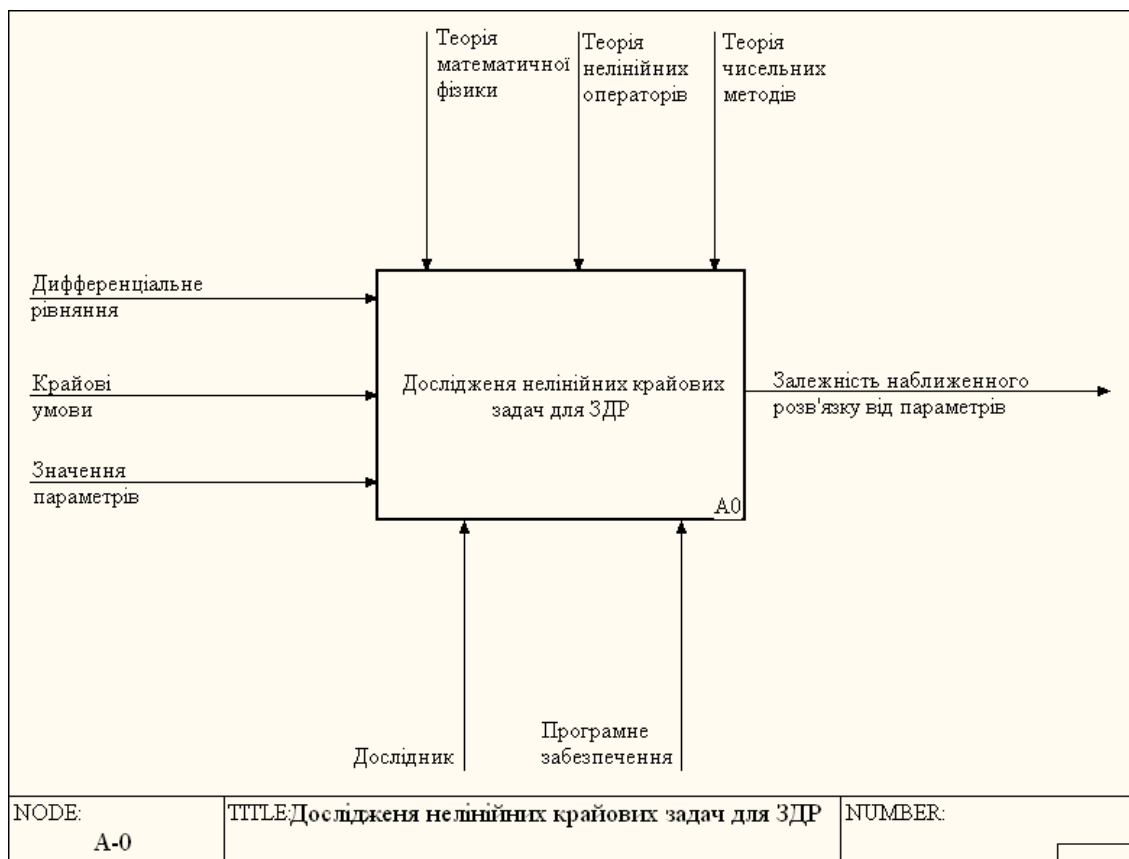


Рисунок 1.3 – Контекстна діаграма (рівень A-0)

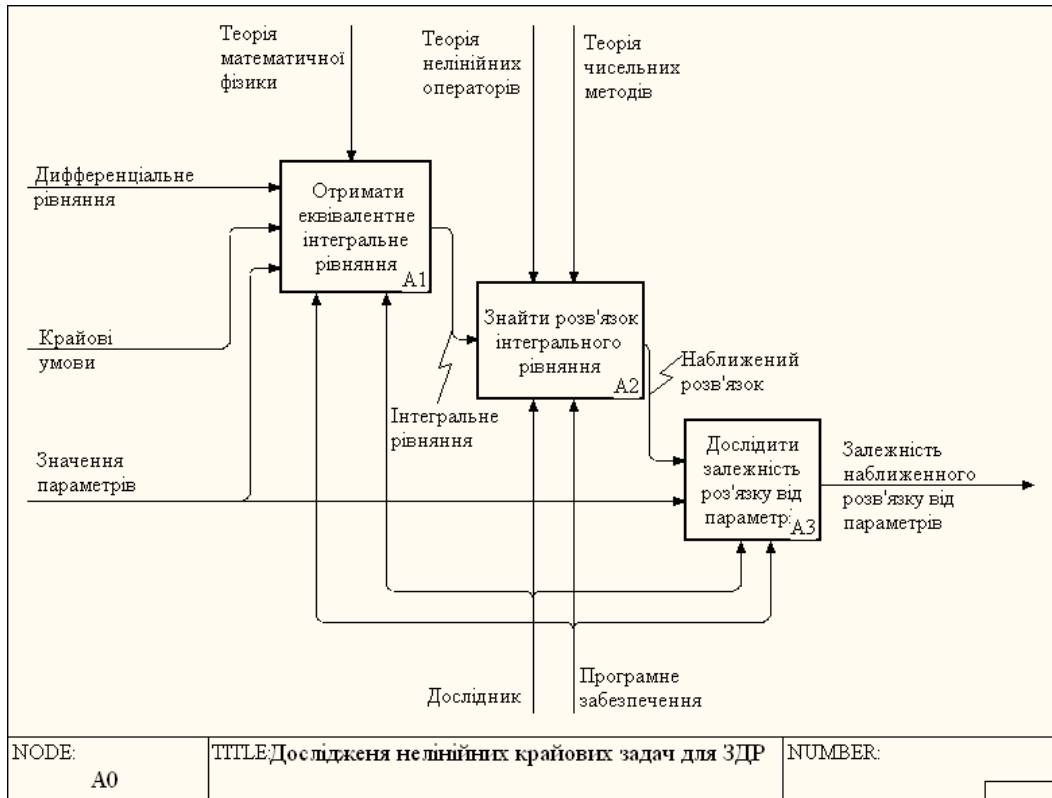


Рисунок 1.4 – Декомпозиція роботи «Дослідження нелінійних крайових задач»: рівень A0

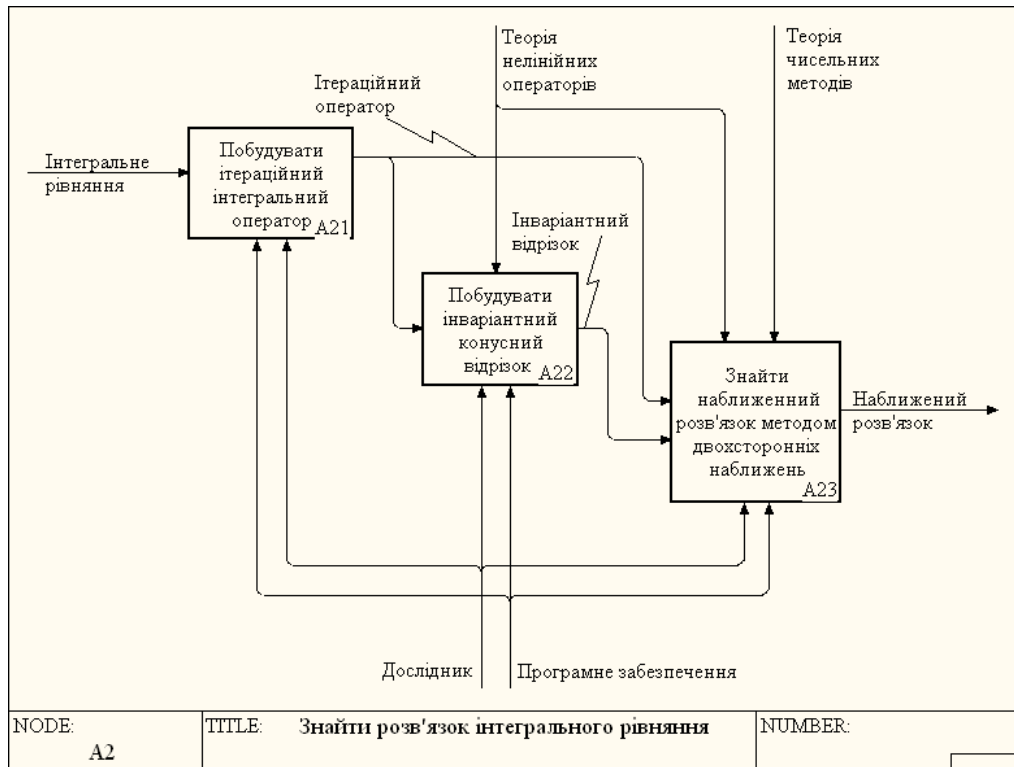


Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Знайти розв'язок інтегрального рівняння»: рівень A1

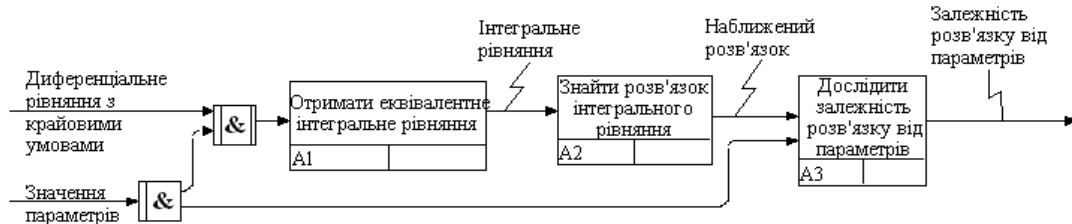


Рисунок 1.6 – Опис роботи «Дослідження нелінійних крайових задач»: рівень A0 (в нотації IDEF3)

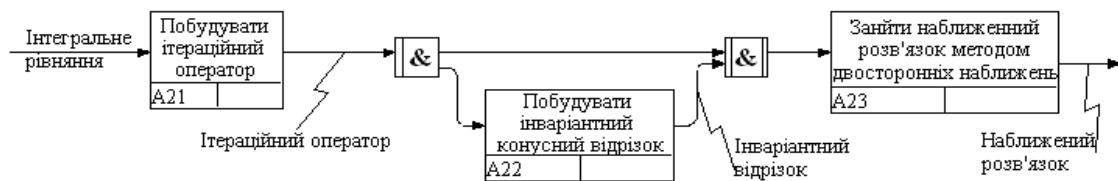


Рисунок 1.7 – Опис роботи «Знайти розв'язок інтегрального рівняння»: рівень A1 (в нотації IDEF3)

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми конструктивного дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Метод розв'язання крайової задачі необхідно обрати серед сіткових методів, методу лінеаризації та методу двобічних наближень. У кожній групі методів є свої переваги та недоліки. При застосуванні сіткових методів область, у якій розглядається нелінійна крайова задача, замінюється скінченною кількістю точок (сіткою) і у кожній з цих точок диференціальне рівняння задачі замінюється нелінійним рівнянням. Отже, відбувається заміна з деякою похибкою на деяке наближення як області, так і диференціального рівняння. Крім того, метод сіток не має зручної оцінки похибки. Методи лінеаризації замінюють нелінійну крайову задачу послідовністю лінійних крайових задач, кожна з яких може бути розв'язана якимось чисельним методом. Для цих методів теж постає

проблема зручної оцінки похибки наближення на кожній ітерації. У зв'язку з цим актуальним є конструктивне дослідження нелінійних крайових задач, тобто таке дослідження, яке б не тільки дозволило з'ясувати питання існування розв'язку, але й запропонувало алгоритм його знаходження. Особливе місце серед методів конструктивного дослідження нелінійних крайових задач належить двобічним ітераційним методам. Ці методи дозволяють оцінити невідомий розв'язок знизу та зверху двома послідовностями функцій, а отже, пропонують зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Оберемо метод, яким буде розв'язуватися задача. Вибір методу здійснюватимемо за наступними критеріями:

- критерій 1 (K1): швидкість збіжності;
- критерій 2 (K2): зручність оцінки похибки;
- критерій 3 (K3): отримує наближене розв'язок у вигляді аналітичної формули;
- критерій 4 (K4): час роботи програми;
- критерій 5 (K5): точність розв'язку;

Обирати будемо з наступної множини альтернатив:

- альтернатива 1 (A1): сіткові методи;
- альтернатива 2 (A2): метод двобічних наближень;
- альтернатива 3 (A3): метод лінеаризації.

Ієрархічна модель проблеми вибору у випадку багатокритеріальності має вигляд, зображений на рисунку 1.8.

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для продовження аналізу необхідно побудувати матриці парних порівнянь моделі, а також критеріїв системи. Матриця парних порівнянь критеріїв та розрахунки за нею наведено у табл. 1.1.

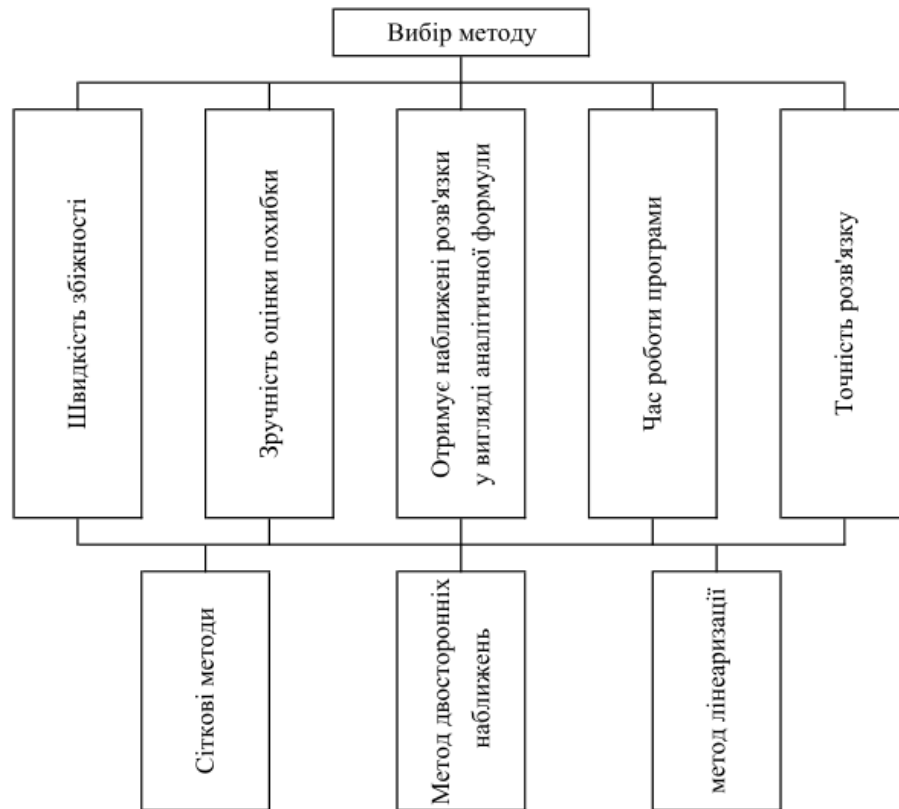


Рисунок 1.8 – Ієрархічна модель аналізу проблеми

Таблиця 1.1 – Матриця парних порівнянь критеріїв

Критерії оцінювання	K1	K2	K3	K4	K5	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
K1	1	4	7	8	4	3,890	0,500	0,886
K2	$\frac{1}{4}$	1	9	8	5	2,450	0,310	1,721
K3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{2}$	3	0,470	0,060	1,178
K4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	2	1	2	0,500	0,064	1,191
K5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1	0,440	0,056	0,795
Усього						7,750		5,680

Для таблиці 1.1 індекс узгодженості (ІУ) = $\frac{5,68-5}{5-1} = 0,17$, випадкова узгодженість = 1,12, відносна узгодженість (ВУ) = $\frac{0,17}{0,12} = 0,15 = 15\%$.

Для прийняття рішення про використання методу необхідно провести порівняльний аналіз альтернатив. Оцінивши їх щодо кожного з критеріїв, отримаємо дані, які представлені в таблицях 1.2 – 1.6. Випадкова узгодженість для матриць дорівнює 0,58.

Таблиця 1.2 – Порівняння за першим критерієм

Критерій 1	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	0,400	0,090	0,824
A2	5	1	7	3,270	0,730	0,991
A3	3	$\frac{1}{7}$	1	0,750	0,169	1,418
Усього				4,420		3,190

Для таблиці 1.2 маємо ІУ = 0,09, ВУ = 0,1 = 10%.

Таблиця 1.3 – Порівняння за другим критерієм

Критерій 2	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{3}$	2	0,870	0,270	1,073
A2	3	1	4	2,280	0,700	0,990
A3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0,066	0,020	0,955
Усього				3,216		3,010

Для таблиці 1.3 маємо $IУ = 0,005$, $ВУ = 0,008 = 0,8\%$.

Таблиця 1.4 – Порівняння за третім критерієм

Критерій 3	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	3	$\frac{1}{6}$	0,874	0,187	1,354
A2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{7}$	0,329	0,070	0,845
A3	6	7	1	3,476	0,743	0,973
Усього				4,679		3,171

Для таблиці 1.4 маємо $IУ = 0,0855$, $ВУ = 0,086 = 8,6\%$.

Таблиця 1.5 – Порівняння за четвертим критерієм

Критерій 4	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значимості
A1	1	$\frac{1}{3}$	4	1,010	0,280	1,189
A2	3	1	5	2,466	0,627	0,961
A3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1	0,368	0,094	0,936
Усього				4,250		3,086

Для таблиці 1.5 маємо $IУ = 0,043$, $ВУ = 0,074 = 7,4\%$.

