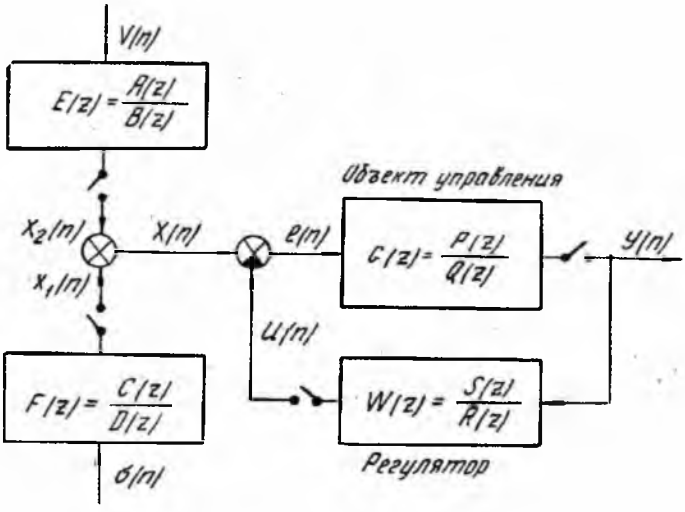
ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

А. А. Волков, И. Ф. Еременко

Харьков

Задача рассматривается при случайных и детерминированных возмущениях. Задана структурная схема включения регулятора, показанная на рисунке, где $x(n)$ — внешнее возмущение, $y(n)$ — координата объекта,



$u(n)$ — координата регулятора. Объект управления принадлежит классу линейных непрерывных устойчивых объектов с минимальной фазой. Импульсный элемент создает прямоугольные импульсы относительной длительности, равной единице. При выбранном периоде повторения T работы ключа полюсы приведенной непрерывной части $G(q)$ ($q = Ts$, где S — параметр преобразования Лапласа) удовлетворяют условию $|I_m q_\nu| < \pi$.

Обычными методами [1] находим дискретную передаточную функцию разомкнутой импульсной системы, включающей объект управления и импульсный элемент:

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{\xi=0}^{r-1} p_\xi z^\xi \frac{1}{\sum_{\xi=0}^{r} q_\xi z^\xi}, \quad q_r = 1, \tag{1}$$

где $P(z)$, $Q(z)$ — полиномы по степеням z, не имеющие нулей в области Γ^- (вне единичного круга Γ на плоскости комплексной переменной

$z = e^{q}$). Степень полинома $Q(z)$ по крайней мере на единицу выше степени полинома $P(z)$.

Возмущение $x(n)$ является суммой регулярной функции времени $x_1(n)$ и стационарной случайной функции $x_2(n)$ с нулевым математическим ожиданием. Неслучайную функцию времени $x_1(n)$ представим в виде решения неоднородного разностного уравнения l-го порядка

$$\sum_{\nu=0}^{l} d_\nu x_1(n+\nu) = \sum_{\nu=0}^{l-1} c_\nu \sigma(n+\nu), \quad d_l = 1 \tag{2}$$

при нулевых начальных условиях. Здесь $\sigma(n)$ — дискретный аналог $\delta(t)$-функции. Стационарную случайную функцию можно рассматривать как результат преобразования некоторой дискретной линейной системой дискретного белого шума $v(n)$ с единичной интенсивностью. Запишем уравнение этой системы в виде

$$\sum_{\mu=0}^{k} b_\mu x_2(n+\mu) = \sum_{\mu=0}^{k-1} a_\mu v(n+\mu), \quad b_k = 1. \tag{3}$$

Разностным уравнениям (2), (3) соответствуют дискретные передаточные функции

$$F(z) = \frac{x_1(z)}{\sigma(z)} = \frac{C(z)}{D(z)}, \quad E(z) = \frac{x_2(z)}{v(z)} = \frac{A(z)}{B(z)}, \tag{4}$$

не имеющие полюсов в области Γ^{-}.

В работе [2], как и в работах [3, 4] для непрерывных систем, оптимальной считается такая передаточная функция конструируемого регулятора, которая обеспечивает минимум функционала

$$I = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{y}(n)]^2 + \beta \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{e}(n)]^2 + \gamma \overline{y_0^2(n)} + \delta \overline{u_0^2(n)},$$

где $\bar{y}(n)$, $\bar{e}(n)$ — математические ожидания соответствующих величин;

$\overline{y_0^2(n)}$, $\overline{u_0^2(n)}$ — средние значения квадратов дискрет центрированных случайных решетчатых функций $y_0(n)$ и $u_0(n)$;

α, β, γ, δ — весовые коэффициенты.

