УДК 532.59

А.Ю. ПАНЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ

Создание широкого класса приборов для диагностики веществ и материалов базируется на использовании волновых процессов в неоднородной среде. Потребность в увеличении объема первичной информации приводит к необходимости комплексного использования электромагнитных и акустических волн. Математический аппарат анализа акустических волн имеет множество общих элементов с аппаратом анализа электромагнитных волн, но его разработка заметно отстает, и при создании систем комплексной диагностики это приходится учитывать.

Система акустических уравнений основана на общих уравнениях гидродинамики. В настоящее время для составления этих систем используется ряд подходов [1 — 6]. Однако они обладают общим свойством: уравнение непрерывности и уравнение движения составляются для фиксированного объема, а уравнение состояния — для фиксированной массы, и такой набор уравнений не является системой, описывающей один объект. Переход к одному объекту несложен — для ряда простых задач он делается автоматически в процессе преобразований или его можно осуществить на конечных этапах решения. Но в более сложных задачах, к которым относятся и задачи распространения акустических волн в неоднородной движущейся среде, такое преобразование необходимо производить вначале. Оно основывается на законах сохранения энергии и вещества, которые применяются к фиксированному в пространстве объему с прозрачными для перемещения вещества и энергии стенками. Использование иных законов сохранения менее удобно, поскольку для преобразований требуется связь величин, а ее наиболее просто осуществить с использованием энергетических характеристик. В данной работе рассматривается вывод уравнения состояния для объема, фиксированного относительно координатной системы. Полный вывод этого уравнения в совокупности с остальными представлен в [7].

Внутренняя энергия E_i некоторой массы газа m равна [8]

$$E_i = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT = \frac{i}{2}pV\,, \qquad (1)$$

где i — число степеней свободы у молекул газа; μ — молекулярная масса газа; R — универсальная газовая постоянная; T — абсолютная температура; p — давление; V — объем.

Плотность внутренней энергии

$$e_i = \lim_{V \to 0} \frac{E_i}{V}. \tag{2}$$

Согласно (1)

$$e_i = \frac{i}{2} p. \tag{3}$$

В общем случае, например, для газовой смеси значение i не обязательно целочисленное; более того, оно может изменяться в пространстве и времени, но далее рассматривается газ, однородный по химическому составу.

Существует ряд механизмов, приводящих к изменению внутренней энергии газа. Наиболее важными из них являются следующие четыре: 1) перетекание энергии через границу; 2) воздействие внешних источников теплоты; 3) работа внешних источников массы, которые сообщают генерируемой массе некоторую энергию; 4) изменение объема вещества при совершении им работы против внешних сил давления.

Первый механизм в дифференциальной форме можно выразить на основании теоремы Остроградского:

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} + div(e_i \vec{v}) = 0, \tag{4}$$

где $\vec{v}$ — скорость движения среды.

При отсутствии иных причин второй механизм приводит к изменению внутренней энергии, которое составляет

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} = q_i, \tag{5}$$

где q_i — удельная мощность внешних источников теплоты.

Источник массы создает поток нового вещества, которое имеет температуру, отличную от абсолютного нуля, т. е. источник массы сообщает вновь вводимому веществу некоторую внутреннюю энергию. Плотность и давление вновь вносимого вещества могут быть любыми, для определенности можно ограничиться случаем равенства этих величин у источника и потока. Кроме генерации массы с некоторой внутренней энергией, этот источник дополнительно совершает работу по вытеснению некоторой массы из рассматриваемого объема. При сделанном выше предположении о равенстве значений удельная мощность, отдаваемая источником для поддержания этого процесса, равна отношению $p\Omega/\rho$, где Ω — удельная производительность источника вещества; ρ — плотность. На основании (1) и (3) полное изменение внутренней энергии газа за счет третьего механизма составит:

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} = \frac{i}{2}\frac{\Omega}{\rho}p + \frac{p\Omega}{\rho}. \tag{6}$$

