УДК 537.86:519.517

В. А. ОМЕЛЬЧЕНКО, д-р физ.-мат. наук, *Ю. Н. ГОЛОБОРОДЬКО*

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА МНОГОАЛЬТЕРНАТИВНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ ПОВЫШЕННОЙ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. *СООБЩЕНИЕ 1*

В классической задаче многоальтернативного обнаружения сигналов по результатам наблюдения необходимо принять решение о наличии сигнала и к какому из заданных сигналов он относится. В ряде прикладных задач возникают ситуации, когда наблюдения не принадлежат ни помехе, ни одному из заданных сигналов. Кроме того, некоторые из сигналов не представляют интереса для наблюдателя и к тому же отсутствует информация для их различия.

В литературе аналогичные условия обсуждались для задач проверки бинарных гипотез. Так, известно решение классической задачи классификации аномальных наблюдений [1], использование в этих условиях для обнаружения сигналов статистики, родственной t-статистике Стьюдента [2], применение небайесовского критерия оптимальности, обеспечивающего заданную вероятность правильного обнаружения при минимизации собственной области сигнала [3].

Поставлена и решена подобная задача для случая распознавания сигналов как задача распознавания в условиях повышенной априорной неопределенности [4]. Она обобщена для случая, когда учитывается ограниченность ресурсов, отпущенных на построение устройства распознавания, рассмотрена многокритериальная задача распознавания в условиях повышенной априорной неопределенности [5].

Рассматривается многокритериальная задача многоальтернативного обнаружения гауссовских сигналов на фоне гауссовской помехи в условиях повышенной априорной неопределенности. Оптимизация решения осуществляется по совокупности показателей качества, включающей показатели, характеризующие эффективность многоальтернативного обнаружения, затраты на проектирование и реализацию устройства.

Постановка задачи. Пусть обнаружению подлежит $M+1$ сигнал, действующий на фоне помехи. Полагаем, что задана совокупность условий работы и ограничений на структуру и параметры устройства, решающего задачу. Пусть введены $M+2$ гипотезы, которые могут быть сделаны в отношении помехи и сигналов: H^0 — гипотеза об отсутствии сигнала; H^i, $i=1, M$ — гипотезы о заданных сигналах; H^{M+1} — гипотеза о действии неизвестного сигнала из объединенного $M+2$-го класса.

Полагается, что плотность вероятности вектора $\vec{X}$, по реализации которого $\vec{x}$ принимается решение, при справедливости гипотезы H^i, $i=\overline{0, M}$, известна с точностью до случайного векторного параметра: $N(\vec{x}|H^i, \vec{\alpha}^i)$, $i=\overline{0, M}$, где $N(\vec{x}|H^i, \vec{\alpha}^i)$ — нормальное распределение. Считается, что M сигналов гауссовские и действуют на фоне гауссовской помехи; дополнительно предполагается, что $M+1$-й сигнал представляет совокупность неизвестного числа сигналов, о которых нет априорных данных. Заданы априорные вероятности гипотез $P(H^i)=P_i$, причем $\sum_{i=0}^{M+1} P_i = 1$. Известны также обучающие выборки помехи и смеси заданных сигналов с помехой

$$\vec{x}^i(n_i) = (\vec{x}^i_1, \ldots, \vec{x}^i_r, \ldots, \vec{x}^i_{n_i}),\ i=\overline{0, M},$$

объемом n_i.

Ставится задача: обнаружить и различить M заданных сигналов и отнести в объединенный $M+1$-й класс сигналы, о которых нет априорных данных, необходимых для их различения. Требуется оптимизировать решение по векторному критерию

$$\vec{k}(\vec{\alpha}) = \tilde{k}'_{\text{нэ}},\ \tilde{k}_V,\ \tilde{k}_{\text{зп}},\ \tilde{k}_{\text{зр}}), \tag{1}$$

где $\tilde{k}'_{\text{нэ}}$ — показатель неэффективности, вводимый специальным образом в формулируемой задаче многоальтернативного обнаружения; $\tilde{k}_V$ — показатель объема критической области отклонения гипотезы о сигнале из $M+1$-го класса, учитывающий специфику повышенной априорной неопределенности [5]; $\tilde{k}_{\text{зп}}$ — показатель затрат на проектирование устройства; $\tilde{k}_{\text{зр}}$ — показатель затрат на реализацию устройства; $\vec{\alpha}_{\text{зр}}$ — оценка неизвестного векторного параметра, найденная по обучающей выборке.