Таблиця 1.6 – Порівняння за п'ятим критерієм

Критерій 5	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{3}$	4	1,101	0,280	1,189
A2	3	1	5	2,466	0,627	0,961
A3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1	0,368	0,094	0,936
Усього				3,935		3,086

Для таблиці 1.6 маємо $I_U = 0,0429$, $V_U = 0,0739 = 7,39\%$.

1.2.3 Модель вирішення проблеми

З усіх отриманих результатів ми, як особа, що приймає рішення, можемо зробити кінцеві підрахунки та зробити висновок. У таблиці 1.7 наведені результати, які дозволяють нам сказати, що кращою для нас буде друга альтернатива, а саме – метод двосторонніх наближень.

Таблиця 1.7 – Кінцеві дані

Критерій Альтернатива	K1	K2	K3	K4	K5	Узагальнені пріоритети
A1	0,500	0,090	0,270	0,187	0,280	0,361
A2	0,310	0,730	0,700	0,070	0,627	0,406
A3	0,060	0,169	0,020	0,743	0,094	0,233

Підкласом нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рі-

внянь є задачі для напівлінійних рівнянь, тобто таких рівнянь, у яких диференціальний оператор є лінійним, а нелінійність викликана лише функцією від шуканого розв'язку.

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

При математичному моделюванні процесів у фізиці плазми, теорії горіння [16], хімічній кінетиці, теорії течії провідної рідини [18, 19], біології тощо приходять до необхідності аналізу задач для нелінійних рівнянь математичної фізики. Наприклад, при дослідженні розподілу температури $u(x)$ у теплопровідному стрижні довжини l , якщо $p(x)$ – коефіцієнт теплопровідності, $-p(x)\frac{du}{dx}$ – щільність потоку тепла, $q(x)$ – коефіцієнт тепловіддачі, а $f(x, u)$ – нелінійна щільність джерел тепла, приходять до напівлінійного рівняння вигляду

$$-\frac{d}{d}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x, u), \quad x \in (0, l), \quad (1.1)$$

причому із фізичного сенсу задачі витікають умови $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in [0, l]$, та практичне значення мають лише додатні на $(0, l)$ розв'язки.

При цьому на кінцях стрижня можливі різні температурні режими:

- а) підтримується стала температура, зокрема, нульова;
- б) заданий тепловий потік, зокрема, кінець теплоізолюваний;
- в) відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона.

Рівняння (1.1) є одновимірним стаціонарним рівнянням теплопровідності –

одновимірним еліптичним рівнянням математичної фізики, що виникає при математичному моделюванні багатьох процесів.

Метою атестаційної роботи є застосування методу двобічних наближень до конструктивного дослідження напівлінійного звичайного диференціального рівняння вигляду

$$-u'' = f(x, u), \quad x \in (0, l), \quad (1.2)$$

якщо в точках $x = 0$ та $x = l$ задані перші, другі або треті крайові умови, а функція $f(x, u)$ – додатна та неперервна за сукупністю змінних x, u при $x \in (0, l)$, $u > 0$.

1.3.2 Формальна постановка задачі

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду (1.2) із правою частиною $f(x, u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$, тобто рівняння

$$-u'' = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \quad x \in (0, 1), \quad (1.3)$$

де p, q, λ, μ – додатні параметри, із трьома наборами крайових умов

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (1.4)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \quad (1.5)$$

$$u'(0) - u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (1.6)$$

Зазначимо, що крайові умови (1.4) відповідають випадку, коли на кінцях стрижня підтримується нульова температура, крайові умови (1.5) – випадку, коли на лівому кінці підтримується нульова температура, а правий кінець теп-

лоізольований, а крайові умови (1.6) відповідають випадку, коли на лівому кінці відбувається конвективний теплообмін, а на правому підтримується нульова температура.

За цих умов ставиться задача знаходження додатних розв'язків трьох крайових задач (1.3), (1.4), (1.3), (1.5) та (1.3), (1.6) і дослідження при $\lambda = \mu = 1$ поведінки розв'язків залежно від параметрів p, q диференціального рівняння (1.3).

Для аналізу кожної з поставлених крайових задач застосуємо методи теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [8, 12] та метод двобічних наближень

1.4 Постановка задач дослідження

Метою атестаційної роботи є застосування методу двобічних наближень до конструктивного дослідження крайових задач різних типів для напівлінійних звичайних диференціальних рівнянь. Для досягнення поставленої мети треба виконати наступні завдання:

- провести системний аналіз предметної області;
- ознайомитися із методами отримання наближеного розв'язку задач математичної фізики (зокрема, методом двобічних наближень);
- обґрунтувати застосування методу двобічних наближень до розв'язання поставлених крайових задач;
- розробити чисельний алгоритм;
- виконати програмну реалізацію розробленого алгоритму в системі комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica;
- провести обчислювальні експерименти для тестових задач.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДА РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Конуси у напівупорядкованих банахових просторах

Наведемо основні відомості з теорії напівупорядкованих банахових просторів [8, 9, 12].

Нехай \mathcal{U} – дійсний банахів простір, θ – нульовий елемент простору \mathcal{U} .

Означення 2.1. Відрізком $[u, v]$, що з'єднує точки u та v банахового простору \mathcal{U} , називається сукупність елементів з \mathcal{U} вигляду $tu + (1-t)v$, де $0 \leq t \leq 1$.

Означення 2.2. Множина M – підмножина банахового простору \mathcal{U} – називається опуклою, якщо разом з кожними своїми двома точками воно повністю містить і відрізок, що їх з'єднує.

Означення 2.3. Променем, що проходить через точку $u \in \mathcal{U}$ ($u \neq \theta$), називається сукупність елементів з \mathcal{U} вигляду tu , де $t \geq 0$.

Означення 2.4. Замкнута опукла множина $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ називається конусом, якщо разом з кожною точкою u вона містить промінь, що проходить через u , та якщо з $u, -u \in \mathcal{K}$ випливає, що $u = \theta$.

Отже, для конуса \mathcal{K} виконується:

- якщо $u \in \mathcal{K}$ и $u \neq \theta$, то $\alpha u \in \mathcal{K}$ для будь-якого $\alpha \geq 0$;
- якщо $u \in \mathcal{K}$ и $u \neq \theta$, то $-u \notin \mathcal{K}$.

В $C(\bar{\Omega})$ (простір неперервних в $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ функцій) прикладом конуса є множина невід'ємних функцій

$$\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\},$$

(множину $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ вважаємо обмеженою та вимірною за Жорданом).

Конуси з невід'ємними елементами природно виникають при розв'язанні прикладних задач. Наприклад, невід'ємні функції можуть описувати чисель-

ність популяції, концентрацію речовини та ін.

Означення 2.5. Простір \mathcal{U} називається напівупорядкованим, якщо для деяких пар елементів $u, v \in \mathcal{U}$ визначено бінарне відношення \leq таке, що:

- а) із $u \leq v$ випливає, що $\alpha u \leq \alpha v$ при $\alpha \geq 0$ і $\alpha v \leq \alpha u$ при $\alpha < 0$;
- б) із $u \leq v$ і $u \geq v$ випливає, що $u = v$;
- в) із $u_1 \leq v_1$ і $u_2 \leq v_2$ випливає, що $u_1 + u_2 \leq v_1 + v_2$;
- г) із $u \leq v$ і $v \leq w$ випливає, що $u \leq w$.

Поняття напівупорядкованості є одним з ефективних інструментів при вивченні лінійних і нелінійних відображень у банахових просторах.

Напівупорядкованість в банаховому просторі \mathcal{U} може бути введена за допомогою конуса \mathcal{K} .

Означення 2.6. Для $u, v \in \mathcal{U}$ пишуть $u \leq v$, якщо $u - v \in \mathcal{K}$.

Виконання умов а) – г) перевіряється безпосередньо на підставі означення конуса. Крім того, з замкнутості конуса \mathcal{K} випливає можливість переходу до границі в нерівностях:

д) якщо $\|u_n - u\| \rightarrow 0$, $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ та $u_n \leq v_n$ при всіх $n = 1, 2, \dots$, то $u \leq v$.

Напівупорядкованість, що вводиться конусами \mathcal{K}_+ , має простий сенс: напівупорядкування простору $C(\bar{\Omega})$ за допомогою конуса \mathcal{K}_+ означає, що

$$u \leq v := u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Домовимося також про наступні позначення:

писатимемо $u \bar{\leq} v$, якщо $u - v \notin \mathcal{K}$;

писатимемо $u < v$, якщо $u \leq v$ и $u \neq v$.

Аналогічно вводяться позначення $u \geq v$, $u \bar{\geq} v$, $u > v$.

Означення 2.7. Елементи $u \geq \theta$, тобто елементи $u \in \mathcal{K}$, називаються додатними.

Означення 2.8. Конусним відрізком $\langle v, w \rangle$ в напівупорядкованому за допомогою конуса \mathcal{K} просторі \mathcal{U} називатимемо множину вигляду

$$\langle v, w \rangle := \{u \in \mathcal{U} : v \leq u \leq w\}.$$

Отже, якщо $u \in \langle v, w \rangle$, то $u - v \in \mathcal{K}$ та $w - u \in \mathcal{K}$.

Розглянемо основні різновиди конусів в банахових просторах.

Означення 2.9. Конус \mathcal{K} називається тілесним, якщо він містить внутрішні точки.

Конус \mathcal{K}_+ в просторі $C(\bar{\Omega})$ є тілесним. Внутрішніми точками цього конуса є функції $u(\mathbf{x})$ з додатним мінімумом: $\min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} u(\mathbf{x}) > 0$.

Означення 2.10. Конус \mathcal{K} називають відтворювальним конусом, якщо будь-який елемент $u \in \mathcal{U}$ можна подати у вигляді

$$u = v - w, \tag{2.1}$$

де $v, w \in \mathcal{K}$.

Зауважимо, що елементи v, w в (2.1) визначаються неоднозначно.

Лема 2.01. Кожен тілесний конус є відтворювальним конусом.

Конус \mathcal{K}_+ в просторі $C(\bar{\Omega})$ є відтворювальним конусом, оскільки є тілесним.

Означення 2.11. Конус \mathcal{K} називається нормальним, якщо існує таке число $N(\mathcal{K}) > 0$, що з $\theta \leq u \leq v$ випливає нерівність

$$\|u\| \leq N(\mathcal{K}) \|v\|.$$

В цьому випадку говорять також, що норма напівмонотонна.

Число $N(\mathcal{K})$ називається константою нормальності конуса. Якщо $N(\mathcal{K}) = 1$, то конус називається гострим і кажуть, що норма монотонна.

Конус \mathcal{K}_+ в просторі $C(\bar{\Omega})$ є нормальним (і навіть гострим).

Означення 2.12. Послідовність $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ називається:

– неспадною за конусом \mathcal{K} , якщо $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots$;

– незростаючою за конусом \mathcal{K} , якщо $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$.

Означення 2.13. Послідовність $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ називається:

– обмеженою зверху за конусом \mathcal{K} , якщо існує такий елемент $u_0 \in \mathcal{U}$, що $u_n \leq u_0$ для всіх $n = 1, 2, \dots$;

– обмеженою знизу за конусом \mathcal{K} , якщо існує такий елемент $u_0 \in \mathcal{U}$, що $u_n \geq u_0$ для всіх $n = 1, 2, \dots$.

Розглянемо, які додаткові умови гарантують існування границі у монотонної послідовності u_n , $n = 1, 2, \dots$, елементів простору \mathcal{U} , напівупорядкованого за допомогою конуса \mathcal{K} .

Означення 2.14. Конус \mathcal{K} називається правильним, якщо будь-яка неспадна обмежена за конусом послідовність $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ ($u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq u_0$) збігається за нормою простору \mathcal{U} .

Конус \mathcal{K}_+ в просторі $C(\bar{\Omega})$ властивістю правильності не має. Так, наприклад, послідовність функцій $u_n(x) = 1 - x^n$, $n = 1, 2, \dots$, з $C[0, 1]$ не спадає за конусом \mathcal{K}_+ і обмежена зверху за конусом \mathcal{K}_+ . У той же час ця послідовність не має в $C[0, 1]$ границі.

Теорема 2.1. Кожен правильний конус є нормальним.

Якщо конус \mathcal{K} не має властивості правильності, то для збіжності монотонної послідовності недостатньо її обмеженості; в цьому випадку доводиться застосовувати додаткові обмеження.

Надалі ми користуватимемося тим фактом, що компактні монотонні послідовності мають границю. Для доведення цього твердження потрібно, поперше, помітити, що границі всіх збіжних підпослідовностей монотонної послі-

довності збігаються і, по-друге, компактна послідовність збігається, якщо границі всіх її підпослідовностей однакові.

Означення 2.15. Послідовність $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ називається обмеженою за нормою, якщо існує таке число $M > 0$, що

$$\|u_n\| \leq M \text{ для всіх } n = 1, 2, \dots$$

Означення 2.16. Конус \mathcal{K} називається цілком правильним, якщо будь-яка монотонна за конусом \mathcal{K} і обмежена за нормою послідовність збігається (за нормою \mathcal{U}) до деякої границі.

Теорема 2.2. Кожен цілком правильний конус є правильним конусом.

Теорема 2.3. Якщо правильний конус \mathcal{K} є тілесним, то він є цілком правильним.

Означення 2.17. Елемент $w \in \mathcal{U}$ називається точною верхньою межею (супремумом) для пари елементів u і v з \mathcal{U} , якщо $u \leq w$, $v \leq w$ та якщо з нерівностей, $u \leq w_1$, $v \leq w_1$ випливає, що $w \leq w_1$.

Елемент $w \in \mathcal{U}$ називається точною нижньою межею (інфімумом) для пари елементів u і v з \mathcal{U} , якщо $w \leq u$, $w \leq v$ та якщо з нерівностей $w_1 \leq u$, $w_1 \leq v$ випливає, що $w_1 \leq w$.

Означення 2.18. Конус \mathcal{K} називається мініедральним, якщо кожна його пара елементів має супремум.

Мініедральність конуса \mathcal{K} еквівалентна тому, що для будь-яких $u, v \in \mathcal{U}$ може бути вказаний такий елемент w , що $\mathcal{K}_u \cap \mathcal{K}_v = \mathcal{K}_w$, де через \mathcal{K}_u позначено множину елементів вигляду $u + x$, $x \in \mathcal{K}$. При цьому $w = \sup\{u, v\}$, тобто

$$\mathcal{K}_u \cap \mathcal{K}_v = \mathcal{K}_{\sup\{u, v\}}. \quad (2.2)$$

Конус \mathcal{K}_+ в просторі $C(\bar{\Omega})$ мініедрален.

Якщо конус \mathcal{K} мініедрален, то існує точна верхня межа у будь-якого скі-

нченного набору елементів u_1, u_2, \dots, u_n , тобто існує такий елемент w , що

$$u_i \leq w, \quad i = 1, 2, \dots,$$

причому з нерівностей

$$u_i \leq w_1, \quad i = 1, 2, \dots,$$

випливає співвідношення $w \leq w_1$.

Точна верхня межа елементів u_1, u_2, \dots, u_n може бути визначена рівністю

$$\sup\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = \sup\{u_1, \sup\{u_2, \dots, u_n\}\}.$$

Відзначимо також аналогічну (2.2) формулу

$$\mathcal{K}_{u_1} \cap \mathcal{K}_{u_2} \cap \dots \cap \mathcal{K}_{u_n} = \mathcal{K}_{\sup\{u_1, u_2, \dots, u_n\}}.$$

Можна довести, що тілесний мініедральний конус в нескінченновимірному просторі не може бути правильним.

Розглянемо питання існування точної верхньої межі у зліченній множини елементів з \mathcal{U} .

Теорема 2.4. Нехай конус \mathcal{K} є правильним і мініедральним. Тоді кожна обмежена за конусом \mathcal{K} послідовність $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ має точну верхню межу.

Припущення теореми 2.4 про правильність конуса істотно. Наприклад, конус \mathcal{K}_+ в просторі $C(\bar{\Omega})$ мініедральний, але не має властивість правильності і в $C(\bar{\Omega})$ існують обмежені послідовності, які не мають супремума (наприклад, послідовність $u_n(x) = 1 - x^n$, $n = 1, 2, \dots$, в $C[0, 1]$).

Якщо виконані умови теореми 2.4, то для кожної неспадної обмеженою за

конусом \mathcal{K} послідовності $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ справедлива рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u^*\| = 0,$$

де

$$u^* = \sup\{u_1, u_2, \dots\}.$$

Для доведення достатньо відмітити, що $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ збігається за нормою \mathcal{U} к деякому елементу w_0 . Тоді, з одного боку, з $u_n \leq w_0$ випливає, що $u^* \leq w_0$, а, з іншого боку, з $u_n \leq u^*$ випливає, що $w_0 \leq u^*$.

Якщо банахів простір \mathcal{U} напівупорядковано мініедральним конусом \mathcal{K} , то будь-який елемент $u \in \mathcal{U}$ допускає подання

$$u = u^+ - u^-,$$

де $u^+ = \sup\{x, \theta\}$ називається додатною частиною, а $u^- = \sup\{-x, \theta\}$ – від'ємною частиною елемента u .