Данный минимизирующий функционал позволяет рассматривать задачу при неограниченных функциях $x_1(n)$. Однако практически системы стабилизации не подвергаются неограниченным возмущениям, а такой выбор оценки управляющей функции затрудняет корректировку весовых коэффициентов α, β, γ, δ при несовпадении качества процесса регулирования с желаемым. Выбор же необходимых начальных значений весовых коэффициентов остается сложным моментом в практике аналитического конструирования регуляторов [5].

В статье рассматриваются ограниченные, исчезающие на бесконечности регулярные возмущения $x_1(n)$, на что указывают свойства разностного уравнения (2), и оптимальной считается такая физически реализуемая передаточная функция $W_0(z)$ конструируемого регулятора, которая обеспечивает устойчивость замкнутой системы и минимум функционала

$$I = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{y}(n)]^2 + \beta \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{u}(n)]^2 + \gamma \overline{y_0^2(n)} + \delta \overline{u_0^2(n)}. \tag{5}$$

Используя равенство Ляпунова-Парсеваля и формулу для определения среднего квадратичного отклонения случайного дискретного процесса [1], выражение для функционала запишем в виде

$$I = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{P(z)\,P(z^{-1})}{[Q(z) + P(z)\,W(z)]\,[Q(z^{-1}) + P(z^{-1})\,W(z^{-1})]} \times$$

$$\times\left[\alpha\frac{C(z)C(z^{-1})}{D(z)D(z^{-1})}+\beta\frac{C(z)C(z^{-1})W(z)W(z^{-1})}{D(z)D(z^{-1})}+\right.$$
$$\left.+\gamma\frac{A(z)A(z^{-1})}{B(z)B(z^{-1})}+\delta\frac{A(z)A(z^{-1})W(z)W(z^{-1})}{B(z)B(z^{-1})}\right]\frac{dz}{z}. \quad (6)$$

Непосредственно определить $W_0(z)$ по формуле (6) трудно, поэтому решение задачи заключается в нахождении некоторой функции $H_0(z)$, связанной с $W_0(z)$, и в последующем определении $W_0(z)$ из этой функции.

Будем искать минимум функционала (5) в классе линейных дискретных операторов $H(z)$, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы и физическую реализуемость регулятора $W_0(z)$. Наиболее удобной является варьируемая функция

$$H(z)=\frac{e(z)}{x_1(z)}=\frac{Q(z)}{Q(z)+P(z)W(z)}=\frac{L(z)}{M(z)}=\frac{l_hz^h+\ldots+l_0}{m_hz^h+\ldots+m_0}, \quad (7)$$

для которой указанные выше требования при минимально-фазовых и устойчивых объектах управления означают следующее.

1. Степень полинома $L(z)$ равна степени полинома $M(z)$.
2. Корни полинома $M(z)$ принадлежат области $\Gamma+$.
3. Число коэффициентов $l_i\,(i=h,\ h-1,\ \ldots)$, равных коэффициентам $m_i\,(i=h,\ h-1,\ldots)$, не меньше $q-p$, где q и p — условное обозначение степеней полиномов $Q(z)$ и $P(z)$. Последнее следует из равенства

$$W(z)=\frac{Q(z)[M(z)-L(z)]}{P(z)L(z)}. \quad (8)$$

Функции $H(z)$, удовлетворяющие этим условиям, и только такие функции удовлетворяют уравнению связи

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma[1-H(z^{-1})][\lambda_1(z^{-1})^{q-p-1}+\ldots+\lambda_{q-p}]\frac{dz}{z}=0, \quad (9)$$

где λ_i — множители Лагранжа.