Четвертый механизм требует детального анализа. Работа, совершаемая газом, традиционно определяется для фиксированной его массы. Необходимо сформулировать вывод для фиксированного объема, ограниченного стенками, через которые газ может свободно перетекать. Работу A фиксированного объема газа можно определить через массу газа, которая была перемещена за его пределы. Тогда изменение массы газа, отнесенное к его плотности, является эквивалентом изменения объема для фиксированной массы. Запишем сразу это соотношение для производных по времени:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial m}{\partial t}. \tag{7}$$

Отметим, что ρ здесь считается постоянным. Изменение массы в объеме V на основании формулы Остроградского можно выразить так:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\int_V div(\rho\vec{v})\partial V. \tag{8}$$

Подставив это выражение в (7) и перейдя к пределу по объему, для производной от удельного значения работы a, которая совершена газом, получим:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = p div\vec{v}. \tag{9}$$

Собрав в правой части слагаемые, соответствующие рассмотренным выше механизмам, получим уравнение сохранения e_i в виде:

$$\frac{\partial e_i}{\partial t}+div(e_i\,\vec{v})=q_i-p\,div\,\vec{v}+\frac{i}{2}\frac{\Omega}{\rho}p+\frac{\Omega p}{\rho}\ . \qquad (10)$$

Подставив в это выражение (3) и умножив полученное равенство на $2/i$, после несложных преобразований запишем:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{i+2}{i}p\,div\,\vec{v}+(\vec{v}\,grad\,p)=\frac{2}{i}q_i+\frac{i+2}{i}\frac{\Omega}{\rho}p\ . \qquad (11)$$

Использовав уравнение непрерывности, выразим $div\vec{v}$:

$$div\,\vec{v}=\frac{\Omega}{\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{1}{\rho}(\vec{v}\,grad\,\rho)\ . \qquad (12)$$

Подставив (12) в (11) и заменив $(i+2)/i$ на γ — адиабатическую постоянную, после преобразований получим уравнение состояния для элементарного объема в подвижной неоднородной газовой среде:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{\rho}{\gamma p}\frac{\partial p}{\partial t}+(\vec{v}\,grad\,\rho)-\frac{\rho}{\gamma p}(\vec{v}\,grad\,p)=-\frac{\rho}{\gamma p}\frac{2}{i}q_i\ . \qquad (13)$$

Уравнение (13) совместно с уравнением непрерывности и уравнением движения составляют полную систему для описания динамических процессов в идеальном газе. Причем в данном случае все уравнения записаны в единой системе координат, не зависящей от скорости потока.

Дальнейший вывод уравнений акустики представляет собой традиционную линеаризацию для малых возмущений. В отличие от выводов, известных ранее, в данном случае для получения уравнений распространения акустических волн в условиях движущейся неоднородной среды нет необходимости производить переходы между системами координат. Необходимо только использовать обычные предположения: акустические волны не изменяют параметров основного потока; при возбуждении в движущейся среде акустических волн ее характеристики определяются суммой параметров исходного потока и поля акустических волн. Параметры исходного потока обозначим через индекс 0, поля акустических волн — через индекс s, тогда:

$$\rho = \rho_o + \rho_s; \qquad \vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}_s; \qquad p = p_o + p_s. \tag{14}$$