Обсудим особенности задания частных показателей из (1).

При наличии всей необходимой информации о $M+1$-ном сигнале и помехе средняя вероятность ошибки принятия $M+2$-х гипотез равна

$$P^{\Sigma}_{\text{ош}\,(M+2)} = P^{\Sigma}_{\text{ош}\,(M+1)} + \sum_{l=0}^{M} P_l P(G^{M+1}/l) + \sum_{l=0}^{M} P_{M+1} P(G^l/M+1).$$

Здесь
$$P^{\Sigma}_{\text{ош}\,(M+1)} = \sum_{i=0}^{M}\sum_{l=0}^{M} P_l P(G^i/l),\ l \neq i, \tag{2}$$

—составляющая средней вероятности ошибки, определяемая неправильным принятием $M+1$-ной гипотезы H^i ($i=\overline{0, M}$);

$$\sum_{l=0}^{M} P_l P(G^{M+1}/l) \tag{3}$$

— составляющая средней вероятности ошибки, полученная выбором гипотезы о действии неизвестного $M+1$-го сигнала, когда фактически никакого сигнала нет или на фоне помехи действует один из M заданных сигналов;

$$\sum_{l=0}^{M} P_{M+1} P(G^l/M+1) \tag{4}$$

— составляющая средней вероятности ошибки, определяемая принятием гипотезы H^0 об отсутствии сигнала или о действии одного из M заданных сигналов, когда фактически присутствует неизвестный $M+1$-й сигнал;

$$G^l,\ i = \overline{0, M+1},\ G^i \cap G^l = \varnothing,\ i \neq l$$

— области, на которые нерандомизированное решающее правило разделяет выборочное пространство.

По имеющейся априорной информации о сигналах и помехе можно оценить составляющие (2), (3) ошибки, а для учета составляющей (4) рационально ввести [5] объем собственной области $G = \bigcup\limits_{i=0}^{M} G^i$ помехи и смеси заданных сигналов с помехой. При этом показатель неэффективности $\hat{k}'_{\text{нэ}}$ может быть определен соответствующим образом через составляющие (2), (3), а показатель объема k_V — через объем области G.

В предположении, что проектирование и реализация обнаружителя осуществляются на базе средств вычислительной техники, показатели затрат на проектирование и реализацию $\hat{k}_{\text{зп}}$, $\hat{k}_{\text{зр}}$ рационально ввести через динамическую меру сложности решения [5] — объемы памяти и вычислений, необходимые для реализации этих этапов.

Построение эффективного решения по сокращенной совокупности показателей качества. В соответствии с разработанной методологией построения решений многокритериальных задач распознавания сигналов [5] здесь также сначала необходимо найти решение, эффективное по сокращенной совокупности показателей качества, а далее на его основе построить решения, слабо эффективные по всей совокупности показателей (1).

Найдем эффективное решение по сокращенной совокупности показателей качества

$$\vec{k}_{\text{с}}(\vec{\alpha}) = (\hat{k}'_{\text{нэ}},\ \hat{k}_V). \tag{5}$$

Можно показать, что векторный критерий (5) приводит к задаче

$$\max \sum_{l=0}^{M} P_l \int\limits_{G^l} \hat{W}(\vec{\varepsilon}/H^l)\, d\vec{\varepsilon};$$
$$\sum_{l=0}^{M} \int\limits_{G^l} d\vec{\varepsilon} = V_{G_{\text{доп}}}, \tag{6}$$

где $V_{G_{\text{доп}}}$ — ограничение на объем критической области; $\hat{W}(\vec{\varepsilon}/H^l)$ — оценка плотности вероятности, используемой при принятии решения статистики $\vec{\varepsilon}$ сигнала при условии, что справедлива гипотеза H^l.