Отыскание минимума функционала (5) при связи (9) является изопериметрической вариационной задачей. Задача не лишена смысла, но ее решение может быть неоднозначно. Вследствие квадратичности функционала характеристики оптимальной функции $H_0(z)$ должны удовлетворять некоторой линейной системе уравнений. Для получения последних воспользуемся стандартной процедурой. Выразим через $H(z)$ выражение для минизируемого функционала:

$$I_1=\frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma\left\{\frac{P(z)P(z^{-1})}{Q(z)Q(z^{-1})}H(z)H(z^{-1})\left[\alpha\frac{C(z)C(z^{-1})}{D(z)D(z^{-1})}+\gamma\frac{A(z)A(z^{-1})}{B(z)B(z^{-1})}\right]+\right.$$
$$+\left[\beta\frac{C(z)C(z^{-1})}{D(z)D(z^{-1})}+\delta\frac{A(z)A(z^{-1})}{B(z)B(z^{-1})}\right][1-H(z)][1-H(z^{-1}]+ \quad (10)$$
$$+[1-H(z^{-1})][\lambda_1(z^{-1})^{q-p-1}+\ldots+\lambda_{q-p}]+$$
$$\left.+[1-H(z)][\lambda_1z^{q-p-1}+\ldots+\lambda_{q-p}]\right\}\frac{dz}{z}.$$

Представим передаточную функцию $H(z)$ в виде суммы оптимальной передаточной функции $H_0(z)$ и ее произвольной вариации $H_1(z)$:

$$H(z)=H_0(z)+\eta H_1(z).$$

Вариации $H_1(z)$ должны принадлежать к тому же классу функций, что

и $H_0(z)$. Необходимым условием минимума функционала (10) является равенство нулю его вариации δI_1:

$$\delta I_1 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}\left\{\frac{P(z)\,P(z^{-1})}{Q(z)\,Q(z^{-1})}H_0(z)\left[\alpha\frac{C(z)\,C(z^{-1})}{D(z)\,D(z^{-1})}+\right.\right.$$

$$+\gamma\frac{A(z)\,A(z^{-1})}{B(z)\,B(z^{-1})}+\beta\frac{C(z)\,C(z^{-1})}{D(z)\,D(z^{-1})}+\delta\frac{A(z)\,A(z^{-1})}{B(z)\,B(z^{-1})}\Big]-$$

$$\left.\left.-\left[\beta\frac{C(z)\,C(z^{-1})}{D(z)\,D(z^{-1})}+\delta\frac{A(z)\,A(z^{-1})}{B(z)\,B(z^{-1})}\right]-[\lambda_1(z^{-1})^{q-p-1}+\ldots+\lambda_{q-p}]\right\}\frac{dz}{z}=0. \quad (11)$$

Из теории функций комплексного переменного известно, что интеграл, взятый по замкнутому контуру, равен нулю, если внутри этого контура не содержится особых точек подынтегрального выражения. Но поскольку $H_1(z^{-1})$ устойчива, она имеет полюсы лишь в области Γ^-. В силу произвольности вариации $H_1(z^{-1})$ подынтегральное выражение в соотношении (11) является аналитическим внутри единичного круга (в области Γ^+) в том случае, если выполняется соотношение

$$H_0(z)\frac{k_1\Psi^*(z)}{\Omega^*(z)}-\frac{k_2\Phi^*(z)}{\Omega^*(z)}-[\lambda_1(z^{-1})^{q-p-1}+\ldots+\lambda_{q-p}]\frac{1}{z}=\frac{q_1(z)}{q_2^-(z)},$$

где

$$\Omega^*(z)=\Omega(z)\,\Omega(z^{-1})=Q^*(z)\,B^*(z)\,D^*(z); \quad (12)$$

$$k_1\Psi^*(z)=k_1\Psi(z)\,\Psi(z^{-1})=P^*(z)\,[(\alpha+\beta)\,C^*(z)\,B^*(z)+$$

$$+(\gamma+\delta)\,A^*(z)\,D^*(z)];$$

$$k_2\Phi^*(z)=k_2\Phi(z)\,\Phi(z^{-1})=Q^*(z)\,[\beta C^*(z)\,B^*(z)+\delta A^*(z)\,D^*(z)];$$

$q_2^-(z)$ — неизвестный полином z, не имеющий нулей в области Γ^+.

