УДК519.6

О.О. Литвин

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків, Україна, loo71@bk.ru

ОДНА ТЕОРЕМА ПРО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-АПРОКСИМАЦІЙНІ ОПЕРАТОРИ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Розглянуто аналітичне представлення інтерполяційно-апроксимаційних операторів, частина параметрів у яких виражається через інші методом найменших квадратів. Ці інші параметри можуть бути сталими або функціями від деякої множини змінних. Розглянуто приклади.

АПРОКСИМАЦІЯ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ (ІНТЕГРАЛЬНА ФОРМА), ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

Вступ

Класичні оператори поліноміальної інтерполяції Лагранжа і Ерміта являють собою приклади операторів, у яких всі вхідні дані $x_k, y_k^{(s)}, k=\overline{1,M}, 0\le s\le r$ входять як символи, тобто визначено місця, у які потрібно підставляти їх числові значення. Такі формули зручні для використання в системах комп'ютерної математики Mathcad, Maple тощо. При розв'язанні задачі апроксимації в деяких випадках такі формули відсутні. В даній роботі пропонується загальний метод побудови аналогічних формул для операторів інтерполяції ермітового типу, похідні у яких знаходяться методом найменших квадратів, що зводиться до мінімізації відповідного функціоналу, залежного від наближуючої функції. В цьому випадку практика часто не дає значення похідних в точках інтерполяції. Тому для збереження ізогеометричних властивостей наближуючої функції, а також для отримання наближень з більш високою точністю природним є бажання знайти похідні наближено. Ця ідея покладена в основу даної роботи.

1. Формулювання і доведення основної теореми

В області $D\subset R^n, n=1,2,...$ задано $M\ge 2$ точок

$$X^{(k)}=\left(X_1^{(k)},...,X_n^{(k)}\right)\in D, k=\overline{1,M}.$$

Для функції $f(x)\in C^N\left(\overline{D}\right)$ задано її значення та множину значень її частинних похідних (наприклад,до порядку $N\ge 1$ включно),

$$D^\alpha f\left(X^{(k)}\right)=f_{k,\alpha}, k=\overline{1,M}, 0\le|\alpha|\le N,\ \ \alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n),$$

$$D^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}, |\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n.$$

Побудуємо інтерполяційні базисні функції (поліноміальні, тригонометричні, сплайн-функції тощо)

$$h_{l,\beta}(x), l=\overline{1,M}, \beta=(\beta_1,...,\beta_n), 0\le|\beta|\le N$$

з властивостями

$$(\ 0\le|\alpha|,|\beta|\le N, k,l=\overline{1,M}\ ):$$

$$D^\alpha h_{l,\beta}\left(X^{(k)}\right)=\delta_{\alpha,\beta}\delta_{k,l}.$$

Тоді оператор

$$O(x,f)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{0\le|\alpha|\le N} f_{k,\alpha}h_{k,\alpha}(x)$$

є оператором інтерполяції з властивостями

$$D^\beta O\left(X^{(l)},f\right)=f_{l,\beta}, l=\overline{1,M}, 0\le|\beta|\le N.$$

Задача, яку ми розв'язуємо у даній роботі, формулюється так. Відомі лише $f_{l,\beta}, l=\overline{1,M}, |\beta|=0$.

Знайти $f_{l,\beta}, l=\overline{1,M}, 1\le|\beta|\le N$ для довільного набору точок $X^{(k)}\in D\in R^n$, $k=\overline{1,M}$ з умови

$$J(f_{l,\beta})\to\min_{f_{l,\beta},1\le|\beta|\le N} \qquad (1)$$

$$J(f_{l,\beta})=\int_D\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial O(x,f)}{\partial x_k}\right)^2\right]dx$$

у символічному вигляді, тобто вважаючи $f_{l,0}, l=\overline{1,M}$ і $X^{(k)}, k=\overline{1,M}$ невідомими. Якщо $f_{l,0}, l=\overline{1,M}$ і $X^{(k)}, k=\overline{1,M}$ — відомі числа, то сформульована мінімізаційна задача може бути розв'язана одним з методів обчислювальної математики в системі комп'ютерної математики. Якщо ж $f_{l,0}, l=\overline{1,M}$ та $X^{(k)}, k=\overline{1,M}$ — невідомі, то автору даної публікації невідомий загальний метод розв'язання поставленої мінімізаційної задачі, зручний для використання в СКМ. В той же час успішне розв'язання такої мінімізаційної задачі може знайти важливі застосування.