Елемент $|u| = u^+ + u^-$ називається модулем елемента u . Справедлива нерівність

$$-|u| \leq u \leq |u|.$$

Означення 2.19. Множина $\mathfrak{M} \subset \mathcal{U}$ називається обмеженою зверху за конусом \mathcal{K} , якщо $u \leq w_0$ для всіх $u \in \mathfrak{M}$ і деякого фіксованого $w_0 \in \mathcal{U}$. Такий елемент $w_0 \in \mathcal{U}$ називається верхньою межею множини \mathfrak{M} . Якщо у множині P верхніх меж множини \mathfrak{M} є найменший елемент \tilde{w} (тобто $\tilde{w} \leq w$ для будь-якого $w \in P$), то він називається точною верхньою межею множини \mathfrak{M} і поз-

начається $\tilde{w} = \sup \mathfrak{M}$.

Множина $\mathfrak{M} \subset \mathcal{U}$ називається обмеженою знизу за конусом \mathcal{K} , якщо $w_0 \leq u$ для всіх $u \in \mathfrak{M}$ і деякого фіксованого $w_0 \in \mathcal{U}$. Такий елемент $w_0 \in \mathcal{U}$ називається нижньою межею множини \mathfrak{M} . Якщо в множині Q нижніх меж множини \mathfrak{M} є найбільший елемент \tilde{w} (тобто $w \leq \tilde{w}$ для будь-якого $w \in Q$), то він називається точною нижньою межею множини \mathfrak{M} і позначається $\tilde{w} = \inf \mathfrak{M}$.

Означення 2.20. Конус \mathcal{K} називається сильно мініедральним, якщо точна верхня межа існує у будь-якої обмеженої зверху за конусом \mathcal{K} множині.

Розглянуті вище твердження про існування точної верхньої межі очевидним чином справедливі й у випадку, коли розглядається точна нижня межа.

Мініедральний конус \mathcal{K}_+ в просторі $C(\bar{\Omega})$ є нормальним. Проте, існують мініедральні конуси, що не мають властивість нормальності.

Означення 2.21. Нехай u_0 – деякий фіксований елемент конуса \mathcal{K} . Елемент $u \in \mathcal{U}$ називається u_0 -вимірним, якщо існує таке число $\gamma > 0$, що

$$-\gamma u_0 \leq u \leq \gamma u_0.$$

Сукупність u_0 -вимірних елементів $u \in \mathcal{U}$ позначимо через \mathcal{E}_{u_0} . Зрозуміло, що \mathcal{E}_{u_0} – лінійна структура, яку можна зробити нормованим простором, ввівши норму за формулою

$$\|u\|_{u_0} = \min\{\gamma : -\gamma u_0 \leq u \leq \gamma u_0\}. \quad (2.3)$$

Норма (2.3) називається u_0 -нормою.

Якщо $v_0 \in \mathcal{K}$ – ненульовий u_0 -вимірний елемент, то кожен u_0 -вимірний елемент буде також і v_0 -вимірний, тобто простори \mathcal{E}_{u_0} і \mathcal{E}_{v_0} складаються з одних і тих самих елементів. Очевидно, що u_0 -норма і v_0 -норма еквівалентні.

Нехай простір $C[0, l]$ напіворядковано конусом \mathcal{K}_+ і $u_0(x) = 1$. Тоді \mathcal{E}_{u_0} збігається з $C[0, l]$, а u_0 -норма – з вихідної нормою простору $C[0, l]$. Якщо ж $u_0(x) = x(l - x)$, то \mathcal{E}_{u_0} є сукупність функцій $u(x)$ таких, що

$$|u(x)| \leq \gamma x(l - x), \quad (2.4)$$

причому найменше в (2.4) γ є u_0 -нормою функції $u(x)$.

Послідовність функцій $\{u_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, очевидно, збігатиметься за u_0 -нормою, якщо функції $\frac{u_n(x)}{x(l - x)}$ збігаються в $L_\infty(0, l)$. Із збіжності за u_0 -нормою через оцінку

$$\|u\|_{C[0, l]} \leq \|u\|_{u_0} \cdot \max_{x \in [0, l]} x(l - x) = \frac{1}{4} \|u\|_{u_0}$$

впливає збіжність у просторі $C[0, l]$.

Теорема 2.5. Нехай конус \mathcal{K} є нормальним. Тоді простір \mathcal{E}_{u_0} є повним за u_0 -нормою.

Нехай простір \mathcal{E}_{u_0} є повним. Введемо позначення $\mathcal{K}_{u_0} = \mathcal{K} \cap \mathcal{E}_{u_0}$. Очевидно, \mathcal{K}_{u_0} є опуклою множиною і задовольняє умовам:

а) якщо $u \in \mathcal{K}_{u_0}$ і $u \neq \theta$, то $\alpha u \in \mathcal{K}_{u_0}$ для будь-якого $\alpha \geq 0$;

б) якщо $u \in \mathcal{K}_{u_0}$ і $u \neq \theta$, то $-u \notin \mathcal{K}_{u_0}$;

з означення конуса. Можна показати, що множина \mathcal{K}_{u_0} є замкнутою.

2.2 Основні типи операторів в просторах з конусом

Той факт, що простір \mathcal{U} напіворядковано деяким конусом \mathcal{K} , може ефективно використовуватися при вивченні оператора T , що діє в \mathcal{U} , лише в

тому випадку, коли T має ті чи інші властивості, що пов'язані з напівупорядкованістю. Розглянемо означення основних типів операторів, які використовуватимуться в подальшому.

Означення 2.22. Оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ називається додатним, якщо він залишає інваріантним (перетворює в себе) конус \mathcal{K} .

Іншими словами, оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ є додатним, якщо $T(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$, тобто $T(u) \in \mathcal{K}$ при будь-якому $u \in \mathcal{K}$. Також умову додатності оператора T можна записати у вигляді:

$$\text{із } u \geq \theta \text{ випливає, що } T(u) \geq \theta.$$

Часто не суттєво, що оператор T визначений на всьому просторі \mathcal{U} . Тоді додатним називають будь-який оператор T , що визначений на конусі \mathcal{K} та перетворює \mathcal{K} в себе.

Важливий підклас додатних операторів утворюють так звані u_0 -додатні оператори, які визначаються так. Нехай зафіксований деякий ненульовий елемент $u_0 \in \mathcal{K}$. Позначимо через $K(u_0)$ множину тих елементів $u \in \mathcal{K}$, для яких можна вказати такі $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, що

$$\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0.$$

Якщо конус \mathcal{K} є тілесним та $u_0 \in \text{int } \mathcal{K}$, то u_0 -додатний оператор називають сильно додатним.

Означення 2.23. Додатний оператор T , деяка ітерація якого T^n переводить ненульові елементи конуса \mathcal{K} в $K(u_0)$ називається u_0 -додатним оператором, тобто для будь-якого ненульового $u \in \mathcal{K}$ знайдуться такі $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, що

$$\alpha u_0 \leq T^n u \leq \beta u_0.$$

Означення 2.24. Додатний оператор T називається u_0 -обмеженим знизу, якщо для будь-якого ненульового $u \in \mathcal{K}$ знайдуться такі n і $\alpha = \alpha(u) > 0$, що

$$T^n(u) \geq \alpha u_0 \quad (\alpha > 0)$$

та u_0 -обмеженим зверху, якщо для будь-якого ненульового $u \in \mathcal{K}$ знайдуться такі m і $\beta = \beta(u) > 0$, що

$$T^m(u) \leq \beta u_0 \quad (\beta > 0).$$

Лінійний додатний оператор, u_0 -обмежений одночасно знизу і зверху, є u_0 -додатним.

Означення 2.25. Оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ (не обов'язково додатний) називається u_0 -обмеженим в просторі \mathcal{U} , якщо для будь-якого $u \in \mathcal{U}$ знайдеться таке n , що елемент $T^n(u)$ є u_0 -вимірним.

Означення багатьох різновидів операторів, що діють в напівупорядкованому просторі, так чи інакше пов'язані з властивістю монотонності.

Означення 2.26. Оператор T , що діє в \mathcal{U} , називається монотонним (ізотонним), якщо з $u, v \in \mathcal{U}$, $u \geq v$ витікає $T(u) \geq T(v)$

Означення 2.27. Оператор T , що діє в \mathcal{U} , називається антимонотонним (антитонним), якщо з $u, v \in \mathcal{U}$, $u \geq v$ витікає $T(u) \leq T(v)$.

Нарешті, T називають оператором монотонного типу, якщо з $T(u) \geq T(v)$ випливає, що $u \geq v$.

Лінійний додатний оператор A має властивість монотонності. Дійсно, якщо $u \geq v$, тобто $u - v \geq \theta$, то $A(u - v) = Au - Av \geq \theta$, тобто $Au \geq Av$.

Зупинимось на визначенні ще одного досить загального класу операторів, пов'язаного з властивістю своєрідною узагальненою монотонності.

Означення 2.28. Оператор T , що діє в \mathcal{U} , називається гетеротонним, як-

що він допускає діагональне подання $T(u) \equiv \hat{T}(u, u)$, причому супровідний оператор \hat{T} визначений на $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ і $\hat{T}(v, w)$ монотонно зростає по v та спадає по w , тобто:

а) із $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$, $v_1 \geq v_2$ випливає $\hat{T}(v_1, w) \geq \hat{T}(v_2, w)$;

б) із $w_1, w_2 \in \mathcal{U}$, $w_1 \geq w_2$ випливає $\hat{T}(v, w_1) \leq \hat{T}(v, w_2)$.

Вибір супровідного оператора $\hat{T}(v, w)$ завжди неоднозначний: наприклад, якщо $\hat{T}(v, w)$ супровідний оператор для T , то супровідним буде також оператор $\hat{T}(v, w) + v - w$. При розв'язанні конкретних задач з цієї свободи вибору можна отримувати певні вигоди. Проте, коли мова йде про гетеротонний оператор T , завжди мається на увазі, що супровідний йому оператор \hat{T} фіксовано.

Монотонний і антимонотонний оператори є частинними випадками гетеротонного. Для монотонного оператора за супровідний можна обрати $\hat{T}(v, w) \equiv T(v)$, для антимонотонного – $\hat{T}(v, w) \equiv T(w)$. Саме ці оператори в монотонному і антимонотонном випадках зазвичай маються на увазі під супровідними.

Наступна серія різновидів операторів, що діють в просторі з конусом, пов'язана з характером росту (зміни) значення оператора по відношенню до тих чи інших класів збільшень аргументу. Найбільш важливі (за кількістю застосувань) типи операторів визначаються зростанням значень оператора уздовж променів, що лежать в конусі \mathcal{K} .

Означення 2.29. Оператор $T : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ називається увігнутиим, якщо він u_0 -додатний і для будь-яких $u \in K(u_0)$ та $\tau \in (0, 1)$

$$T(\tau u) \geq \tau T(u), \quad (2.5)$$

причому в (2.5) неможлива рівність.

Отже, для увігнутого оператора T існує такий ненульовий елемент $u_0 \in \mathcal{K}$, що виконуються наступні умови:

а) для будь-якого $u \in \mathcal{K}$ при деякому n справедливі нерівності

$$\alpha u_0 \leq T^n(u) \leq \beta u_0,$$

де $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$;

б) для кожного такого $u \in \mathcal{K}$, що $\alpha_1 u_0 \leq u \leq \beta_1 u_0$ ($\alpha_1 = \alpha_1(u) > 0$, $\beta_1 = \beta_1(u) > 0$), виконуються нерівності

$$T(\tau u) \geq \tau T(u), \quad T(\tau u) \neq \tau T(u),$$

де $\tau \in (0, 1)$.

Можна довести наступні твердження:

а) якщо оператор T увігнутий, то оператор cT , де c – довільне додатне число, також буде увігнутим;

б) якщо оператор T увігнутий і монотонний, то цю властивість матимуть і оператори T^2, T^3, \dots ;

в) якщо оператори T_1 і T_2 увігнуті з однією і тією ж функцією u_0 , то з тією ж функцією u_0 буде увігнутим і оператор $T_1 + T_2$.

Означення 2.30. Увігнутий оператор T називається u_0 -увігнутим, якщо він u_0 -додатний та для будь-яких $u \in K(u_0)$ і $\tau \in (0, 1)$ знайдеться таке $\eta = \eta(u, \tau) > 0$

$$T(\tau u) \geq \tau(1 + \eta)T(u).$$

Можна довести наступні твердження:

а) якщо оператор T u_0 -увігнутий, то оператор cT , де c – довільне додатне число, також буде u_0 -увігнутим;

б) якщо оператор T_1 u_0 -увігнутий, а оператор T_2 увігнутий з тією ж фу-

нкцією u_0 , то оператор $T_1 + T_2$ буде u_0 -увігнутий.

Означення 2.31. Додатний оператор $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ називається опуклим, якщо він u_0 -додатний і для будь-яких $u \in K(u_0)$ і $\tau \in (0, 1)$

$$T(\tau u) \leq \tau T(u), \quad (2.6)$$

причому в (2.6) неможлива рівність.

Означення 2.32. Опуклий оператор T називається u_0 -опуклим, якщо він u_0 -додатний і для будь-яких $u \in K(u_0)$ і $\tau \in (0, 1)$ знайдеться таке $\eta(u, \tau) > 0$, що

$$T(\tau u) \leq \tau[1 - \eta(u, \tau)]T(u).$$

Близьке до увігнутості поняття можна ввести для гетеротонних операторів.

Означення 2.33. Додатний гетеротонний оператор називається псевдоувігнутим, якщо $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$ для будь-яких ненульових $v, w \in \mathcal{K}$ і для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ та $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau \hat{T}(v, w), \quad (2.7)$$

причому в (2.7) неможлива рівність.

Отже, для псевдоувігнутого оператора T існує такий ненульовий елемент $u_0 \in \mathcal{K}$, що виконуються наступні умови:

а) для будь-яких $v, w \in \mathcal{K}$ ($v \neq \theta$, $w \neq \theta$) справедливі нерівності

$$\alpha u_0 \leq \hat{T}(v, w) \leq \beta u_0,$$

де $\alpha = \alpha(v, w) > 0$, $\beta = \beta(v, w) > 0$;

б) для кожних таких $v, w \in K(u_0)$, що $\alpha_1 u_0 \leq v \leq \beta_1 u_0$, $\alpha_2 u_0 \leq w \leq \beta_2 u_0$ ($\alpha_1 = \alpha_1(v) > 0$, $\beta_1 = \beta_1(v) > 0$, $\alpha_2 = \alpha_2(w) > 0$, $\beta_2 = \beta_2(w) > 0$), виконуються нерівності

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau \hat{T}(v, w), \quad \hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \neq \tau \hat{T}(v, w),$$

де $\tau \in (0, 1)$.

Означення 2.34. Псевдоувігнутий оператор T називається u_0 -псевдоувігнутим, якщо для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ и $\tau \in (0, 1)$ можна вказати таке $\eta(v, w, \tau) > 0$, що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geq \tau[1 + \eta(v, w, \tau)]\hat{T}(v, w). \quad (2.8)$$

Зауважимо, що якщо для монотонного оператора T використовується супровідний оператор $\hat{T}(v, w) = T(v)$, то означення псевдоувігнутого (u_0 -псевдоувігнутого) оператора переходить в означення увігнутого (u_0 -увігнутого) оператора.

Псевдоопуклі і u_0 -псевдоопуклі оператори визначаються по аналогії з попередніми.

Означення 2.35. Додатний гетеротонний оператор T називається псевдоопуклим, якщо $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$ для будь-яких ненульових $v, w \in \mathcal{K}$ і для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ та $\tau \in (0, 1)$

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \leq \tau \hat{T}(v, w), \quad (2.9)$$

причому в (2.9) неможлива рівність.

Означення 2.36. Псевдоопуклий оператор T називається u_0 -псевдоопуклим, якщо для будь-яких $v, w \in K(u_0)$ і $\tau \in (0, 1)$ можна вказати таке $\eta(v, w, \tau) > 0$, що

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \leq \tau[1 - \eta(v, w, \tau)]\hat{T}(v, w).$$

2.3 Метод двобічних наближень для рівнянь з гетеротонним u_0 -псевдоувігнутим оператором

Розглядатимемо рівняння

$$u = T(u) \tag{2.10}$$

з додатним нелінійним оператором T , що діє в банаховому просторі \mathcal{U} , напівопорядкованому конусом \mathcal{K} . Нас цікавитимуть умови, за яких це рівняння матиме в конусі \mathcal{K} принаймні один ненульовий розв'язок u^* . Такий розв'язок $u^* \geq \theta$, $u^* \neq \theta$, і називатимемо додатним розв'язком рівняння (2.10). У разі, коли $T(\theta) = \theta$, мова буде йти про інший, відмінний від θ , розв'язок в конусі \mathcal{K} .

Розглянемо спочатку питання існування нерухомої точки у монотонного оператора.

Нехай монотонний оператор T діє в банаховому просторі \mathcal{U} , напівопорядкованому конусом \mathcal{K} .

Означення 2.37. Конусний відрізок $\langle v, w \rangle$ називається інваріантним для монотонного оператора T , якщо виконуються нерівності

$$T(v) \geq v, \quad T(w) \leq w.$$

Отже, інваріантність конусного відрізка $\langle v, w \rangle$ означає, що $T(\langle v, w \rangle) \subset \langle v, w \rangle$.