Для решения задачи воспользуемся методом неопределенных коэффициентов с предварительным определением полюсов [6]. Первоначально найдем формальное алгебраическое решение уравнения (12):

$$H_0(z)=\{z^{q-p}q_1(z)\,\Omega(z)\,\Omega_1(z)+k_2\Phi(z)\,\Phi_1(z)\,z^{\omega-\psi+q-p-1}q_2^-(z)+$$

$$+(\lambda_1+\ldots+\lambda_{q-p}z^{q-p-1})\,\Omega(z)\,\Omega_1(z)\,q_2^-(z)]\times$$

$$\times\left[k_1z^{\omega-\psi+q-p-1}\Psi(z)\,\Psi_1(z)q_2^-(z)\right]^{-1}, \quad (13)$$

где

$$\Psi_1(z)=z^{\psi}\Psi(z^{-1});\ \Omega_1(z)=z^{\omega}\Omega(z^{-1}),\ \Phi_1(z)=z^{\varphi}\Phi(z^{-1}).$$

В качестве полюсов $H_0(z)$ необходимо взять лишь те (и все те) полюсы соотношения (13), которые расположены в области Γ^+. Этими полюсами являются нули $\Theta_i\,(i=1,\ \ldots,\ \psi)$ выражения $\psi^*(z)$, по модулю меньшие единицы, и нулевой полюс, кратность которого

$$s=\omega-\psi+q-p-1.$$

Решение уравнения (13), удовлетворяющее (9), необходимо разыскивать в виде рациональной функции с неопределенными $[(s+\psi+1)-(q-p)]$ коэффициентами полинома числителя:

$$H_0(z)=\frac{z^{s+\psi}+l_{s+\psi-1}z^{s+\psi-1}+\ldots+l_0}{z^s\prod\limits_{i=1}^{\psi}(z-\rho_i)}. \quad (14)$$

После подстановки (14) в исходное уравнение (12) получим

$$\frac{(z^{s+\psi}+\ldots+l_0)\,k_1\psi_1(z)}{z^{q-p}\Omega(z)\,\Omega_1(z)}-\frac{k_2\Phi(z)\,\Phi_1(z)\,z^{\omega-\psi-1}}{\Omega(z)\,\Omega_1(z)}-$$

$$-\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_{q-p}z^{q-p-1}}{z^{q-p}}=\frac{q_1(z)}{q_2^-(z)}. \quad (15)$$

Левая часть выражения (15), вообще говоря, содержит полюсы в области Γ^- и Γ^+. Для того чтобы соотношение (14) было решением (12), необходимо выбрать неопределенные коэффициенты l_j так, чтобы в левой части (12) полюсы в области Γ^+ отсутствовали. Это требование приводит к уравнениям для определения коэффициентов l_j, которые могут быть получены приравниванием нулю вычетов левой части (15) относительно полюсов $\rho_j\,(j = 1, \ldots, \omega)$, равных нулям выражения $\Omega(z)$, и нулевого $(q - p)$-кратного полюса. Общее число линейных уравнений составляет $(\omega + q - p)$, а число неизвестных коэффициентов l_j равно $\omega\,(s + \psi - q + p + 1 = \omega)$.

Правая часть системы уравнений содержит произвольные параметры $\lambda_i\,(i = 1, \ldots, q - p)$, которые всегда можно выбрать так, чтобы ранг расширенной матрицы был равен ω и система $(\omega + q - p)$ уравнений была совместна.

Рассмотрим подробнее наиболее распространенный случай, когда $q - p = 1$. Система линейных алгебраических уравнений имеет при этом вид

$$l_{\omega-1}\rho_1^{\omega-1} + \ldots + l_0 = \Delta_{11} - \rho_1^{\omega}, \qquad (16)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l_{\omega-1}\rho_\omega^{\omega-1} + \ldots + l_0 = \Delta_{1\omega} - \rho_\omega^{\omega},$$

$$l_0 = \lambda_1\Delta_2.$$

Здесь

$$\Delta_{1i} = \frac{k_2\Phi(\rho_i)\,\Phi(\rho_i)\,\rho_i^{\omega-\psi-1}}{k_1\psi_1(\rho_i)} \quad (i = 1, \ldots, \omega);$$

$$\Delta_2 = \frac{\Omega(0)\,\Omega_1(0)}{k_1\psi_1(0)}.$$

Определители миноров ω-го порядка матриц типа основной в выражении (16) равны произведению сомножителей $(\rho_i - \rho_j)$, число которых берется равным числу сочетаний C_ω^2. При $\rho_i \neq \rho_j$ ранг основной матрицы составляет ω. Если теперь выбрать произвольный множитель λ_1 так, чтобы определитель расширенной матрицы был равен нулю, то система (16) будет иметь единственное решение.