По-перше, важливою є задача наближеного знаходження всіх похідних ермітової *M*-точкової інтерполяції з умови (1), якщо $f(x)$ є невідомою функцією.

По-друге, важливою для практики є задача побудови операторів

$$O(x,f)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{\alpha\in\Xi} f_{k,\alpha}h_{k,\alpha}(x)$$

з властивостями

$$D^\alpha O\left(X_q,f\right)=f_{q,\alpha}, q=\overline{1,M}, \alpha\in I\subset\Xi,$$

де I,Ξ — задані підмножини мультиіндексів, тобто для того частинного випадку, коли відома лише частина чисел $f_{k,\alpha}$. Як приклади, наведемо випадки

$$I = \{\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) : \alpha = 0\},$$
$$\Xi = \{\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) : 0 \le |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \le N\},$$

або

$$I = \{\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) : \alpha = 0\},$$
$$\Xi = \{\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) : 0 \le \alpha_s \le N, s = \overline{1,n}\}.$$

Теорема 1. Якщо записати оператор $O(x,f)$ у матричній формі

$$O(x,f) = F_0^T \cdot H_0(x) + F^T \cdot H(x),$$

то для матриці-стовпця F справедливе аналітичне представлення через F_0

$$F = -A^{-1} F_0^T \left(\int_D gradH_0(x)^T \cdot gradH(x) dx \right),$$

$$A_{p,q} = \int_D gradh_p(x) \cdot gradh_q(x) dx .$$

Доведення. Перейдемо у формулі $O(x,f)$ до матричного запису, ввівши лінійну нумерацію індексів функцій і параметрів.

Нехай $Q = Q(n,N)$ — загальне число похідних порядків $\beta, 0 \le m(\beta) \le Q(n,N), 0 \le |\beta| \le N$. Наприклад, при

$$n = 2, Q(2,N) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}.$$

$$F_{0,k} = f_{k,0}, k = \overline{1,M}, \ H_{0,k}(x) = h_{k,0}(x), k = \overline{1,M},$$
$$(H(x))_{m(\beta)} = h_{1,\beta}(x),$$
$$1 \le m(\beta) \le Q(n,N) - 1, 0 \le |\beta| \le N;$$
$$(H(x))_{Q-1+m(\beta)} = h_{2,\beta}(x),$$
$$1 \le m(\beta) \le Q(n,N) - 1, 0 \le |\beta| \le N;$$
$$(H(x))_{(M-1)(Q-1)+m(\beta)} = h_{M,\beta}(x),$$
$$1 \le m(\beta) \le Q(n,N) - 1, 0 \le |\beta| \le N.$$

Таким чином, матриці-стовпці F_0 і $H_0(x)$ мають M елементів, матриці-стовпці F і $H(x), x = (x_1,...,x_n)$ мають $(Q(n,N)-1)M$ елементів. Тому для оператора $O(x,f)$ можна написати наступний матричний вираз

$$O(x,f) = F_0^T \cdot H_0(x) + F^T \cdot H(x) =$$
$$= H_0(x)^T F_0 + H(x)^T F .$$

Введемо лінійну нумерацію індексів у F і будемо цією ж буквою позначати матрицю-стовпець F. Знаходимо невідомі елементи матриці-стовпця F з умови [1]

$$J(F) \to \min_F .$$

$$J(F) = \int_D \left[\sum_{p=1}^n \left(\sum_{k=1}^M f_{k,0} \frac{\partial}{\partial x_p} h_{k,0}(x) + \sum_{j=1}^{M(Q(n,N)-1)} F_j \frac{\partial}{\partial x_p} H_j(x) \right]^2 dx .$$