Нехай ізотонний оператор T має інваріантний конусний відрізок $\langle v, w \rangle$. Розглянемо ітераційний процес

$$u^{(k+1)} = T(u^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Якщо взяти $u^{(0)} = v$, то через інваріантність $\langle v, w \rangle$ отримаємо $T(u^{(0)}) \geq u^{(0)}$, тобто $u^{(1)} \geq u^{(0)}$. Застосовуючи далі до нерівності $T(u^{(0)}) \geq u^{(0)}$ ізотонний оператор T , отримаємо

$$T^2(u^{(0)}) = T(T(u^{(0)})) \geq T(u^{(0)}),$$

тобто $u^{(2)} \geq u^{(1)}$.

Продовжуючи цей процес індуктивно, приходимо до ланцюжку нерівностей

$$v = u^{(0)} \leq T(u^{(0)}) \leq T^2(u^{(0)}) \leq \dots \leq T^k(u^{(0)}) \leq \dots \quad (2.12)$$

Якщо послідовність (2.12) збігається і оператор T неперервний, то в (2.11) можна перейти до границі і зробити висновок про існування нерухомої точки v^* оператора T і про збіжність до неї послідовних наближень (2.11).

Висновок про збіжність (2.12) може базуватися на різних припущеннях. Наприклад, якщо конус \mathcal{K} правильний, то послідовність $\{T^k(u^{(0)})\}$ автоматично збігається, оскільки ця послідовність обмежена за конусом ($T^k(u^{(0)}) \leq w$). Якщо ж конус \mathcal{K} нормальний, то для збіжності (2.12) достатньо повної неперервності оператора T .

Аналогічні міркування можна провести для ітераційного процесу (2.11), що починається в точці $u^{(0)} = w$. Відмінність буде лише в тому, що послідов-

ність $\{T^n(u^{(0)})\}$ буде монотонно спадною:

$$\dots \leq T^k(u^{(0)}) \leq \dots \leq T^2(u^{(0)}) \leq T(u^{(0)}) \leq u^{(0)} = w$$

і збігатиметься, взагалі кажучи, до іншої нерухомої точки w^* оператора T . При цьому очевидно, що для будь-якої нерухомої точки $u^* \in \langle v, w \rangle$ оператора T справедливі нерівності

$$v^* \leq u^* \leq w^*.$$

Якщо ж заздалегідь відомо, що нерухома точка $u^* \in \langle v, w \rangle$ єдина, то обидві послідовності $\{T^k(v)\}$ і $\{T^k(w)\}$ збігатимуться до однієї і тієї ж границі u^* . Звідси можна зробити висновок про збіжність методу послідовних наближень (2.11) до u^* з будь-якої початкової точки $u^{(0)} \in \langle v, w \rangle$. Дійсно, із $v \leq u^{(0)} \leq w$ та ізотонності оператора T випливає, що $T(v) \leq T(u^{(0)}) \leq T(w)$, що при індуктивному продовженні дає $T^k(v) \leq T^k(u^{(0)}) \leq T^k(w)$ при будь-якому $k = 0, 1, 2, \dots$. Оскільки ж крайні послідовності збігаються до однієї і тої ж границі u^* , то і $T^k(u^{(0)}) \rightarrow u^*$ при $k \rightarrow \infty$.

Підсумовуємо сказане в наступному твердженні.

Теорема 2.6 (про існування нерухомої точки у ізотонного оператора). Нехай ізотонний оператор T має інваріантний конусний відрізок $\langle v, w \rangle$ і виконується хоча б одна з умов:

- а) конус \mathcal{K} правильний, оператор T неперервний;
- б) конус \mathcal{K} нормальний, оператор T цілком неперервний.

Тоді послідовні наближення $u^{(k+1)} = T(u^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, збігаються до v^* при $u^{(0)} = v$ і до w^* при $u^{(0)} = w$. Якщо заздалегідь відомо, що нерухома точка $u^* \in \langle v, w \rangle$ єдина, то $u^{(k+1)} = T(u^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, збігаються до u^* з будь-якої початкової точки $u^{(0)} \in \langle v, w \rangle$.

Розглянемо тепер питання існування нерухомої точки у гетеротонного оператора.

Означення 2.38. Конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ називається сильно інваріантним для гетеротонного оператора T , якщо виконуються нерівності

$$\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0, \quad \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0.$$

Очевидно, що з сильної інваріантності $\langle v_0, w_0 \rangle$ випливає його звичайна інваріантність для T . Дійсно, нехай $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$, тоді

$$v_0 \leq \hat{T}(v_0, w_0) \leq \hat{T}(u, u) = T(u) \leq \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0.$$

Введемо таку умову (А) [12]: система рівнянь $\hat{T}(v, w) = v$, $\hat{T}(w, v) = w$ на множині $M \subset \mathcal{U}$ не має розв'язків таких, що $v \neq w$.

Відзначимо, нарешті, що введення у множині пар елементів (v, w) норми $\|(v, w)\|_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} = \|v\| + \|w\|$ робить $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ банаховим простором і дозволяє говорити про неперервність і повну неперервність відображення $\hat{T} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$.

Теорема 2.7 (про існування нерухомої точки у гетеротонного оператора). Нехай $\langle v_0, w_0 \rangle$ – конусний відрізок, сильно інваріантний для гетеротонного оператора T , що діє в банаховому просторі \mathcal{U} , напівупорядкованому конусом \mathcal{K} , та на $\langle v_0, w_0 \rangle$ виконана умова (А). Нехай, крім цього, виконується одна з наступних умів:

- а) конус \mathcal{K} є правильним, оператор T є неперервним;
- б) конус \mathcal{K} є нормальним, оператор T є цілком неперервним.

Тоді у оператора T існує нерухома точка $u^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$.

Доведення. Розглянемо оператор $\tilde{T} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, який парі елементів (v, w) зіставляє пару $(\hat{T}(v, w), \hat{T}(w, v))$. Легко бачити, що якщо оператор T є неперервним (цілком неперервним), то оператор \tilde{T} також є неперервним (цілком

неперервним).

Введемо далі напівопорядкованність в $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ за правилом: $(v', w') \succ (v, w)$, якщо $v' \geq v$, $w' \leq w$. Можна вважати, що напівопорядкованність, що визначається знаком \succ , вводиться за допомогою конуса $\tilde{\mathcal{K}} = \{(v, w) \mid v \in \mathcal{K}, -w \in \mathcal{K}\}$. При цьому очевидно, що правильність та нормальність конуса \mathcal{K} тягне за собою наявність відповідних властивостей у конуса $\tilde{\mathcal{K}}$.

Завершується доведення тепер просто. Очевидно, з $(v', w') \succ (v, w)$ випливає $\tilde{T}(v', w') \succ \tilde{T}(v, w)$, тобто оператор \tilde{T} є ізотонним в просторі $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, напівопорядкованому конусом $\tilde{\mathcal{K}}$. Крім того, \tilde{T} залишає інваріантним конусний відрізок $\langle (v_0, w_0), (w_0, v_0) \rangle = \{(v, w) \mid (v_0, w_0) \prec (v, w) \prec (w_0, v_0)\}$. Тепер з теореми про існування нерухомої точки у ізотонного оператора (теорема 2.6) випливає, що за наших припущень \tilde{T} має нерухому точку (v^*, w^*) , яка, очевидно, є розв'язком системи рівнянь (2.12). Через умову (A) $v^* = w^*$. Отже, оператор T має нерухому точку $u^* = v^* = w^*$. Теорему доведено.

При вивченні збіжності ітераційних процесів вигляду $u^{(k+1)} = T(u^{(k)})$, де T – гетеротонний оператор, зручно розглядати допоміжний ітераційний процес

$$v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}), \quad w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

який починається в точці $(v^{(0)}, w^{(0)}) = (v_0, w_0)$.

Зауважимо, що для гетеротонного оператора T із нерівностей $v_1 \leq v_2 \leq w_2 \leq w_1$ випливає ланцюг нерівностей

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}. \quad (2.14)$$

Нехай конус \mathcal{K} є правильним. Тоді правильним є і конус $\tilde{\mathcal{K}}$, який було введено при доведенні теореми 6.7. У термінах напівопорядкованності \prec ланцюг нерівностей (2.14) запишеться у вигляді

$$(v^{(0)}, w^{(0)}) \prec (v^{(1)}, w^{(1)}) \prec \dots \prec (v^{(k)}, w^{(k)}) \prec \dots \quad (2.15)$$

Отже, через правильність конуса $\tilde{\mathcal{K}}$ існує границя (v^*, w^*) послідовності $\{(v^{(k)}, w^{(k)})\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ у нормі $\|(v, w)\|_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} = \|v\| + \|w\|$, тобто $v^{(k)} \rightarrow v^*$, $w^{(k)} \rightarrow w^*$ у нормі простору \mathcal{U} , причому $v^* \leq w^*$.

Нехай тепер конус \mathcal{K} є нормальним, а оператор \hat{T} – цілком неперервним. Тоді нормальним є і конус $\tilde{\mathcal{K}}$, а цілком неперервним і оператор \tilde{T} .

Через нормальність конуса \mathcal{K} , послідовність (2.15) є монотонною за нормою $\|(v, w)\|_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} = \|v\| + \|w\|$.

Інваріантний для оператора \tilde{T} конусний відрізок $\langle (v_0, w_0), (w_0, v_0) \rangle$ в просторі $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ є обмеженою множиною, яку цілком неперервний оператор \tilde{T} перетворює в компакту (через його замкнутість) множини $\langle (v^{(1)}, w^{(1)}), (w^{(1)}, v^{(1)}) \rangle$. Тоді послідовність (2.15) містить збіжну підпослідовність. З функціонального аналізу відомо, що у монотонній послідовності границі всіх збіжних підпослідовностей співпадають, а також, що компактна послідовність збігається, якщо границі всіх її підпослідовностей однакові. Отже, можна зробити висновок про те, що існує границя (v^*, w^*) послідовності $\{(v^{(k)}, w^{(k)})\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ у нормі $\|(v, w)\|_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} = \|v\| + \|w\|$, тобто $v^{(k)} \rightarrow v^*$, $w^{(k)} \rightarrow w^*$ у нормі простору \mathcal{U} , причому $v^* \leq w^*$.

Далі, якщо оператор \hat{T} є неперервним, то, переходячи в (2.13) до границі при $k \rightarrow \infty$, отримаємо, що v^* , w^* є розв'язком системи (2.12). Тоді, якщо на $\langle v_0, w_0 \rangle$ виконана умова (A), то $v^* = w^*$ і оператор T має на $\langle v_0, w_0 \rangle$ єдину нерухому точку $u^* := v^* = w^*$, до якої збігаються послідовні ітерації $T^k(u)$ при будь-якому $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$.

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 2.8. Нехай $\langle v_0, w_0 \rangle$ – конусний відрізок, сильно інваріантний для гетеротонного оператора T , що діє в банаховому просторі \mathcal{U} , напівупоряд-

кованому конусом \mathcal{K} , на $\langle v_0, w_0 \rangle$ виконана умова (А) і виконана одна із наступних умов:

а) конус \mathcal{K} є правильним;

б) конус \mathcal{K} є нормальним, оператор T є цілком неперервним.

Тоді ітераційний процес (2.13) збігається, тобто $v^{(n)} \rightarrow v^*$, $w^{(n)} \rightarrow w^*$, причому

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}.$$

Із цієї теореми випливає, що для будь-якого $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$ і будь-якого $k = 0, 1, 2, \dots$

$$v^{(k)} \leq T^k(u) \leq w^{(k)}.$$

Крім того, якщо $y_0 \in \langle v_0, w_0 \rangle$, $z_0 \in \langle v_0, w_0 \rangle$ і $y^{(n)} = \hat{T}(y^{(n-1)}, z^{(n-1)})$, $z^{(n)} = \hat{T}(z^{(n-1)}, y^{(n-1)})$, то для будь-якого $n \geq 1$ мають місце нерівності $v^{(n)} \leq y^{(n)} \leq w^{(n)}$, $v^{(n)} \leq z^{(n)} \leq w^{(n)}$.

Зазначимо, що умова (А) автоматично виконується для u_0 -псевдоувігнутих операторів [11, 12].

Кожен розв'язок рівняння $T(u) = u$ є одночасно розв'язком всіх рівнянь $T^2(u) = u$, $T^3(u) = u$, ... і т. д. Тому доведення єдиності розв'язку рівняння $T(u) = u$ рівносильне доведенню єдиності розв'язку у рівняння $T^n(u) = u$ для деякого n . Достатньо, наприклад, довести, що оператор T^2 є u_0 -псевдоувігнутим.

Отже, можна зробити наступні висновки. Нехай цілком неперервний (неперервний) оператор T діє в банаховому просторі \mathcal{U} , напівупорядкованому нормальним (правильним) конусом \mathcal{K} . Крім того, нехай оператор T є гетеротонним із супровідним оператором \hat{T} , для нього існує сильно інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, і для деякого n оператор T^n є u_0 -псевдоувігнутим.

Тоді для знаходження єдиного додатного розв'язку u^* рівняння $u = T(u)$ можна побудувати метод двобічних наближень.

Утворимо дві ітераційні послідовності

$$v^{(n)} = T(v^{(n-1)}), w^{(n)} = T(w^{(n-1)}), n = 1, 2, \dots,$$

де за початкові наближення обрано кінці конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$:

$$v^{(0)} = v_0, w^{(0)} = w_0.$$

З огляду на гетеротонність оператора T та сильну інваріантність конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ буде справджуватися ланцюг нерівностей

$$v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)}.$$

Отже, отримано дві послідовності $\{v^{(n)}\}$, $\{w^{(n)}\}$, які відповідно знизу і зверху наближають шуканий розв'язок u^* . Якщо оператор T є цілком неперервним (неперервним), а конус \mathcal{K} є нормальним (правильним), то обидві послідовності збігаються до u^* у нормі простору \mathcal{U} . З цього отримаємо зручний критерій закінчення ітерацій і апостеріорну оцінку похибки, а саме: якщо за наближений розв'язок операторного рівняння $u = T(u)$ прийняти $u^{(n)} = \frac{v^{(n)} + w^{(n)}}{2}$, то

$$\|u^{(n)} - u^*\| \leq \frac{1}{2} \|w^{(n)} - v^{(n)}\|,$$

а якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітерації слід проводити до виконання нерівності

$$\|w^{(n)} - v^{(n)}\| < 2\varepsilon$$

і з точністю ε можна вважати $u^* \approx u^{(n)}$.

2.4 Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку крайових

задач для рівняння $-u'' = \lambda u^p + \mu u^{-q}$

Розглянемо першу крайову задачу

$$-u'' = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \quad x \in (0,1), \quad (2.16)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (2.17)$$

де $p > 0$, $q > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

Функцію $u^* \in C^2(0,1) \cap C[0,1]$ назовемо класичним розв'язком задачі (2.16), (2.17), якщо u^* задовольняє рівнянню (2.16) та крайовим умовам (2.17).

Функція Гріна оператора $-u''$ за крайових умов (2.17) має вигляд

$$G(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \leq x \leq s, \\ s(1-x), & s < x \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, що функція Гріна $G(x,s)$ неперервна та невід'ємна при $x, s \in [0,1]$.

Задача (2.16), (2.17) еквівалентна інтегральному рівнянню Гамерштейна

$$u(x) = \int_0^1 G(x,s)[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds. \quad (2.18)$$

Якщо задача (2.16), (2.17) має класичний розв'язок, то він також буде і розв'язком інтегрального рівняння (2.18). Якщо ж класичного розв'язку не існує, то на підставі інтегрального рівняння (2.18) введемо поняття узагальненого розв'язку. Отже, узагальненим розв'язком крайової задачі (2.16), (2.17) називатимемо функцію $u^* \in C[0,1]$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (2.18). У

цьому сенсі і розумітимемо еквівалентність крайової задачі (2.16), (2.17) та інтегрального рівняння (2.18).

З рівнянням (2.18) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, що діє у $C[0, 1]$ за правилом

$$T(u) = \int_0^1 G(x, s)[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds. \quad (2.19)$$

Тоді рівняння (2.18) запишеться у вигляді $u = T(u)$. Це рівняння розглядатимемо у банаховому просторі $C[0, 1]$, напівупорядкованому конусом \mathcal{K}_+ невід'ємних на $[0, 1]$ неперервних функцій. Дослідимо властивості оператора T .

Оскільки $G(x, s)[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)] \geq 0$ для всіх $p > 0$, $q > 0$ і $x, s \in [0, 1]$, то $T(u) \geq \theta$ для всіх $u \geq \theta$, а отже, оператор T є додатним.

Права частина рівняння (2.18) $f(x, u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ дозволяє діагональне подання $f(x, u) = \hat{f}(x, u, u)$, де $\hat{f}(x, v, w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$ – неперервна за сукупністю змінних x, v, w невід'ємна функція, що при $p > 0$, $q > 0$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $v, w > 0$, $x \in [0, 1]$. Отже, оператор T при $p > 0$, $q > 0$ є гетеротонним із супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w)(x) = \int_0^1 G(x, s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds. \quad (2.20)$$

Нехай $u_0(x) = \int_0^1 G(x, s)ds = \frac{1}{2}x(1-x)$. Тоді має місце оцінка

$$\varphi(s)u_0(x) \leq G(x, s) \leq \psi(s)u_0(x), \quad (2.21)$$

де $\varphi(s) = 2 \min\{s, 1-s\}$, $\psi(s) = 2$.