Отсюда получается следующее правило:

$$\begin{gathered} H^i: \max_{l=\overline{0,\,M}} P_l \hat{W}(\vec{\varepsilon}/H^l) \geqslant \lambda, \\ P_i \hat{W}(\vec{\varepsilon}/H^i) \geqslant P_l \hat{W}(\vec{\varepsilon}/H^l),\quad l=\overline{0,\ M},\ l \neq i \end{gathered} \tag{7}$$

— принимается гипотеза H^0 $(i=0)$ об отсутствии сигнала или гипотеза H^i $(i=\overline{1,\ M})$ о действии i-го заданного сигнала;

$$H^{M+1}: \max P_l \hat{W}(\vec{\varepsilon}/H^l) < \lambda,\ l=\overline{0,\ M}$$

— принимается гипотеза H^{M+1} о действии неизвестного сигнала из $M+1$-го класса. Порог λ определяется при решении (6).

Обсудим особенности второго этапа решения задачи. Применение к задаче (1) метода последовательных уступок приводит к следующей задаче скалярной оптимизации

$$\hat{k}_{\text{зр мин}} = \min_{C \in M_{\text{д}}} \hat{k}_{\text{зр}};\quad \hat{k}'_{\text{нэ}} \leqslant \hat{k}'_{\text{нэ мин}} + \Delta k'_{\text{нэ}};$$
$$\hat{k}_V \leqslant \hat{k}_{V\,\text{мин}} + \Delta k_V;\quad k_{\text{зп}} \leqslant \hat{k}_{\text{зп мин}} + \Delta k_{\text{зп}}, \tag{8}$$

где $\hat{k}'_{\text{нэ мин}}$, $\hat{k}_{V\,\text{мин}}$, $\hat{k}_{\text{зп мин}}$ — минимальные значения показателей качества, $\Delta k'_{\text{нэ}}$, Δk_V, $\Delta k_{\text{зп}}$ — «уступки», характерные для решения задачи методом уступок; $M_{\text{д}}$ — множество допустимых решений; C — некоторое решение.

Известно, что решение, удовлетворяющее (8), зависит от величины уступок, но, задав множество различных уступок, можно прийти к решению, которое получается при использовании и любого другого метода [6].

Согласно (8) решение задачи (1) ищем среди решений, в определенном смысле близких к эффективным по первым двум показателям качества, которые удовлетворяют заданым ограничениям на показатель затрат на проектирование. Полагая, что проектирование выполняется на ЭВМ, последнее ограничение можно задать эквивалентно как ограничение на общий объем вычислений на ЭВМ [5]. Указанные решения задаются на основе (7) при варьировании используемых моделей сигналов и изменении базисов представления сигналов и принятии решений не только по наблюдаемым реализациям сигналов, но и по некоторым удобным статистикам, найденным по выборкам сигналов. Такие меры позволяют существенно изменять затраты на реализацию устройства.

Приведем примеры решающих правил многоальтернативного обнаружения сигналов, полученные описанным образом.

Считая, что решение принимается по реализации гауссовского сигнала, т. е. $\vec{\varepsilon} = \vec{x}$, из (7) получаем

$$H^l : (\vec{x} - \vec{\mu}^l)^{\text{tr}} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}^l) \leqslant \Lambda^l,\ l = \overline{0, M};$$
$$(\vec{x} - \vec{\mu}^l)^{\text{tr}} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}^l) - \hat{\lambda}_{nl} \leqslant (\vec{x} - \vec{\mu}^i)^{\text{tr}} (\hat{R}^i)^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}^i) - \hat{\lambda}_{ni},$$
$$l = \overline{0, M},\ l \neq i,\ i = \overline{0, M},$$
$$H^{M+1} : (\vec{x} - \vec{\mu}^l)^{\text{tr}} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}^l) > \Lambda^l,\ l = \overline{0, M}, \tag{9}$$

где
$$\Lambda^l = \ln \left\{ \frac{(2\pi)^{2N} \,|\, \hat{R}^l \,|\, \lambda^2}{P_l^2} \right\};$$

$\vec{\mu}^l$, $\hat{R}^l$ — выборочное среднее и выборочная корреляционная матрица вектора $\vec{X}^l$.