Аналогичные обозначения введем для источников массы, теплоты и внешних сил. Действие источников массы и внешних сил подробно рассмотрено в [7], где для вещества и кинетической энергии применяется подход, аналогичный представленному выше. Ввиду малости возмущения, вносимого акустическими волнами, обычно предполагают, что они не влияют на основной поток, и для него система уравнений удовлетворяется всегда. Подставив (14) в исходные уравнения и исключив слагаемые, относящиеся к основному потоку, и слагаемые второго и более высоких порядков малости, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_s}{\partial t} + div(\rho_o \vec{v}_s) + div(\rho_s \vec{v}_0) = \Omega_s; \\ \rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \rho_s \dfrac{\partial \vec{v}_o}{\partial t} + \rho_s(\vec{v}_o \nabla)\vec{v}_s + \rho_o[(\vec{v}_s \nabla)\vec{v}_o + (\vec{v}_o \nabla)\vec{v}_s] + grad\, p_s = \\ \qquad = \vec{f}_s - \dfrac{\Omega_s \vec{v}_o}{2} - \dfrac{\Omega_o \vec{v}_s}{2}; \\ \dfrac{\partial \rho_s}{\partial t} - \dfrac{\rho_o}{\gamma p_o}\dfrac{\partial p_s}{\partial t} + (\vec{v}_o grad\, \rho_s) + (\vec{v}_s grad\, \rho_o) - \\ \qquad - \dfrac{\rho_o}{\gamma p_o}[(\vec{v}_o grad\, p_s) + (\vec{v}_s grad\, p_o)] = -\dfrac{\rho_o}{\lambda p_o}\dfrac{2}{i} q_s. \end{cases} \tag{15}$$

Необходимо напомнить, что при выводе уравнения состояния использовались следующие предположения: источник массы генерирует вещество, которое обладает нулевой скоростью; его температура равна температуре потока; химический состав газа постоянный. Данной системы достаточно для описания широкого круга практических задач, но представленный в [7] подход позволяет получить и более общие уравнения.

В качестве примеров, вытекающих из системы (15), рассмотрим два частных, но практически важных случая. Первый — случай неподвижной неоднородной среды. Вычтем из первого уравнения третье, тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_o}{\gamma p_o}\dfrac{\partial p_s}{\partial t} + \rho_o div\,\vec{v}_s = \Omega_s + \dfrac{\rho_o}{\lambda p_o}\dfrac{2}{i}q_s; \\ \rho_o\dfrac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + grad\,p_s = \vec{f}_s. \end{cases} \tag{16}$$

Данная система полностью соответствует уравнениям в невозмущенной среде, неоднородность среды выражается только в непостоянстве ее параметров по пространству. Ранее уравнения системы для этого случая включали слагаемые, содержащие градиенты параметров среды. Правая часть первого уравнения показывает, что действие источников массы и теплоты при формировании акустических волн полностью эквивалентно. Это соответствует случаю, когда параметры среды для заданной точки пространства считаются постоянными.

Далее рассмотрим случай стационарного бездивергентного потока однородного газа, в котором возбуждаются акустические волны с длиной волны значительно меньшей, чем характерные размеры основного потока. При этих предположениях система (15) также может быть сведена к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_o}{\gamma p_o}\dfrac{\partial p_s}{\partial t} + \rho_o div\,\vec{v}_s + \dfrac{\rho_o}{\gamma p_o}(\vec{v}_o grad\,p_s) = \Omega_s + \dfrac{\rho_o}{\gamma p_o}\dfrac{2}{i}q_s; \\ \rho_o\dfrac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \rho_o(\vec{v}_o\nabla)\vec{v}_s + grad\,p_s = \vec{f}_s - \dfrac{\Omega_s\vec{v}_o}{2} - \dfrac{\Omega_o\vec{v}_s}{2}. \end{cases} \tag{17}$$

Ранее третье слагаемое в первом уравнении имело вид скалярного произведения скорости потока и градиента изменения плотности, причем для исключения приращения плотности еще раз использовали уравнение состояния, что не вполне корректно. Здесь это слагаемое получено путем прямых преобразований.

Список литературы: 1. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с. 2. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с. 3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: В 10 т. М.: Наука. Т. 6: Гидродинамика. 1986. 736 с. 4. *Скучик Е.* Основы акустики: В 2 т.: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. Т. 1. 520 с. 5. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с. 6. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с. 7. *Панченко А.Ю.* Использование инвариантного подхода к составлению уравнений акустических волн в газе. Х., 1997. 13 с. Деп. в УкрИНТЕИ 23.01.97, № 77 Ук — 97. 8. *Савельев И.В.* Курс общей физики: В 3 т. М.: Наука, 1982. Т. 1. 432 с.

Поступила в редколлегию 21.04.97