З нерівності (2.21) випливає, що для будь-якої $u \in C[0, 1]$ має місце нерівність:

$$\alpha u_0(x) \leq \int_0^1 G(x, s)[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds \leq \beta u_0(x), \quad (2.22)$$

$$\text{де } \alpha = \alpha(u) = 2 \int_0^1 \min\{s, 1-s\}[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds,$$

$$\beta = \beta(u) = 2 \int_0^1 [\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds.$$

Отже, оператор $T \in u_0$ -обмеженим.

Дослідимо оператор T вигляду (2.19) на псевдоугнутість та u_0 -псевдоугнутість з функцією $u_0(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$.

Із нерівності (2.22) випливає, що для будь-яких $v, w \in C[0, 1]$ має місце нерівність

$$\alpha u_0(x) \leq \int_0^1 G(x, s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds \leq \beta u_0(x), \quad (2.23)$$

де

$$\alpha = \alpha(u) = 2 \int_0^1 \min\{s, 1-s\}[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds,$$

$$\beta = \beta(u) = 2 \int_0^1 [\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds,$$

тобто $\hat{T}(v, w) \in K(u_0)$.

Нехай існують $\alpha_1 = \alpha_1(v) > 0$, $\beta_1 = \beta_1(v) > 0$, $\alpha_1 = \alpha_1(w) > 0$, $\beta_1 = \beta_1(w) > 0$ такі, що $\alpha_1 u_0 \leq v \leq \beta_1 u_0$, $\alpha_2 u_0 \leq w \leq \beta_2 u_0$. Розглянемо при $\tau \in (0, 1)$ нерівність $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{T}(v, w)$. Оскільки

$$\begin{aligned} \hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) &= \int_0^1 G(x, s) [\lambda \tau^p v^p(s) + \mu \tau^q w^{-q}(s)] ds - \\ &\quad - \tau \int_0^1 G(x, s) [\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)] ds = \\ &= \int_0^1 G(x, s) [\lambda(\tau^p - \tau) v^p(s) + \mu(\tau^q - \tau) w^{-q}(s)] ds. \end{aligned}$$

Тоді нерівність $\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{T}(v, w)$ буде виконано, якщо $\lambda(\tau^p - \tau) > 0$, $\mu(\tau^q - \tau) > 0$ тобто, з урахуванням умови $\tau \in (0, 1)$, якщо $p, q \in (0, 1)$, а $\lambda, \mu > 0$ – довільні.

Отже, за умови $p, q \in (0, 1)$ оператор \hat{T} є псевдоувігнутим.

Доведемо, що за умови $p, q \in (0, 1)$ оператор \hat{T} також буде і u_0 -псевдоувігнутим.

Нехай $u \in K(u_0)$, $\tau \in (0, 1)$ і $p, q \in (0, 1)$. Тоді з урахуванням нерівності (2.22)

$$\hat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) - \tau \hat{T}(v, w) = \int_0^1 G(x, s) [\lambda(\tau^p - \tau) v^p(s) + \mu(\tau^q - \tau) w^{-q}(s)] ds \geq \alpha_3 u_0(x),$$

де $\alpha_3 = 2 \int_0^1 \min\{s, 1-s\} \lambda(\tau^p - \tau) v^p(s) + \mu(\tau^q - \tau) w^{-q}(s) ds > 0$.

З іншого боку, відповідно до нерівності (2.23), має місце оцінка

$$\int_0^1 G(x, s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds \leq \beta u_0(x),$$

де $\beta = \beta(u) = 2 \int_0^1 \lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s) ds$.

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(x, s)[\lambda \tau^p v^p(s) + \mu \tau^q w^{-q}(s)]ds &\geq \tau \int_0^1 G(x, s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds + \alpha_3 u_0(x) \geq \\ &\geq \tau \int_0^1 G(x, s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds + \frac{\alpha_3}{\beta} \int_0^1 G(x, s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds = \\ &= \tau \left(1 + \frac{\alpha_3}{\beta \tau}\right) \int_0^1 G(x, s)[\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)]ds, \end{aligned}$$

або

$$\hat{T} \left(\tau v, \frac{1}{\tau} w \right) \geq \tau(1 + \eta) \hat{T}(v, w),$$

де $\eta = \eta(u, \tau) = \frac{\alpha}{\beta \tau} > 0$.

Отже, оператор $T \in u_0$ -псевдоувігнутиим.

Кінці сильно інваріантного конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ для оператора T шукатимемо у вигляді

$$v_0 = \alpha u_0, w_0 = \beta u_0. \quad (2.24)$$

Умови сильної інваріантності (означення 2.38) для визначення сталих α і β ($0 < \alpha < \beta$) призводять до нерівностей

$$\alpha \leq \lambda \alpha^p \min_{x \in [0, 1]} \Psi(x) + \mu \beta^{-q} \min_{x \in [0, 1]} \Theta(x), \quad (2.25)$$

$$\beta \geq \lambda \beta^p \max_{x \in [0, 1]} \Psi(x) + \mu \alpha^{-q} \max_{x \in [0, 1]} \Theta(x), \quad (2.26)$$

$$\text{де } \Psi(x) = \int_0^1 \frac{G(x, s) u_0^p(s)}{u_0(x)} ds, \quad \Theta(x) = \int_0^1 \frac{G(x, s) u_0^{-q}(s)}{u_0(x)} ds.$$

Систему нерівностей (2.25), (2.26) запишемо у вигляді

$$(\alpha - \lambda m_1 \alpha^p) \beta^q \leq \mu m_2, \quad (\beta - \lambda M_1 \beta^p) \alpha^q \geq \mu M_2, \quad (2.27)$$

де

$$\begin{aligned} m_1 &= \min_{x \in [0, 1]} \Psi(x) = \Psi(0) = \Psi(1) = 2^{1-p} B(p+1, p+1), \\ M_1 &= \max_{x \in [0, 1]} \Psi(x) = \Psi\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= 2^{2-p} \left(B(p+1, p+2) - 2B_{\frac{1}{2}}(p+1, p+2) \right) + 2^{-3p} B\left(\frac{1}{2}, p+1\right), \\ m_2 &= \min_{x \in [0, 1]} \Theta(x) = \Theta\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= 2^{2+q} \left(B(1-q, 2-q) - 2B_{\frac{1}{2}}(1-q, 2-q) \right) + 2^{3q} B\left(\frac{1}{2}, 1-q\right), \\ M_2 &= \max_{x \in [0, 1]} \Theta(x) = \Theta(0) = \Theta(1) = 2^{1+q} B(1-q, 2-q). \end{aligned}$$

Тут $B(a, b)$ – бета функція, а $B_c(a, b)$ – неповна бета функція:

$$B(a, b) = \int_0^1 s^{a-1} (1-s)^{b-1} ds, \quad B_c(a, b) = \int_0^c s^{a-1} (1-s)^{b-1} ds.$$

Максимальне значення α і мінімальне значення β , які задовольняють системі нерівностей (2.27), є розв'язком відповідної системи рівнянь

$$(\alpha - \lambda m_1 \alpha^p) \beta^q = \mu m_2, (\beta - \lambda M_1 \beta^p) \alpha^q = \mu M_2. \quad (2.28)$$

Сформуємо ітераційний процес за формулами

$$v^{(n)}(x) = \int_0^1 G(x, s) \lambda [v^{(n-1)}(s)]^p + \mu [w^{(n-1)}(s)]^{-q} ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.29)$$

$$w^{(n)}(x) = \int_0^1 G(x, s) \lambda [w^{(n-1)}(s)]^p + \mu [v^{(n-1)}(s)]^{-q} ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.30)$$

$$v^{(0)}(x) = v_0(x) = \alpha u_0(x), \quad w^{(0)}(x) = w_0(x) = \beta u_0(x), \quad (2.31)$$

де $u_0(x) = \frac{1}{2} x(1-x)$.

З огляду на властивості оператора T , можна зробити висновок, що ітераційний процес (2.29) – (2.31) двобічно збігається до єдиного у конусі \mathcal{K}_+ додатного розв'язку u^* крайової задачі (2.16), (2.17). Отже, має місце така теорема.

Теорема 2.9. Крайова задача (2.16), (2.17) для всіх $\lambda > 0$, $\mu > 0$ і $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ має єдиний неперервний на $[-1, 1]$ додатний розв'язок $u^*(x)$, до якого двобічно збігається ітераційний процес (2.29) – (2.31), де числа α і β ($0 < \alpha < \beta$) визначаються як розв'язок системи рівнянь (2.28).

Рівняння (2.16) із крайовими умовами вигляду

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0 \quad (2.32)$$

аналізуємо за аналогічною схемою.

Функція Гріна оператора $-u''$ за крайових умов (2.32) має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq s, \\ s, & s < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\text{Нехай } u_0(x) = \int_0^1 G(x,s)ds = \frac{1}{2}x(2-x).$$

Вивчення властивостей оператора T вигляду (2.19), ядром якого є функція Гріна (2.33), базується на наступній оцінці:

$$\varphi(s)u_0(x) \leq G(x,s) \leq \psi(s)u_0(x), \quad (2.34)$$

$$\text{де } \varphi(s) = \min\{1, 2s\}, \quad \psi(s) = \frac{2}{2-s}.$$

На підставі оцінки (2.34) та з огляду на додатність функції Гріна вигляду (2.33) аналогічно попередньому випадку доводимо, що оператор T вигляду (2.19) з функцією Гріна вигляду (2.33) є додатним, гетеротонним із супровідним оператором \hat{T} вигляду (2.20), псевдоувігнутих та u_0 -псевдоувігнутих, якщо $p, q \in (0, 1)$.

Тоді для знаходження наближеного розв'язку задачі (2.16), (2.32) теж можна побудувати двобічний ітераційний процес. Шукаємо кінці сильно інваріантного конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ для оператора T у вигляді (2.24), де (α, β) ($0 < \alpha < \beta$) – розв'язок системи рівнянь (2.28), при

$$m_1 = \min_{x \in [0,1]} \Psi(x) = \Psi(0) = 2^{p+1} B_{\frac{1}{2}}(p+1, p+1),$$

$$M_1 = \max_{x \in [0,1]} \Psi(x) = \Psi(1) = 2^{p+3} B_{\frac{1}{2}}(p+2, p+1),$$

$$m_2 = \min_{x \in [0,1]} \Theta(x) = \Theta(1) = 2^{3-q} B_{\frac{1}{2}}(2-q, 1-q),$$

$$M_2 = \max_{x \in [0,1]} \Theta(x) = \Theta(0) = 2^{1-q} B_{\frac{1}{2}}(1-q, 1-q).$$

З огляду на властивості оператора T , можна зробити висновок, що ітераційний процес (2.29) – (2.31) двобічно збігається до єдиного у конусі \mathcal{K}_+ додатного розв'язку u^* крайової задачі (2.16), (2.32).

Рівняння (2.16) із крайовими умовами вигляду

$$u'(0) - u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (2.35)$$

теж аналізуємо за аналогічною схемою.

Функція Гріна оператора $-u''$ за крайових умов (2.35) має вигляд

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)(1-s), & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{1}{2}(s+1)(1-x), & s < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\text{Нехай } u_0(x) = \int_0^1 G(x, s) ds = \frac{1}{4}(1-x)(1+2x).$$

Вивчення властивостей оператора T вигляду (2.12), ядром якого є функція Гріна (2.36), базується на наступній оцінці функції Гріна:

$$\varphi(s)u_0(x) \leq G(x, s) \leq \psi(s)u_0(x), \quad (2.37)$$

$$\text{де } \varphi(s) = 2 \min \{1-s, \frac{1}{3}(s+1)\}, \quad \psi(s) = 2 \frac{s+1}{2s+1}.$$

На підставі оцінки (2.37) та з огляду на додатність функції Гріна вигляду (2.36) аналогічно попереднім випадкам доводимо, що оператор T вигляду (2.12) з функцією Гріна вигляду (2.36) є додатним, гетеротонним, псевдоувігнутим та u_0 -псевдоувігнутим, якщо $p, q \in (0, 1)$.

Тоді для знаходження наближеного розв'язку задачі (2.16), (2.35) теж можна побудувати двобічний ітераційний процес. Шукаємо кінці інваріантного конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ для оператора T у вигляді (2.24), де (α, β) ($0 < \alpha < \beta$) – розв'язок системи рівнянь (2.28). Для цієї крайової задачі не вдалося отримати вирази для Ψ і Θ в загальному вигляді, тому значення констант

m_1, M_1, m_2, M_2 знаходимо чисельно як відповідні мінімуми або максимуми:

$$m_1 = \min_{x \in [0,1]} \Psi(x), \quad M_1 = \max_{x \in [0,1]} \Psi(x),$$

$$m_2 = \min_{x \in [0,1]} \Theta(x), \quad M_2 = \max_{x \in [0,1]} \Theta(x).$$

З огляду на властивості оператора T , можна зробити висновок, що ітераційний процес (2.29) – (2.31) двобічно збігається до єдиного у конусі \mathcal{K}_+ додатного розв'язку u^* крайової задачі (2.16), (2.35).

Таким чином, встановлено, що рівняння (2.16) з кожними з крайових умов (2.17), (2.32) чи (2.35) для кожних $\lambda, \mu > 0$ та $0 < p, q < 1$ має єдиний неперервний додатний (узагальнений) розв'язок, який може бути знайдений з двобічними наближеннями до нього. Аналогічно можуть бути проаналізовані й інші комбінації крайових умов за винятком другої крайової задачі, коли $u'(0) = 0, u'(l) = 0$.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica

Mathematica – система комп'ютерної алгебри, що була розроблена Стівеном Вольфрамом, в подальшому – компанією Wolfram Research. На сьогодні система широко використовується в наукових, інженерних, математичних та комп'ютерних областях. Вона містить багато функцій як для аналітичних перетворень, так і для чисельних розрахунків. Крім того, програма підтримує роботу з графікою і звуком, включаючи побудову дво- і тривимірних графіків функцій, малювання довільних геометричних фігур, імпорт та експорт зображень і звуку.

Крім цього, Mathematica – це інтерпретована мова функціонального програмування. Mathematica підтримує процедурне програмування з використанням стандартних операторів керування виконанням програми (цикли і умовні переходи) і об'єктно-орієнтований підхід. Mathematica допускає відкладені обчислення. Також в системі Mathematica можна задавати правила роботи з тими чи іншими виразами.

Пакет Mathematica є найбільш розвиненою системою символьних і чисельних обчислень. Програми, написані за допомогою вбудованого в пакет мови програмування, короткі і дуже ефективні. Тому для розв'язання поставлених задач серед інших середовищ розробки і систем комп'ютерної алгебри був обраний саме пакет Mathematica.

3.2 Опис програми

Програмна реалізація методу двобічних наближень була виконана у системі комп'ютерної алгебри Mathematica 11.

Перший блок програми «Input» відповідає за задавання вихідних даних задачі: вигляд крайових умов, значення параметрів λ і μ . Також у цьому блоці

можна настроїти точність розрахунків, шаг сітки для інтерполяції та чисельного інтегрування та параметри для сітки по p і q . Директорія для збереження файлів з результатами теж вказується у цьому блоку.

Другий блок «Function definitions» містить визначення функцій і має дві частини: «AlphaBetaCalculations» та «Method». Перша частина блоку відповідає за пошук сильно інваріантного конусного відрізка $\langle \alpha u_0, \beta v_0 \rangle$. Тут будуються та розв'язуються нерівності для визначення множини можливих значень α і β , щоб автоматично обирати оптимальні значення для α і β . Друга частина блоку призначена для визначення ітераційного циклу методу двобічних наближень, у якому будуються двобічні наближення до розв'язку поставленої задачі. Крім власне визначення функції для ітераційного циклу, тут знаходиться визначення функції для оператора T , а також всіх функцій, необхідних для цього.

У останньому блоці «Main loop» міститься цикл, який методом двобічних наближень знаходить наближений розв'язок задачі, що була вказана у блоці «Input», для кожної пари параметрів p і q із сітки. Так будується залежність розв'язку задачі від параметрів.

Код програми наведено в додатку А.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Обчислювальний експеримент було проведено для рівняння

$$-u'' = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \quad x \in (0, 1), \quad (4.1)$$

де $p, q \in (0, 1)$, $\lambda, \mu > 0$, із трьома наборами крайових умов:

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (4.2)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \quad (4.3)$$

$$u'(0) - u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (4.4)$$

Кожна з розглядуваних задач еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \int_0^1 G(x, s) [\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)] ds. \quad (4.5)$$

Вигляд функції Гріна $G(x, s)$ для різних типів крайових умов наведено в таблиці 4.1.

З рівнянням (4.5) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, який діє у $C[0, 1]$ за правилом

$$T(u) = \int_0^1 G(x, s) [\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)] ds.$$

Простір $C[0, 1]$ вважатимемо напівупорядкованим конусом \mathcal{K}_+ невід'ємних на $[0, 1]$ неперервних функцій.