Прирівнюючи до нуля частинні похідні за параметрами $F_i, i = 1,..., M(Q(n,M)-1)$, отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial F_i} J(F) = \int_D \left[\sum_{p=1}^n \left(\sum_{k=1}^M f_{k,0} \frac{\partial}{\partial x_p} h_{k,0}(x) + \sum_{j=1}^{M(Q(n,N)-1)} F_j \frac{\partial}{\partial x_p} H_j(x) \right] \frac{\partial}{\partial x_p} H_i(x) dx = 0,$$
$$i = 1,..., M(Q(n,N)-1).$$

Перепишемо цю систему рівнянь у вигляді

$$\int_D \left[\sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^{M(Q(n,N)-1)} F_j \frac{\partial}{\partial x_p} H_j(x) \frac{\partial}{\partial x_p} H_i(x) \right] dx =$$
$$= -\int_D \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^M (F_0)_k \frac{\partial}{\partial x_p} h_{k,0}(x) \frac{\partial}{\partial x_p} H_i(x) dx,$$
$$i = 1,..., M(Q(n,N)-1).$$

Для подальшого цю систему рівнянь зручно написати у вигляді

$$\sum_{j=1}^{M(Q(n,N)-1)} \int_D \left[\sum_{p=1}^n \frac{\partial H_j(x)}{\partial x_p} \frac{\partial H_i(x)}{\partial x_p} \right] dx \, F_j =$$
$$= -\sum_{k=1}^M (F_0)_k \sum_{p=1}^n \int_D \frac{\partial h_{k,0}(x)}{\partial x_p} \frac{\partial H_i(x)}{\partial x_p} dx,$$
$$i = 1,..., M(Q(n,N)-1).$$

Якщо ввести позначення

$$A_{i,j} = \int_D \left[\sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial H_j(x)}{\partial x_p} \frac{\partial H_i(x)}{\partial x_p} \right) \right] dx;$$
$$i, j = 1,..., (Q(n,N)-1)M,$$

$$B_{i,k} = \sum_{p=1}^n \int_D \frac{\partial}{\partial x_p} h_{k,0}(x) \frac{\partial}{\partial x_p} H_i(x) dx;$$
$$i, k = 1,..., (Q(n,N)-1)M,$$

то в результаті написана вище система може бути записана у вигляді

$$\sum_{j=1}^{M(Q(n,N)-1)} A_{i,j} F_j = -\sum_{k=1}^M B_{i,k} (F_0)_k,$$
$$i = 1,..., (Q(n,N)-1)M$$

або у матричному вигляді

$$AF = -BF_0 .$$

Звідси отримуємо

$$F = -A^{-1} BF_0 .$$

Підставляючи цей вираз у формулу

$$O(x,f) = F_0^T \cdot H_0(x) + F^T \cdot H(x),$$

отримаємо

$$O(x,f) = F_0^T \cdot H_0(x) - (A^{-1} BF_0)^T \cdot H(x).$$

Враховуючи, що $(AB)^T = B^T A^T$, останню формулу можна написати у вигляді

$$O(x,f) = F_0^T \cdot H_0(x) - F_0^T B^T \left(A^{-1}\right)^T \cdot H(x).$$

Тобто,

$$O(x,f) = F_0^T \cdot \left(H_0(x) - B^T \left(A^{-1}\right) \cdot H(x)\right).$$

Враховуючи симетричність матриці A маємо

$$O(x,f) = F_0^T \cdot \left(H_0(x) - B^T A^{-1} \cdot H(x)\right).$$

Записуючи цей вираз в покоординатній формі, отримаємо

$$O(x,f) = \sum_{k=1}^{M} f_{k,0} \cdot \left(H_0(x)_k - \left(B^T A^{-1} \cdot H(x)\right)_k\right),$$

$$O(x,f) = \sum_{k=1}^{M} f_{k,0} \cdot \Phi_k(x),$$

$$\Phi_k(x) = H_0(x)_k - \left(B^T A^{-1} \cdot H(x)\right)_k,$$

$$k = 1,\dots,M.$$

Теорема 1 доведена.

Ця формула є узагальненням класичної інтерполяційної формули Ерміта на випадок апроксимації функції $f(x)$ методом найменших квадратів при умові, що відомими є лише значення функції, а значення частинних похідних невідомі.