Если решение принимается по выборке $\vec{x}^{(\nu)}$ объема ν, т. е. $\varepsilon = \vec{x}^{(\nu)}$,

$$H^l : \sum_{r=1}^{\nu} (\vec{x}_r - \hat{\vec{\mu}}^l)^{tr} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x}_r - \hat{\vec{\mu}}^l) \leqslant \Lambda^{(\nu) l}, \ l = \overline{0, M},$$

$$\sum_{r=1}^{\nu} (\vec{x}_r - \hat{\vec{\mu}}^l)^{tr} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x}_r - \hat{\vec{\mu}}^l) - \hat{\lambda}_{nl}^{(\nu)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{\nu} (\vec{x}_r - \hat{\vec{\mu}}^l)^{tr} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x}_r - \hat{\vec{\mu}}^l) - \hat{\lambda}_{nl}^{(\nu)}, \ l = \overline{0, M}, \ l \neq i;$$

$$H^{M+1} : \sum_{r=1}^{\nu} (\vec{x}_r - \hat{\vec{\mu}}^l)^{tr} (\hat{R}^l)^{-1} (\vec{x}_r - \hat{\vec{\mu}}^l) > \Lambda^{(\nu) l}, \ l = \overline{0, M}. \tag{10}$$

Здесь
$$\Lambda^{(\nu) l} = \ln \left\{ \frac{\lambda^2 (2\pi)^{2\nu N} |\hat{R}^l|^{\nu}}{P_l^2} \right\};$$

N — размерность вектора $\vec{X}$; tr — символ транспонирования.

Используя модели сигналов с одинаковыми средними векторами, находим [7]

$$H^l : \mathrm{Sp}\{(\hat{R}_0^l)^{-1} \hat{R}_{0\nu}\} \leqslant \Lambda^{(\nu) l}, \ l = \overline{0, M};$$
$$\mathrm{Sp}\{(\hat{R}_0^l)^{-1} \hat{R}_{0\nu}\} - \hat{\lambda}_{nl}^{(\nu)} \leqslant \mathrm{Sp}\{(\hat{R}_0^l)^{-1} \hat{R}_{0\nu}\} - \hat{\lambda}_{nl}^{(\nu)}, \ l = \overline{0, M}, \ l \neq i;$$
$$H^{M+1} : \mathrm{Sp}\{(\hat{R}_0^l)^{-1} \hat{R}_{0\nu}\} > \Lambda^{(\nu) l}, \ l = \overline{0, M}, \tag{11}$$

где $\hat{R}_0^l = \frac{1}{n_l} \sum_{r=1}^{n_l} (\vec{x}_r - \hat{\vec{\mu}}_0)(\vec{x} - \hat{\vec{\mu}}_0)^{tr}$; $\hat{R}_{0\nu} = \sum_{r=1}^{\nu} (\vec{x}_r - \hat{\vec{\mu}}_0)(\vec{x}_r - \hat{\vec{\mu}}_0)^{tr}$;

$$\hat{\vec{\mu}}_0 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{M} \sum_{r=1}^{n_l} \vec{x}_r^l; \ n = \sum_{l=0}^{M} n_l;$$

Sp — след матрицы.

Основным источником задания практически произвольного множества решений является замена базиса представления сигналов и получения решающих правил типа (9)—(11) в этих базисах.