Таблиця 4.1 – Функція Гріна оператора $-u''$ для різних типів крайових умов

№	Крайові умови при		Вигляд функції Гріна $G(x, s)$	Функція $u_0(x) = \int_0^1 G(x, s)ds$
	$x = 0$	$x = 1$		
1.	$u(0) = 0$	$u(1) = 0$	$\begin{cases} x(1-s), & 0 \leq x \leq s, \\ s(1-x), & s < x \leq 1. \end{cases}$	$\frac{x(1-x)}{2}$
2.	$u(0) = 0$	$u'(1) = 0$	$\begin{cases} x, & 0 \leq x \leq s, \\ s, & s < x \leq 1. \end{cases}$	$\frac{x(2-x)}{2}$
3.	$u'(0) - u(0) = 0$	$u(1) = 0$	$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)(1-s), & 0 \leq x \leq s, \\ \frac{1}{2}(s+1)(1-x), & s < x \leq 1. \end{cases}$	$\frac{(1-x)(1+2x)}{4}$

Оператор T має такий вигляд:

а) для крайової задачі (4.1), (4.2)

$$T(u) = \left(\int_0^x s(1-x)[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds + \int_x^1 x(1-s)[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds \right);$$

б) для крайової задачі (4.1), (4.3)

$$T(u) = \left(\int_0^x s[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds + \int_x^1 x[\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds \right);$$

в) для крайової задачі (4.1), (4.4)

$$T(u) = \left(\int_0^x \frac{(s+1)(1-x)}{2} [\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)]ds + \right.$$

$$+ \int_x^1 \frac{(x+1)(1-s)}{2} [\lambda u^p(s) + \mu u^{-q}(s)] ds \Bigg\}.$$

При довільних $\lambda, \mu > 0$ кожен з цих операторів T є додатним, u_0 -додатним, псевдоувігнутих, а за умови $p, q \in (0, 1)$ ще й u_0 -псевдоувігнутих.

Права частина рівняння (4.1) $f(u) = \lambda u^p(x) + \mu u^{-q}(x)$ дозволяє діагональне подання у вигляді $\hat{f}(v, w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$. Отже, оператор T є гетеротонним оператором із супровідним оператором вигляду

$$\hat{T}(v, w) = \int_0^1 G(x, s) [\lambda v^p(s) + \mu w^{-q}(s)] ds.$$

Необхідно зауважити, що при $\mu = 0$ або $\lambda = 0$ маємо частинний випадок, за якого оператор T буде монотонним або антимонотонним відповідно.

Ітераційний процес сформуємо за формулою

$$v^{(k+1)} = T(v^{(k)}, w^{(k)}), \quad w^{(k+1)} = T(w^{(k)}, v^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для того щоб знайти початкове наближення $v^{(0)}, w^{(0)}$ для кожної крайової задачі, у конусі \mathcal{K}_+ виділяємо сильно інваріантний конусний відрізок $\langle \alpha u_0, \beta u_0 \rangle$. Вигляд функції $u_0(x)$ наведено у таблиці 4.1. Тоді маємо $v^{(0)} = \alpha u_0, w^{(0)} = \beta u_0$, де α, β знаходяться як розв'язок системи рівнянь (2.28).

Значення похибки $\|u^* - u^{(k)}\|$ на k -й ітерації оцінюється величиною $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x))$. Розглядаючи відношення $\gamma_k = \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$, можна зробити висновок про швидкість збіжності ітераційної послідовності. Якщо для різних k значення γ_k близькі до деякого числа γ , то можна казати про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності із показником γ .

Обчислювальний експеримент для задачі (4.1) і кожними з крайових умов

(4.2), (4.3), (4.4) було проведено при $\lambda = 1$, $\mu = 1$ і значеннях $p = 0, 1, 0, 2, \dots, 0, 9$, $q = 0, 1, 0, 2, \dots, 0, 9$. Ітерації проводилися до досягнення точності $\varepsilon = 10^{-5}$.

Опишемо деталі обчислювального процесу для задач із деякими фіксованими значеннями параметрів. Наприклад, у випадку крайових умов (4.2) при $p = 0, 5$, $q = 0, 5$ отримано, що система нерівностей для визначення α і β , які визначають кінці інваріантного конусного відрізка, має вигляд

$$(\alpha - m_1\sqrt{\alpha})\sqrt{\beta} \leq m_2, (\beta - M_1\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha} \geq M_2, \quad (4.6)$$

де

$$m_1 = \sqrt{2}B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0,27768,$$

$$M_1 = \sqrt{2}\left(B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) - 2B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0,31966,$$

$$m_2 = 4\sqrt{2}\left(B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - 2B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) + 2\sqrt{2}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3,22891,$$

$$M_2 = 2\sqrt{2}B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 4,44288.$$

Область площини змінних α , β , що визначається нерівностями (4.6), наведена на рис. 4.1. Як бачимо з рис. 4.1, найбільше значення α і найменше значення β , що задовольняють нерівностям (4.6), є розв'язком відповідної (4.6) системи рівнянь. Отже, було обрано $\alpha = 2,08032$, $\beta = 3,69479$.

Збіжність с точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ було отримано на дев'ятій ітерації. На рис. 4.2 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень (пунктирна лінія), $k = 0, 1, 2, \dots, 9$, а в таблиці 4.2 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(9)}(x)$ в точках $x_i = 0, 2i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

У таблиці 4.3 наведені значення оцінок похибок ε_k та відношення γ_k ,

$k = 0, 1, 2, \dots, 9$. Розглядаючи відношення γ_k , маємо $\gamma_k \approx 0,33$, що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з цим показником.

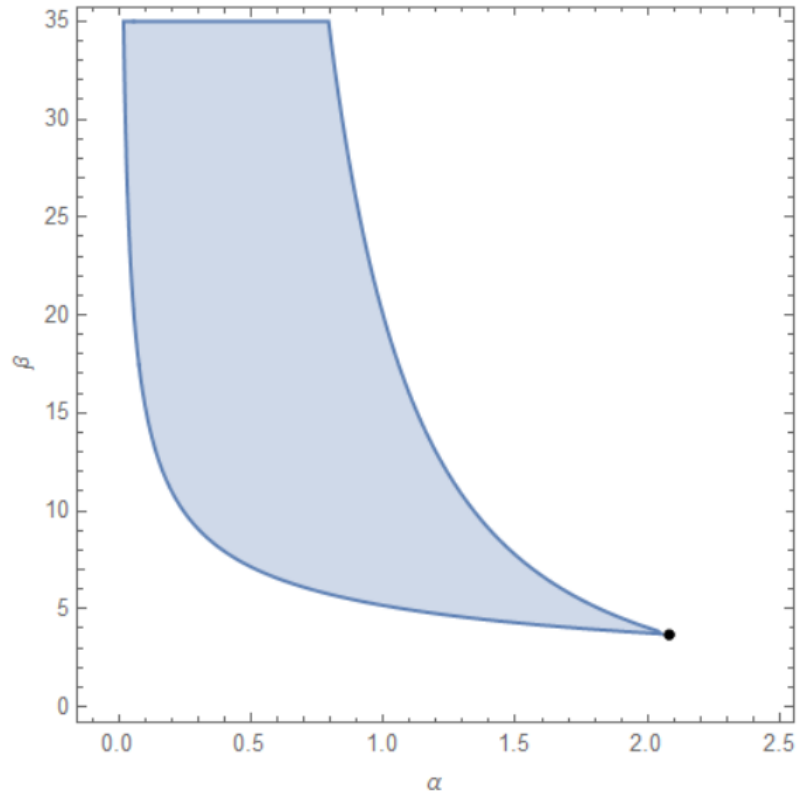


Рисунок 4.1 – Множина розв'язків системи (4.6) для задачі (4.1), (4.2)

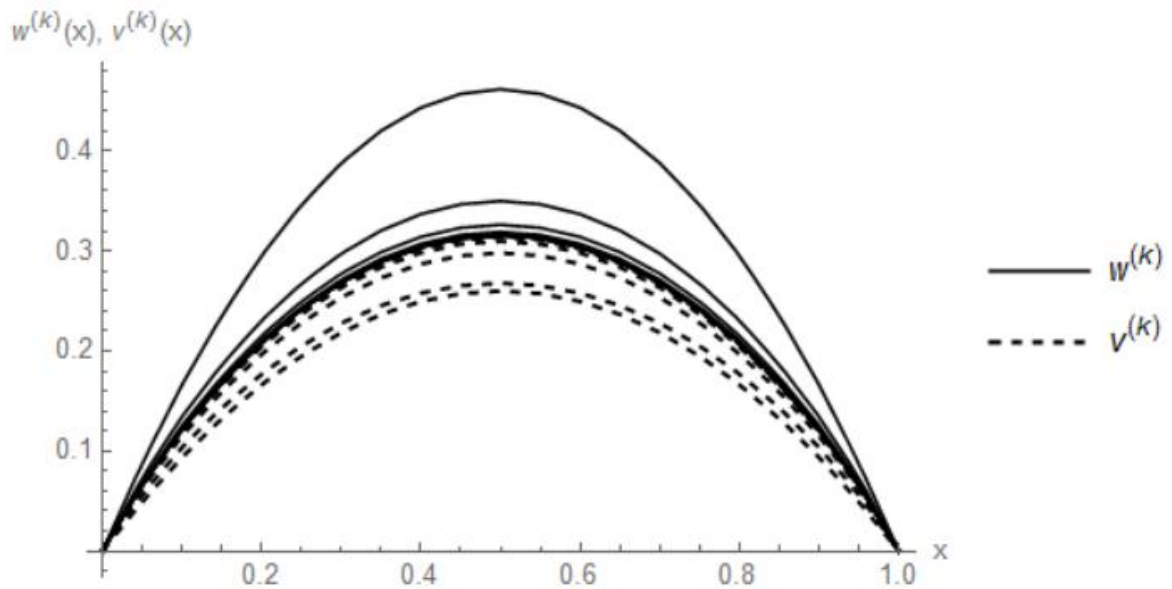


Рисунок 4.2 – Графіки $w^{(k)}(x)$ і $v^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 9$

Таблиця 4.2 – Значення наближеного розв'язку $u^{(9)}(x)$ у точках $x_i = 0, 2i$

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$u^{(9)}$	0,0	0,20847	0,30394	0,30394	0,20857	0,0

Таблиця 4.3 – Значення оцінок похибок ε_k та відношень γ_k

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ε_k	$4,11 \cdot 10^{-2}$	$1,41 \cdot 10^{-2}$	$4,66 \cdot 10^{-3}$	$1,53 \cdot 10^{-3}$	$5,02 \cdot 10^{-4}$	$1,64 \cdot 10^{-4}$	$5,38 \cdot 10^{-4}$	$1,76 \cdot 10^{-5}$	$5,77 \cdot 10^{-6}$
γ_k	0,407	0,330	0,331	0,328	0,328	0,328	0,328	0,328	0,328

Залежність норми наближеного розв'язку задачі (4.1), (4.2) від параметрів p та q при $\lambda = 1$, $\mu = 1$ представлено на рис. 4.3.

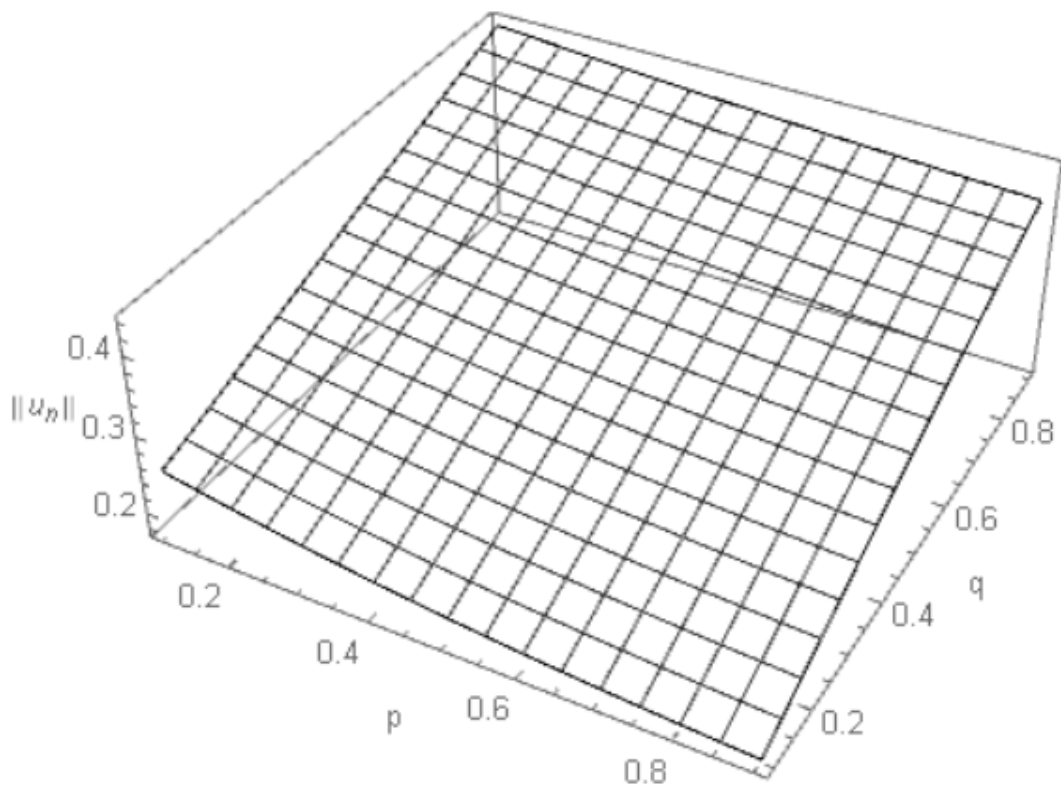


Рисунок 4.3 – Залежність норми наближеного розв'язку задачі (4.1), (4.2) від параметрів p , q ($\lambda = 1$, $\mu = 1$)

Таблиця 4.4 містить дані про значення α і β , кількість зроблених ітерацій n , норму знайденого наближеного розв'язку $\|u^{(n)}\| = \max_{x \in [0,1]} u^{(n)}(x)$, оцінки аб-

солотної та відносної похибки $\varepsilon = \varepsilon_n$ та $\delta = \delta_n = \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}$ відповідно, оцінку показника швидкості збіжності γ .

Таблиця 4.4 – Результати обчислювального експерименту для задачі (4.1), (4.2) для деяких значень p і q ($\lambda = 1, \mu = 1$)

p	q	α	β	n	$\ u_n\ $	ε	δ	γ
0,2	0,2	2,03251	2,25556	4	0,26295	$0,389 \cdot 10^{-5}$	$0,148 \cdot 10^{-2} \%$	0,122
0,2	0,4	2,32567	3,06437	6	0,31424	$0,247 \cdot 10^{-5}$	$0,786 \cdot 10^{-3} \%$	0,178
0,2	0,6	2,31403	4,73439	9	0,36449	$0,320 \cdot 10^{-5}$	$0,877 \cdot 10^{-3} \%$	0,292
0,2	0,8	1,50036	13,01360	15	0,41265	$0,641 \cdot 10^{-5}$	$0,155 \cdot 10^{-2} \%$	0,467
0,4	0,2	1,82623	2,08229	5	0,23953	$0,303 \cdot 10^{-5}$	$0,126 \cdot 10^{-2} \%$	0,172
0,4	0,4	2,12635	2,97699	7	0,29546	$0,411 \cdot 10^{-5}$	$0,139 \cdot 10^{-2} \%$	0,245
0,4	0,6	2,05337	4,91792	11	0,34920	$0,430 \cdot 10^{-5}$	$0,123 \cdot 10^{-2} \%$	0,373
0,4	0,8	1,05407	17,10880	20	0,40000	$0,684 \cdot 10^{-5}$	$0,171 \cdot 10^{-2} \%$	0,562
0,6	0,2	1,68921	1,94992	5	0,22221	$0,564 \cdot 10^{-5}$	$0,254 \cdot 10^{-2} \%$	0,194
0,6	0,4	1,98995	2,90386	8	0,28110	$0,314 \cdot 10^{-5}$	$0,112 \cdot 10^{-2} \%$	0,281
0,6	0,6	1,86260	5,08764	12	0,33716	$0,813 \cdot 10^{-5}$	$0,241 \cdot 10^{-2} \%$	0,425
0,6	0,8	0,71934	23,21480	25	0,38976	$0,756 \cdot 10^{-5}$	$0,194 \cdot 10^{-2} \%$	0,629
0,8	0,2	1,60125	1,85260	5	0,20999	$0,565 \cdot 10^{-5}$	$0,269 \cdot 10^{-2} \%$	0,194
0,8	0,4	1,90030	2,84062	8	0,27044	$0,479 \cdot 10^{-5}$	$0,177 \cdot 10^{-2} \%$	0,295
0,8	0,6	1,73159	5,21843	13	0,32785	$0,874 \cdot 10^{-5}$	$0,267 \cdot 10^{-2} \%$	0,455
0,8	0,8	0,50649	31,05080	29	0,38158	$0,996 \cdot 10^{-5}$	$0,261 \cdot 10^{-2} \%$	0,674

Як бачимо з таблиці 4.4 як з ростом p , так і з ростом q збіжність ітераційного процесу уповільнюється, сильно інваріантний конусний відрізок стає більш розмитим, а норма розв'язку задачі (4.1), (4.2) збільшується.

У випадку крайових умов (4.3) при $p = 0,5, q = 0,5$ отримано, що система нерівностей для визначення α і β , які визначають кінці інваріантного конусного відрізка, має вигляд (4.6), де

$$m_1 = 2\sqrt{2}B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0,5536, \quad M_1 = 8\sqrt{2}B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0,63932,$$

$$m_2 = 4\sqrt{2}B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1,61446, \quad M_2 = \sqrt{2}B_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2,22144.$$

Область площини змінних α , β , що визначається нерівностями (4.6), наведена на рис. 4.4. Як бачимо з рис. 4.4, найбільше значення α і найменше значення β , що задовольняють нерівностям (4.6), є розв'язком відповідної (4.6) системи рівнянь. Отже було обрано $\alpha = 1,69205$, $\beta = 2,77223$.