Пример. Оптимальные дискретные передаточные функции, рассчитанные по изложенной методике при характеристиках объекта управления, возмущений и оптимизирующего функционала

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{z - 0{,}5}, \quad \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{1}{z - 0{,}4}, \quad \frac{C(z)}{D(z)} = \frac{1}{z - 0{,}8},$$

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$$

имеют вид

$$H_0(z) = \frac{(z - 0{,}5)\,(z^2 - 0{,}985z + 0{,}213)}{z^2\,(z - 0{,}566)},$$

$$W_0(z) = \frac{0{,}919z^2 - 0{,}705z + 0{,}105}{z^2 - 0{,}985z + 0{,}213},$$

$$H_{\text{о. з. с.}}(z) = \frac{z^2 - 0{,}985z + 0{,}213}{z^2\,(z - 0{,}566)}.$$

Предлагаемый в работе [2] метод решения поставленной задачи не учитывает ограничений, накладываемых на вид $H_0(z)$, которые следуют из условия физической реализуемости оптимального регулятора. Оптимальная передаточная функция $H_0(z)$, найденная согласно [2] при тех же характеристиках объекта управления, возмущений и оптимизирующего функционала,

$$H_0(z) = \frac{0{,}7\,(z - 0{,}5)}{z - 0{,}24}$$

определяет по формуле (8) физически нереализуемый регулятор $W_0(z) = 0{,}43z + 0{,}16$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин. Линейные импульсные системы. Физматгиз, 1963.
2. П. Д. Крутько. Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами. Изд-во «Советское радио», 1967.
3. А. Г. Зайцев. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов при случайных внешних возмущениях. «Автоматика и телемеханика», 1963, № 4.
4. В. Б. Ларин. Об одной задаче аналитического конструирования оптимальных регуляторов. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 7.
5. А. М. Летов. Выбор оптимизирующего функционала в проблеме аналитического конструирования. Труды III Всесоюзного совещания по автоматике «Оптимальные системы. Статистические методы». Изд-во «Наука», 1967.
6. В. Я. Катковник, Р. А. Полуэктов. Многомерные дискретные системы управления. Изд-во «Наука», 1966.

ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ВИБРАЦИОННОГО СТЕНДА К ФОРМЕ КОШИ

А. Е. Божко

Харьков

При проведении виброиспытаний аппаратуры автоматики и радиоэлектроники исходят из предпосылки, что внешние вибрационные воздействия изменяются во времени линейно и монотонно [1, 2]. Основные методы испытаний включают воспроизведение вибраций по гармоническим законам или закону качающейся частоты.

Реальные же эксплуатационные вибрации имеют сложный характер и представляют собой функции с произвольно изменяющимися во времени амплитудами и частотами [2]. В связи с этим для оценки надежности аппаратуры, работающей при таких воздействиях, возникает необходимость в выборе имитируемых в лаборатории эквивалентных воздействий и проблема их воспроизведения.

При исследовании и разработке систем оптимального воспроизведения реальных вибраций нужно прежде всего решить такие задачи, как математическая формулировка условий воспроизведения, т. е. выбор метода имитации вибраций, математическое описание динамики испытательного стенда как объекта управления, определение алгоритмов оптимального управления вибрационным стендом. Остановимся на описании динамики вибрационного стенда электродинамического типа, как наиболее пригодного по физическим свойствам для широкополосного воспроизведения произвольных вибраций. Целью настоящего исследования является определение необходимых уравнений испытательного вибростенда, представленных в форме, удобной для осуществления синтеза оптимального управления.

Электродинамический вибратор представляет собой электромеханический преобразователь с одной степенью свободы. Он включает двигатель механических перемещений — подвижную катушку, которая жестко скреплена с платформой стенда и помещена в постоянное магнитное поле, создаваемое током подмагничивания неподвижной катушки.

Сила, приводящая в колебательное движение виброплатформу, возникает в результате взаимодействия переменного тока i подвижной катушки с постоянным магнитным полем B_δ, в котором находится эта катушка. Количественно сила взаимодействия определяется выражением

$$F = B_\delta l i, \qquad (1)$$

где l — длина проводника подвижной катушки.