Решающие правила можно также строить, используя те или иные статистики сигналов. При этом в наиболее общем виде получаются правила типа (7), в которых используются функции правдоподобия соответствующих статистик. Однако для упрощения реализации обнаружителя можно применять более простые решающие правила, в которых и статистики и сами алгоритмы выбраны на эвристической основе. В частности, выбирая в качестве признаков совокупности координат энергетических спектров сигналов в некотором ортонормированном базисе и применяя критерий минимума евклидова расстояния до эталона, получаем правило

$$H^l: \sum_{j=1}^{N} [\hat{G}(j) - \hat{G}^l(j)]^2 \leqslant \Lambda_G^l, \; l = \overline{0,\ M}; \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{N} [\hat{G}(j) - \hat{G}^l(j)]^2 \leqslant \sum_{j=1}^{N} [\hat{G}(j) - \hat{G}^l(j)]^2, \; l = \overline{0,\ M}, \; l \neq l;$$

$$H^{M+1}: \sum_{j=1}^{M} [\hat{G}(j) - \hat{G}^l(j)]^2 > \Lambda_G^l, \; l = \overline{0,\ M}.$$

Здесь

$$\hat{G}_j^l = \frac{1}{n_l} \sum_{r=1}^{n_l} |c_{jr} - \hat{\mu}_{jc}^l|^2$$

— оценка j-й координаты энергетического спектра l-го сигнала, найденная по обучающей выборке объема n_l;

$$\hat{G}_j = \frac{1}{\nu} \sum_{r=1}^{\nu} |c_{lr} - \hat{\mu}_{jc}|^2$$

— оценка j-й координаты энергетического спектра принятого сигнала по выборке объема ν; $\nu \ll n_l$; $\hat{\mu}_{jc} = \frac{1}{\nu} \sum_{r=1}^{\nu} c_{jr}$; $\hat{\mu}_{jc}^l = \frac{1}{n_l} \sum_{r=1}^{n_l} c_{jr}^l$; c_{jr} — j-я координата представления r-й реализации сигнала в выбранном базисе.

Применимы и другие правила выбора решений, но в соответствии с особенностями задачи многоальтернативного обнаружения сигналов они характеризуются двухэтапностью применяемых процедур: сначала в результате сравнения значения используемой статистики с некоторым порогом принимается решение о том, какой сигнал действует (заданный или неизвестный), а далее по тем или иным признакам принимается решение о различении заданных сигналов.

Приведенные примеры иллюстрируют особенности правил выбора решений из формируемого множества полностью описанных решений [5]. Число таких правил, как отмечено, определяется из условия, чтобы общий объем вычислений на этапе проектирования не превышал допустимой величины. В критериальном пространстве [5] из этого множества по совокупности показателей ($k_{нэ}'$, $k_{зп}$) стандартными методами (например, методом прямоугольников) выделяются нехудшие решения. Их совокупность и является искомым множеством решений рассматриваемой многокритериальной задачи обнаружения. Для нахождения таких решений существенно используется моделирование на ЭВМ и заданная обучающая выборка сигналов. При наличии дополнительной априорной информации об относительной важности частных показателей $\hat{k}'_{нэ}$ и $\hat{k}_{зр}$ можно ввести результирующий показатель, оптимизируя который, из найденного множества решений алгоритмически получаем единственное [5].

Список литературы: 1. *Андерсон Т. В.* Введение в многомерный статистический анализ. М., 1963. 500 с. 2. *Теория* обнаружения сигналов / Под ред. П. А. Бакута. М., 1984. 440 с. 3. *Сенин А. Г.* Распознавание случайных сигналов. Новосибирск, 1974. 76 с. 4. *Омельченко В. А.* Основы спектральной теории распознавания сигналов. Х., 1983. 159 с. 5. *Омельченко В. А.* Многокритериальные задачи распознавания радиосигналов. Ч.2. Распознавание сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности // Отбор и передача информации. К., 1987. С. 84—85. 6. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982. 254 с. 7. *Омельченко В. А., Омельченко А. В., Колесников О. А.* Распознавание сигналов по выборкам различного объема. Сообщение 1 // Радиотехника. 1985. Вып. 73. С. 3—9.

Поступила в редколлегию 10.02.88