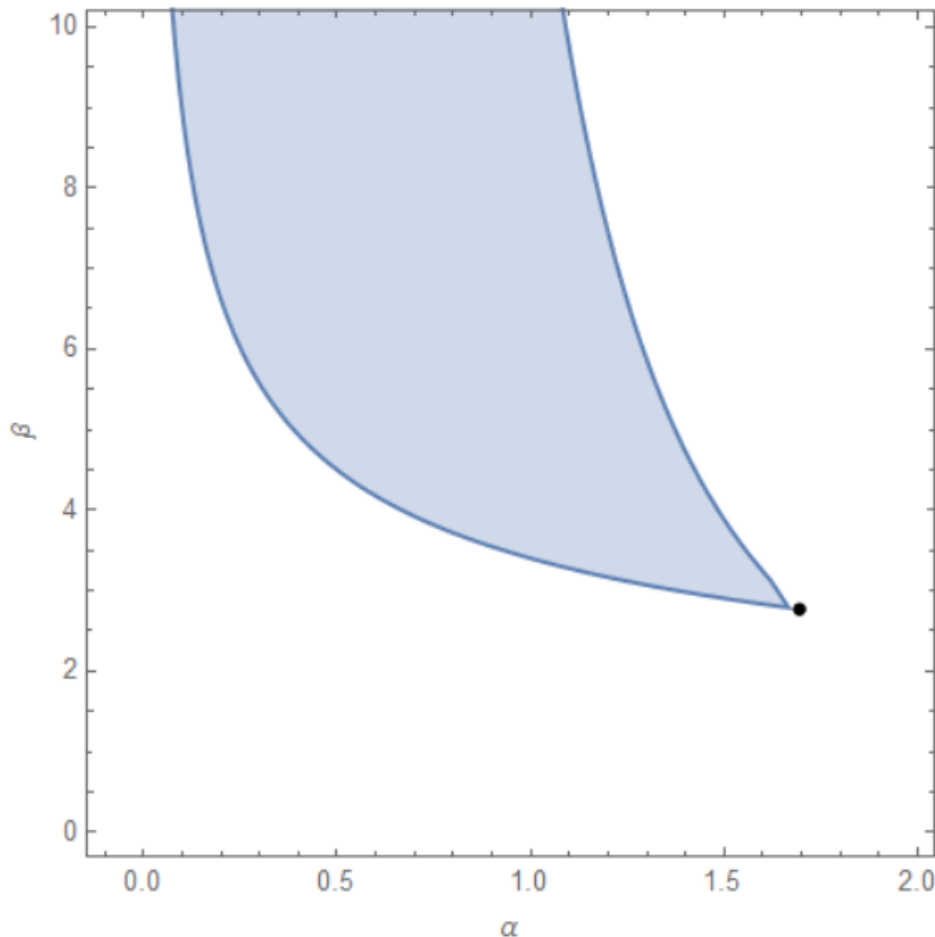


Рисунок 4.4 – Множина розв'язків системи (4.6) для задачі (4.1), (4.3)

Збіжність с точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ було отримано на дванадцятій ітерації. На

рис. 4.5 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень (пунктирна лінія), $k = 0, 1, 2, \dots, 12$, а в таблиці 4.5 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(12)}(x)$ в точках $x_i = 0,2i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

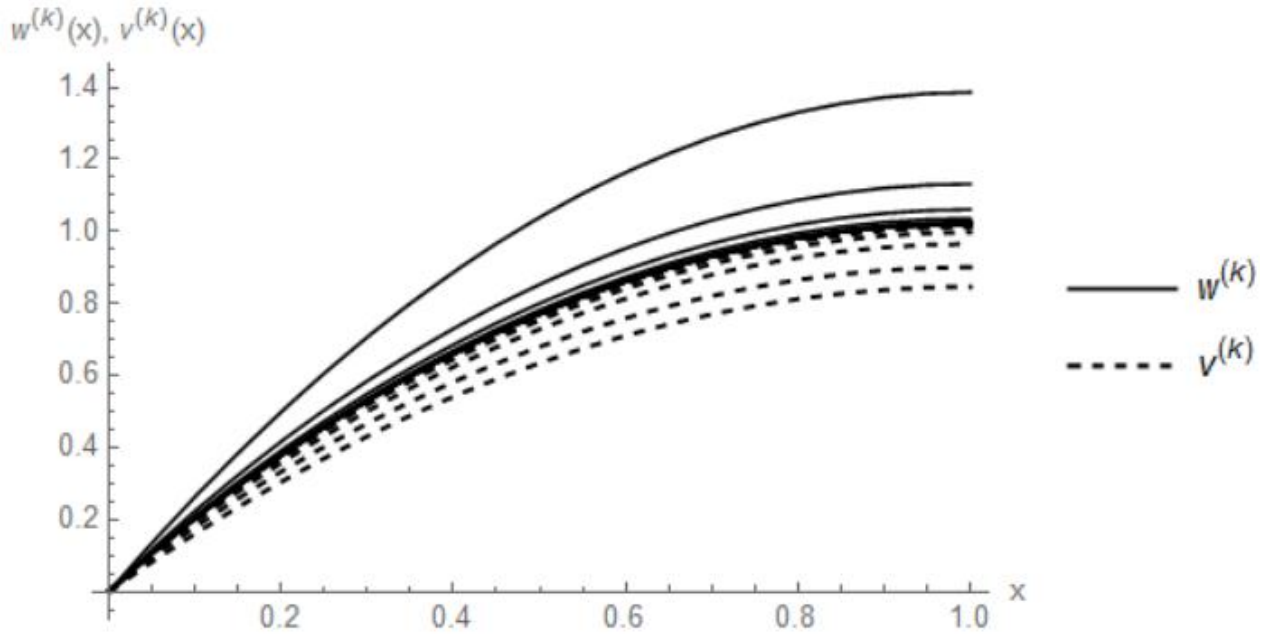


Рисунок 4.5 – Графіки $w^{(k)}(x)$ і $v^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 12$

Таблиця 4.5 – Значення наближеного розв'язку $u^{(12)}(x)$

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$u^{(12)}$	0	0,37769	0,66023	0,86057	0,98059	1,02059

У таблиці 4.6 наведені значення оцінок похибок ε_k та відношення γ_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 12$. Розглядаючи відношення γ_k , маємо $\gamma_k \approx 0,40$, що свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з цим показником.

Таблиця 4.6 – Значення оцінок похибок ε_k та відношень γ_k

k	1	2	3	4	5	6
ε_k	$1,15 \cdot 10^{-1}$	$4,78 \cdot 10^{-2}$	$1,93 \cdot 10^{-2}$	$7,67 \cdot 10^{-3}$	$3,04 \cdot 10^{-3}$	$1,20 \cdot 10^{-3}$
γ_k	0,427	0,414	0,403	0,398	0,398	0,396
k	7	8	9	10	11	12

ε_k	$4,74 \cdot 10^{-4}$	$1,87 \cdot 10^{-4}$	$7,41 \cdot 10^{-5}$	$2,93 \cdot 10^{-5}$	$1,15 \cdot 10^{-5}$	$4,57 \cdot 10^{-6}$
γ_k	0,395	0,395	0,395	0,395	0,395	0,395

Залежність норми наближеного розв'язку задачі (4.1), (4.3) від параметрів p та q при $\lambda = 1$, $\mu = 1$ представлено на рис. 4.6.

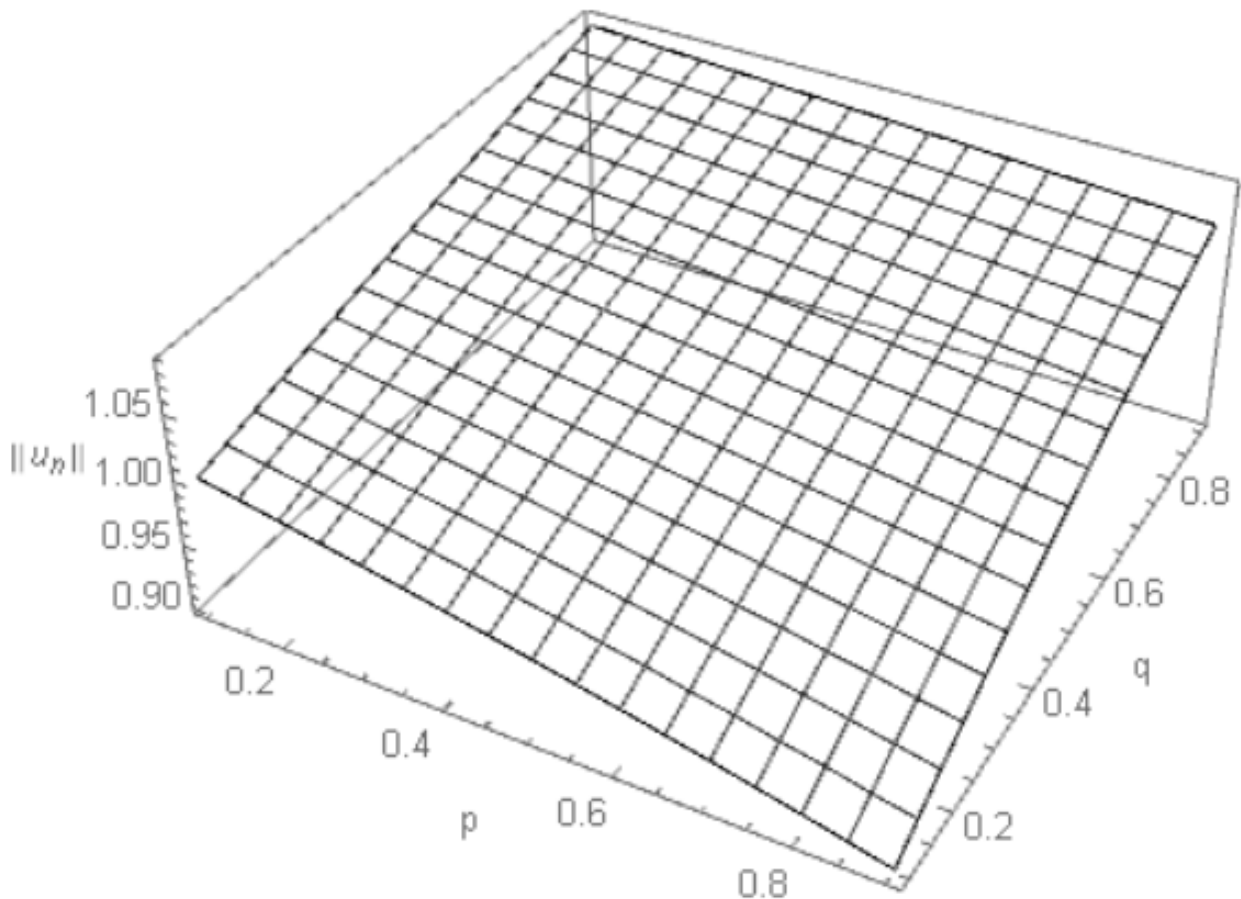


Рисунок 4.6 – Залежність норми наближеного розв'язку задачі (4.1), (4.3) від параметрів p , q ($\lambda = 1$, $\mu = 1$)

Таблиця 4.7 містить дані про значення α і β , кількість зроблених ітерацій n , норму знайденого наближеного розв'язку $\|u^{(n)}\| = \max_{x \in [0,1]} u^{(n)}(x)$, оцінки абсолютної та відносної похибки $\varepsilon = \varepsilon_n$ та $\delta = \delta_n = \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}$ відповідно, оцінку показника швидкості збіжності γ .

Як бачимо з таблиці 4.7 для задачі (4.1), (4.3) теж як з ростом p , так і з ростом q збіжність ітераційного процесу уповільнюється, сильно інваріантний конусний відрізок стає більш розмитим, а норма розв'язку збільшується.

Таблиця 4.7 – Результати обчислювального експерименту для задачі (4.1), (4.3) для деяких значень p і q ($\lambda = 1$, $\mu = 1$)

p	q	α	β	n	$\ u_n\ $	ε	δ	γ
0,2	0,2	1,92504	2,12814	5	1,00345	$0,311 \cdot 10^{-5}$	$0,311 \cdot 10^{-3} \%$	0,139
0,2	0,4	1,91710	2,40460	6	1,02821	$0,448 \cdot 10^{-5}$	$0,727 \cdot 10^{-3} \%$	0,187
0,2	0,6	1,80217	2,99654	8	1,05109	$0,804 \cdot 10^{-5}$	$0,765 \cdot 10^{-3} \%$	0,258
0,2	0,8	1,41892	5,28808	12	1,07258	$0,428 \cdot 10^{-5}$	$0,399 \cdot 10^{-3} \%$	0,358
0,4	0,2	1,82633	2,11185	7	0,98364	$0,347 \cdot 10^{-5}$	$0,353 \cdot 10^{-3} \%$	0,239
0,4	0,4	1,80808	2,44177	9	1,01343	$0,392 \cdot 10^{-5}$	$0,387 \cdot 10^{-3} \%$	0,300
0,4	0,6	1,65161	3,17065	12	1,04025	$0,455 \cdot 10^{-5}$	$0,438 \cdot 10^{-3} \%$	0,384
0,4	0,8	1,16725	6,27719	17	1,06491	$0,656 \cdot 10^{-5}$	$0,616 \cdot 10^{-3} \%$	0,493
0,6	0,2	1,73399	2,09687	9	0,96217	$0,460 \cdot 10^{-5}$	$0,478 \cdot 10^{-3} \%$	0,331
0,6	0,4	1,70068	2,49448	12	0,99779	$0,433 \cdot 10^{-5}$	$0,435 \cdot 10^{-3} \%$	0,404
0,6	0,6	1,48762	3,42348	16	1,02903	$0,747 \cdot 10^{-5}$	$0,726 \cdot 10^{-3} \%$	0,498
0,6	0,8	0,87206	8,15306	25	1,05715	$0,751 \cdot 10^{-5}$	$0,711 \cdot 10^{-3} \%$	0,616
0,8	0,2	1,64622	2,08314	11	0,93875	$0,714 \cdot 10^{-5}$	$0,761 \cdot 10^{-3} \%$	0,414
0,8	0,4	1,59122	2,57061	15	0,98110	$0,804 \cdot 10^{-5}$	$0,820 \cdot 10^{-3} \%$	0,499
0,8	0,6	1,30034	3,82562	22	1,01728	$0,959 \cdot 10^{-5}$	$0,943 \cdot 10^{-3} \%$	0,603
0,8	0,8	0,53122	12,86080	39	1,04919	$0,906 \cdot 10^{-5}$	$0,863 \cdot 10^{-3} \%$	0,730

У випадку крайових умов (4.3) при $p = 0,5$, $q = 0,5$ отримано, що система нерівностей для визначення α і β , які визначають кінці інваріантного конусного відрізка, має вигляд (4.6), де

$$m_1 = \min_{x \in [0, 1]} \Psi(x) = 0,376314, \quad M_1 = \max_{x \in [0, 1]} \Psi(x) = 0,439584,$$

$$m_2 = \min_{x \in [0,1]} \Theta(x) = 0,376314, \quad M_2 = \max_{x \in [0,1]} \Theta(x) = 3,283730.$$

Область площини змінних α , β , що визначається нерівностями (4.6), наведена на рис. 4.7. Як бачимо з рис. 4.7, найбільше значення α і найменше значення β , що задовольняють нерівностям (4.6), є розв'язком відповідної (4.6) системи рівнянь. Отже, було обрано $\alpha = 1,78710$, $\beta = 3,24867$.

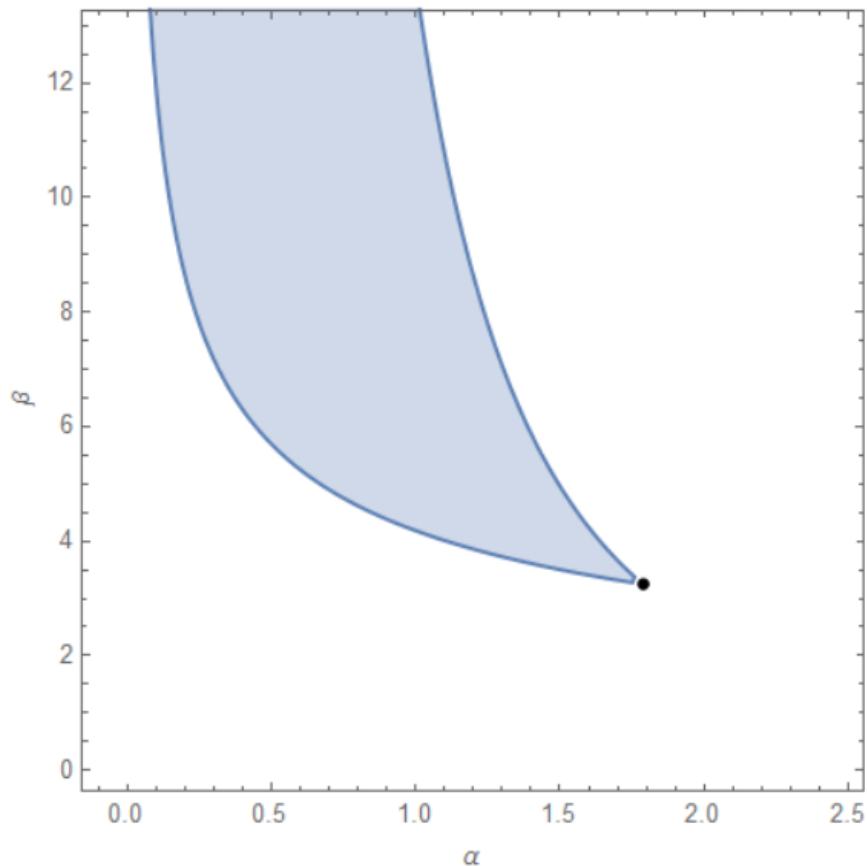


Рисунок 4.7 – Множина розв'язків системи (4.6) для задачі (4.1), (4.3)

Збіжність с точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ було отримано на десятій ітерації. На рис. 4.8 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень (пунктирна лінія), $k = 0, 1, 2, \dots, 10$, а в таблиці 4.8 наведено значення наближеного розв'язку $u^{(10)}(x)$ в точках $x_i = 0,2i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

У таблиці 4.9 наведені значення оцінок похибок ε_k та відношення γ_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 10$. Розглядаючи відношення γ_k , маємо $\gamma_k \approx 0,36$, що свідчить про

геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з цим показником.