Планується її використання при наближенні вектора прискорення $\overrightarrow{W}(x,y,z,t)$, якщо дані про цей вектор відомі лише як функції $\overrightarrow{W}_k(z,t), k = \overline{1,M}$.

2. Приклади

Приклад 1. $N = 1, n = 1, M = 2$. Вважаємо, що точками інтерполяції є точки $X_1 = 0, X_2 = 1$. Оператор поліноміальної двоточкової ермітової інтерполяції в цьому випадку має вигляд

$$O(x,f) = \sum_{k=1}^{2} f(X_k) h_{k,0}(x) + \sum_{k=1}^{2} C_k h_{k,1}(x),$$

де базисні поліноми $h_{k,s}(x), k = 1,2; s = 0,1$ визначаються формулами

$$h_{1,0}(x) = \frac{(x - X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2}\left(1 - \frac{2(x - X_1)}{(X_1 - X_2)}\right),$$

$$h_{2,0}(x) = \frac{(x - X_1)^2}{(X_2 - X_1)^2}\left(1 - \frac{2(x - X_2)}{(X_2 - X_1)}\right),$$

$$h_{1,1}(x) = (x - X_1)\frac{(x - X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2},$$

$$h_{2,1}(x) = (x - X_2)\frac{(x - X_1)^2}{(X_2 - X_1)^2}.$$

В цьому прикладі оператор $O(x,f)$ має властивості

$$O(X_p, f) = f_{p,0} = f(X_p), p = 1,2;$$

$$\left.\frac{dO(x,f,C)}{dx}\right|_{x = X_p} = C_p \forall C_p \in R, p = 1,2.$$

В результаті мінімізації функціоналу

$$J(F) = \int_0^1 \left(\frac{dO(x,f,C)}{dx}\right)^2 dx \to \min_C$$

для невідомих $C_p, p = 1,2$ отримані формули, які дозволяють написати

$$O(x,f) = \sum_{k=1}^{2} f(X_k) \Phi_k(x),$$

$$\Phi_1(x) = h_{1,0}(x) - C_k h_{1,1}(x) - C_k h_{2,1}(x);$$

$$\Phi_2(x) = h_{2,0}(x) + h_{1,1}(x) + h_{2,1}(x).$$

Приклад 2. $N = 1, n = 2, M = 4$. Вважаємо, що точками інтерполяції є точки

$$X^{(1)} = (0,0), X^{(2)} = (1,0),$$

$$X^{(3)} = (0,1), X^{(4)} = (1,1).$$

Шукаємо інтерполяційний оператор у вигляді

$$O(x,y,F0,c) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} F0_{k,l} h_{k,0}(x) h_{l,0}(y) +$$

$$+ z(x,y,c),\ F0_{k,l} = f(k-1, l-1)$$

$$z(x,y,c) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(c_{k,l} h_{k,1}(x) h_{l,0}(y) +\right.$$

$$\left.+ c_{k,l+m} h_{k,0}(x) h_{l,1}(y) + c_{k,l+2m} h_{k,1}(x) h_{l,1}(y)\right)$$

$$F0_{k,l} = f(k-1, l-1)$$

$$z(x,y,c) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(c_{k,l} h_{k,1}(x) h_{l,0}(y) +\right.$$

$$\left.+ c_{k,l+m} h_{k,0}(x) h_{l,1}(y) + c_{k,l+2m} h_{k,1}(x) h_{l,1}(y)\right).$$

Введемо лінійну нумерацію функцій і невідомих параметрів

$$f0_{(k-1)M+l} = F0_{k,l}$$

$$\Phi0_{(k-1)M+l}(x,y) = h_{k,0}(x) h_{l,0}(y), k,l = \overline{1,m}$$

$$\Phi_{(k-1)M+l}(x,y) = h_{k,1}(x) h_{l,0}(y),$$

$$C_{(k-1)M+l} = c_{k,l}$$

$$\Phi_{(k-1)M+l+M}(x,y) = h_{k,0}(x) h_{l,1}(y),$$

$$C_{(k-1)M+l+M} = c_{k,l+m}$$

$$\Phi_{(k-1)M+l+2M}(x,y) = h_{k,1}(x) h_{l,1}(y),$$

$$C_{(k-1)M+l+2M} = c_{k,l+2m}, k,l = \overline{1,m}.$$

Тоді

$$O(x,y,F0,C) = \Phi0(x,y)^T f0 + \Phi(x,y)^T C$$

у випадку $m = 2$ для матриці

$$A = \int_0^1\int_0^1 F(x,y)^T \cdot F(x,y)\, dxdy$$

і для матриці $B=\int_0^1\int_0^1 F(x,y)^T\,F0(x,y)dxdy$ у цьому прикладі отримано результати, які дозволяють написати