Залежність норми наближеного розв'язку задачі (4.1), (4.4) від параметрів p та q при $\lambda = 1$, $\mu = 1$ представлено на рис. 4.9.

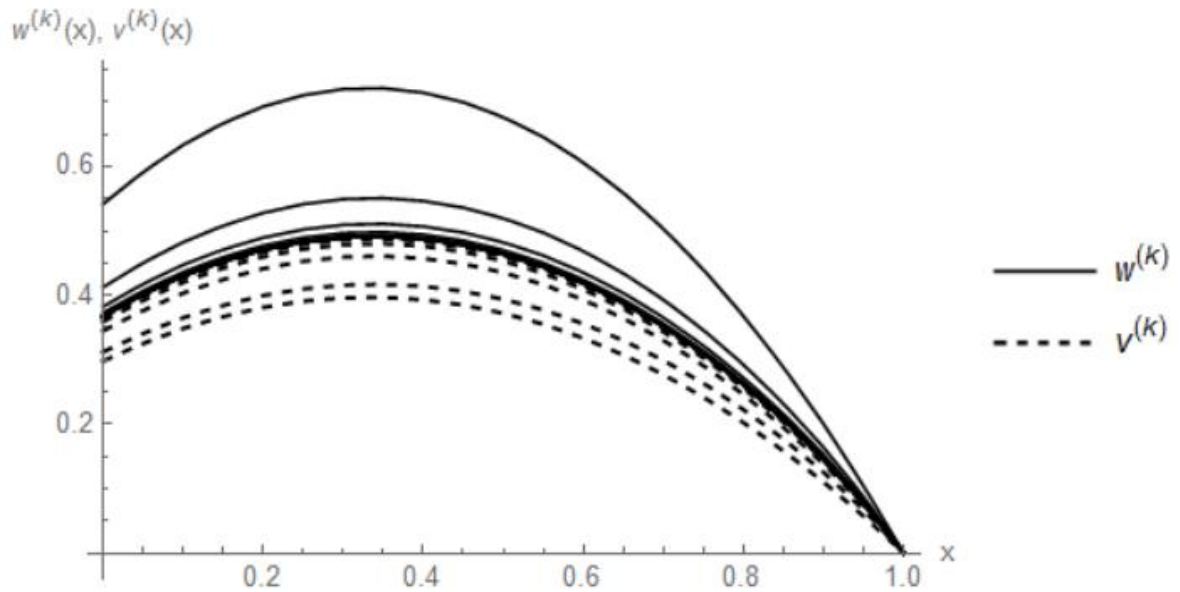


Рисунок 4.8 – Графіки $w^{(k)}(x)$ і $v^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$

Таблиця 4.8 – Значення наближеного розв'язку $u^{(10)}(x)$

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$u^{(10)}$	0,36765	0,47060	0,48748	0,41890	0,26200	0

Таблиця 4.9 – Значення оцінок похибок ε_k та відношень γ_k

k	1	2	3	4	5
ε_k	$6,68 \cdot 10^{-2}$	$2,51 \cdot 10^{-2}$	$9,07 \cdot 10^{-3}$	$3,25 \cdot 10^{-3}$	$1,16 \cdot 10^{-3}$
γ_k	0,412	0,375	0,358	0,357	0,357
k	6	7	8	9	10
ε_k	$4,13 \cdot 10^{-4}$	$1,47 \cdot 10^{-4}$	$5,25 \cdot 10^{-5}$	$1,87 \cdot 10^{-5}$	$6,66 \cdot 10^{-6}$
γ_k	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356

Таблиця 4.10 містить дані про значення α і β , кількість зроблених ітера-

цій n , норму знайденого наближеного розв'язку $\|u^{(n)}\| = \max_{x \in [0,1]} u^{(n)}(x)$, оцінки абсолютної та відносної похибки $\varepsilon = \varepsilon_n$ та $\delta = \delta_n = \frac{\varepsilon_n}{\|u_n\|}$ відповідно, оцінку показника швидкості збіжності γ .

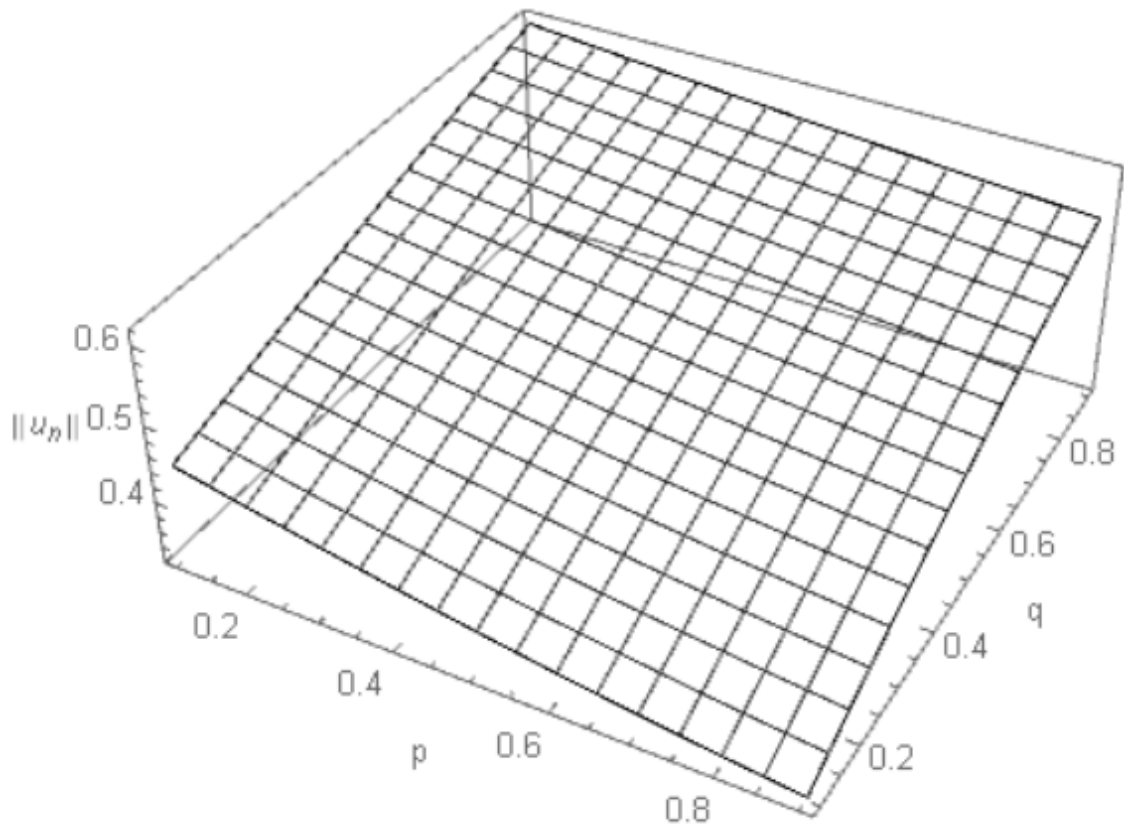


Рисунок 4.9 – Значення норми наближеного розв'язку в залежності від параметрів p, q ($\lambda = 1, \mu = 1$)

Як бачимо з таблиці 4.10 теж як з ростом p , так і з ростом q збіжність ітераційного процесу уповільнюється, сильно інваріантний конусний відрізок стає більш розмитим, а норма розв'язку задачі (4.1), (4.4) збільшується.

Схожа задача для рівняння вигляду $-u'' = \mu(u^p + u^{-q})$, $x \in (0,1)$, $\mu > 0$, була розглянута у роботі М.-D. Rus [19] і отримані в неї умови існування єдиного додатного розв'язку $p < 1, q < 1$ співпадає з отриманими нами.

Результати роботи було представлено на двох наукових конференціях: XIII міжнародная научная конференция для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информацион-

ных технологиях» (Харків, ХНУ імені В.Н. Каразіна, 16 – 17 березня 2018 р.) [2], 22-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті» (Харків, ХНУРЕ, 17 – 19 квітня 2018 р.) [3] та опубліковано у одній статті у науковому фаховому виданні України [1].

Таблиця 4.10 – Результати обчислювального експерименту для задачі (4.1), (4.4) для деяких значень p і q ($\lambda = 1$, $\mu = 1$)

p	q	α	β	n	$\ u_n\ $	ε	δ	γ
0,2	0,2	1,95579	2,19006	4	0,45298	$0,926 \cdot 10^{-5}$	$0,204 \cdot 10^{-2} \%$	0,132
0,2	0,4	2,07583	2,74731	6	0,50154	$0,428 \cdot 10^{-5}$	$0,853 \cdot 10^{-3} \%$	0,182
0,2	0,6	1,97740	3,90497	8	0,54636	$0,984 \cdot 10^{-5}$	$0,180 \cdot 10^{-2} \%$	0,276
0,2	0,8	1,37890	9,04060	13	0,58738	$0,816 \cdot 10^{-5}$	$0,139 \cdot 10^{-2} \%$	0,416
0,4	0,2	1,77787	2,06751	6	0,42123	$0,250 \cdot 10^{-5}$	$0,593 \cdot 10^{-2} \%$	0,202
0,4	0,4	1,89786	2,70670	8	0,47622	$0,338 \cdot 10^{-5}$	$0,710 \cdot 10^{-2} \%$	0,269
0,4	0,6	1,74409	4,10337	11	0,52586	$0,701 \cdot 10^{-5}$	$0,133 \cdot 10^{-2} \%$	0,378
0,4	0,8	0,99902	11,63630	18	0,57055	$0,987 \cdot 10^{-5}$	$0,173 \cdot 10^{-2} \%$	0,532
0,6	0,2	1,64114	1,95618	6	0,39334	$0,959 \cdot 10^{-5}$	$0,244 \cdot 10^{-2} \%$	0,250
0,6	0,4	1,75757	2,66935	9	0,45381	$0,622 \cdot 10^{-5}$	$0,137 \cdot 10^{-2} \%$	0,331
0,6	0,6	1,54551	4,33331	14	0,50756	$0,560 \cdot 10^{-5}$	$0,110 \cdot 10^{-2} \%$	0,455
0,6	0,8	0,66180	16,24570	25	0,55536	$0,888 \cdot 10^{-5}$	$0,142 \cdot 10^{-2} \%$	0,624
0,8	0,2	1,54024	1,85853	7	0,37006	$0,462 \cdot 10^{-5}$	$0,125 \cdot 10^{-2} \%$	0,273
0,8	0,4	1,65160	2,63179	10	0,43467	$0,671 \cdot 10^{-5}$	$0,154 \cdot 10^{-2} \%$	0,371
0,8	0,6	1,38491	4,57811	16	0,49162	$0,806 \cdot 10^{-5}$	$0,164 \cdot 10^{-2} \%$	0,511
0,8	0,8	0,40541	24,59830	33	0,54192	$0,802 \cdot 10^{-5}$	$0,148 \cdot 10^{-2} \%$	0,695

5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Нелінійні крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь часто виникають у науковій та інженерній практиці при математичному моделюванні нелінійних фізико-механічних полів різної природи, наприклад, високотемпературних процесів у хімії, фізиці плазми, теорії горіння [16], у теорії псевдопластичних рідин [18] та у теорії граничного шару [17].

В роботі біло досліджено можливість побудови двобічних наближень до єдиного додатного розв'язку крайових задач для нелінійного звичайного диференціального рівняння вигляду $-u'' = \lambda u^p + \mu u^{-q}$, яке є математичною моделлю процесу нелінійної стаціонарної теплопровідності.

Розроблені алгоритми довели свою ефективність при розв'язанні тестових задач і можуть бути використані для дослідження крайових задач з різними комбінаціями типів крайових умов та іншими типами нелінійностей. Також отримані результати можна використати для знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків еліптичних крайових задач та при побудові на основі методу Рунге напівдискретних методів чисельного аналізу квазілінійного рівняння теплопровідності чи хвильового рівняння.

Отримані результати можуть бути також використані студентами закладів вищої освіти, що вивчають дисципліни «Рівняння математичної фізики», «Математичне моделювання», «Чисельні методи», «Чисельні методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь». Розроблений програмний продукт може знайти застосування в науково-дослідних установах, що займаються проблемами хімічної кінетики, біології, теплопровідності, теорії горіння, теорії течії тощо.

ВИСНОВКИ

У роботі було проведене дослідження можливості побудови двобічних наближень до єдиного додатного розв'язку нелінійного звичайного диференціального рівняння $-u'' = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ для різних комбінацій типів крайових умов, а також проведено аналіз залежності отриманого наближеного розв'язку від параметрів, що входять у праву частину диференціального рівняння.

За допомогою методу функцій Гріна розглядувані крайові задачі було зведено до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке було досліджено методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих просторах. Отримано умови існування єдиного додатного розв'язку та умови двобічної збіжності до нього послідовних наближень. На основі отриманих результатів було побудовано алгоритм методу двобічних наближень, виконано його програмну реалізацію у пакеті Mathematica, за допомогою якої було отримано наближені розв'язки розглядуваних крайових задач та проаналізовано їх залежність від значень параметрів, що входять до нелінійності рівняння.

Розроблений програмний продукт можна використовувати для подальшого дослідження різних типів крайових задач та їх розв'язків, а також при розв'язанні прикладних задач, які виникають при математичному моделюванні процесів у нелінійних середовищах. Також отримані результати можна розповсюдити на звичайні диференціальні рівняння з іншими лівими частинами та нелінійностями у правій частині, іншими комбінаціями крайових умов і використати при побудові на основі методу Рунге напівдискретних методів чисельного аналізу квазілінійного рівняння теплопровідності та хвильового рівняння.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Вороненко М. Д., Сидоров М. В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь // Радиоэлектроника и информатика. 2018. № 1 (80). С. 48–54.

2. Вороненко Н. Д. Построение двусторонних приближений к положительному решению нелинейных краевых задач для ОДУ // XIII международная научная конференция для молодых ученых «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» : сб. материалов конф. (м. Харків, 16-17 березня 2018 р.). Харків : ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2018. С. 50–51.

3. Вороненко М. Д. Методи конструктивного дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь // 22-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 17-19 квітня 2018 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2018. С. 68–69.

4. Катренко А. В. Системний аналіз. Львів : “Новий світ – 2000”, 2011. 396 с.

5. Колосов А. И., Колосова С. В., Сидоров М. В. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. № 2. С. 50–57.

6. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2015. № 3. С. 107–120.

7. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью // Радиоэлектроника и информатика. 2013. № 3 (62). С. 28–31.

8. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. – Москва : ГИФМЛ, 1962. 394 с.

9. Курпель Н. С., Шувар Б. А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. – Київ : Наукова думка, 1980. 268 с.
10. Лямец В. И., Тевяшев А. Д. Системный анализ. Вводный курс : учеб. пос. Харьков : ХНУРЭ, 2004. 448 с.
11. Опойцев В. И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Труды Московского математического общества. 1978. Т. 36. С. 237–273.
12. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
13. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв'язання задачі Діріхле для нелінійного рівняння теплопровідності // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2017. Вип. 16. С. 157–167.
14. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2019. № 1 (48). С. 57–66.
15. Сидоров М. В. Методи двобічних наближень розв'язання деяких класів нелінійних задач математичної фізики : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2019. 46
16. Франк-Каменецкий Д. А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – Москва : Интеллект, 2008. 408 с.
17. Callegari A., Nachman A. Some singular, nonlinear differential equations arising in boundary layer theory // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1978. № 64. P. 96–105.
18. Nachman A., Callegari A. A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1980. Vol. 38, № 2. P. 275–281.
18. Rus M.-D. The method of monotone iterations for mixed monotone operators: Ph.D. Thesis Summary. Cluj-Napoca, 2010. 47 p.
20. Sidorov M.V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing

two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems // Carpathian Mathematical Publications. 2018. T. 10. №. 2. C. 360–375.

21. Sidorov M.V. Method of two-sided approximations for finding positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems: the use of the Green-Rvachev's quasi-function // Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2018. № 2 (128). P. 96–113.

22. Sidorov M.V. Construction of two-sided approximations to positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems // Journal of Numerical & Applied Mathematics. 2017. № 3 (126). P. 110–123.