$$Z=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -7 \\ 7 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ -49 & 14 & 14 & -4 \\ -14 & 49 & 4 & -14 \\ -14 & 4 & 49 & -14 \\ -4 & 14 & 14 & -49 \end{bmatrix}.$$

Тобто шуканий оператор має вигляд

$$O(x,y,f0)=\left(\Phi0(x,y)^T-\Phi(x,y)^T A^{-1}B\right)f0\,,$$

$$f0^T=\left(f\left(X^{(1)}\right)\;\; f\left(X^{(2)}\right)\;\; f\left(X^{(3)}\right)\;\; f\left(X^{(4)}\right)\right).$$

Висновки

Таким чином, в даній роботі запропоновано загальний метод представлення системи базисних функцій інтерполяційно-апроксимаційних операторів, у якому всі параметри, як і в класичних інтерполяційних формулах, задаються символами. Такі формули є зручними для реалізації в системах комп'ютерної математики Mathcad, Maple.

Пропонується використовувати їх для побудови сейсмічної міжсвердловинної акселерометричної математичної моделі структури кори Землі на основі даних $\vec{w}_k(z,t), k=\overline{1,M}$ про вектор прискорення $\vec{w}(x,y,z,t)$ у кожній прямій — свердловині Γ_k даної системи свердловин, отриманих акселерометрами при сейсмічному зондуванні кори Землі. При розв'язанні цієї задачі з використанням допоміжних функцій у вигляді кубічних інтерполяційних сплайнів, які є поліномами третього ступеня, в кожному із трикутників триангуляції області дослідження потрібно знати і значення функції і значення їх частинних похідних першого порядку. Оскільки акселерометри вимірюють лише прискорення, то його частинні похідні потрібно знаходити наближено. Запропонований метод дозволяє ефективно розв'язати цю задачу.

Список літератури: 1. *Веселов, В.В.* Вариационный подход к задачам интерполяции физических полей [Текст] / В.В. Веселов, Д.П. Гонтов, Л.М. Пустыльников. – М.: Наука, 1983. – 120 с. **2.** *Айвазян, С.А.* Прикладная статистика. Основы эконометрики. [Текст] / С.А. Айвазян. – Том 2. – М.: Юнити-Дана, 2001. – 432 с. **3.** *Доугерти, К.* Введение в эконометрику: Пер. с англ. [Текст] / К. Доугерти. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 402 с. **4.** *Кремер, Н.Ш.* Эконометрика [Текст] / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. – М.: Юнити-Дана, 2003-2004. – 311 с. 5. *Литвин, О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. [Текст] / О.М. Литвин. – К.: Наукова думка, 2005. – 333 с.

Поступила в редколегию 26.06.2012

УДК 519.6

Одна теорема об интерполяционно-аппроксимационных операторах в интегральной форме метода наименьших квадратов / О.О.Литвин// Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал. – 2012. – № 2 (79). – С. 19–22.

Сформулирована и доказана теорема об аналитическом представлении интерполяционно-аппроксимационных операторов, часть параметров в которых выражается через другие методом наименьших квадратов. Эти параметры могут быть константами или функциями от нескольких переменных. Рассмотрены примеры.

Библиогр.: 5 назв.

UDC 519.6

One theorem for interpolation-approximation operators in the integral form of the method of the least squares/ O.O.Lytvyn // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2012. – № 2 (79). – P. 19–22.

The theorem of analytical representation interpolation-approximation operators is formulated and proved. The part of parametres of these operators is expressed through others by a method of the least squares. These other parametres can be constants or functions of several variables. Examples are considered.

Ref.: 5 items.