

## МЕТОДИКА БИФУРКАЦИОННОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМА RED ПРИ КВАДРАТИЧНОЙ МОДЕЛИ БЛОКИРОВКИ ПАКЕТОВ

Старкова Е.В.

Харьковский национальный университет радиозлектроники  
61166, Харьков, пр. Ленина, каф. Телекоммуникационных систем, тел. (057) 702-13-20,  
E-mail: Elena\_Starkova@ukr.net; факс (057) 702-13-20

In this article is offered a method of analysis of bifurcational properties of dynamic systems represented by differential equations on the example of the model of TCP-session of data communication at the management by a length of queue with the use of mechanism of congestion avoidance the RED. Quadratic dependence of the packet blocking probability on the flow density is provided.

Решение задачи обеспечения устойчивого функционирования телекоммуникационных систем (ТКС) играет немаловажную роль в процессе эффективного управления сетевыми ресурсами (маршрутизации, обслуживания очередей и др.). Однако механизмы и алгоритмы, положенные в основу современных сетевых протоколов, часто носят эвристический характер, не решая задач устойчивости. Разработка новых и усовершенствование существующих моделей различных сетевых процессов в сторону использования более адекватного, как правило, нелинейного описания неизбежно влечет исследование областей устойчивого функционирования сети.

В этой связи заслуживает внимания подход, основанный на описании процесса изменения скорости передачи данных TCP-сеанса с помощью дифференциальных нелинейных уравнений [1]. В модели рассматривается простейший фрагмент IP-сети, состоящий из двух сетевых узлов, которые при установке и поддержке TCP-сеанса используют управление длиной очереди с помощью механизма RED (Random Early Detection). Тогда изменение плотности потока (скорости передачи данных) можно представить в виде стохастического дифференциального уравнения [1]:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{1 - P_L(\lambda, t)}{R^2} - \frac{P_L(\lambda, t)}{2} \lambda^2(t), \quad (1)$$

где  $\lambda(t)$  – плотность TCP-потока;  $P_L(\lambda, t)$  – вероятность потери сегмента;  $R$  – интервал времени, в течении которого должна быть подтверждена неискаженная доставка каждой из переданных последовательностей (время отклика канала).

Таким образом, математическая модель сеанса передачи данных (1) носит четко выраженный нелинейный характер. Определив и проанализировав области устойчивого функционирования сети, основываясь на данной модели, можно своевременно выявить и предотвратить перегрузки ТКС и связанных с этим потерь пакетов (сегментов).

В ходе исследований под устойчивостью понимался характер реакции динамической системы, каковой является ТКС, на малое возмущение ее состояния. Предполагается, что ТКС будет устойчивой, если незначительные изменения структурных и функциональных параметров сети не вызывают существенного изменения ее состояния (например, загруженности маршрутизаторов и трактов передачи). Для анализа устойчивости широкое распространение получили теория бифуркаций динамических систем и теория катастроф [2], с помощью которых можно проанализировать причины и последствия внезапных скачкообразных изменений в поведении динамической системы при незначительном изменении ее внутренних параметров или внешних условий.

Таким образом, задача анализа устойчивости состоит в исследовании изменения во времени малого возмущения [3], вносимого в частное решение исходного уравнения (1). Согласно методике на первом шаге осуществляется поиск стационарных состояний системы (решений исходного уравнения). На втором производится анализ устойчивости системы в окрестности полученных стационарных решений. Далее осуществляется математический анализ бифуркаций, в широком смысле обозначающих всевозможные каче-

ственные перестройки и метаморфозы в поведении системы при изменении параметров, от которых зависит ее работа [3].

Для проведения анализа устойчивости функционирования ТКС в рамках предлагаемой методики были рассмотрены различные модели блокировки пакетов (потери сегментов данных):

1) вероятность блокировки  $P_L$  не зависит от времени и плотности потока данных  $\lambda(t)$ , т.е.  $P_L(t, \lambda) = const$  (рис. 1);

2) вероятность  $P_L$  имеет линейную зависимость от плотности потока  $\lambda(t)$  ( $P_L(\lambda) = k\lambda + b$ , где  $k = \frac{1}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}$  и  $b = 1 - \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}$ ). Известно, что в механизме RED вероятность отбрасывания пакетов (блокировки сегментов) представляет собой функцию, линейно зависящую от среднего размера очереди (рис. 2).

3) вероятность  $P_L$  имеет квадратичную зависимость от плотности потока  $\lambda(t)$  ( $P_L(\lambda) = k\lambda^2$ , где  $k = \frac{1}{\lambda_{max}^2}$ ), как показано на рис. 3.

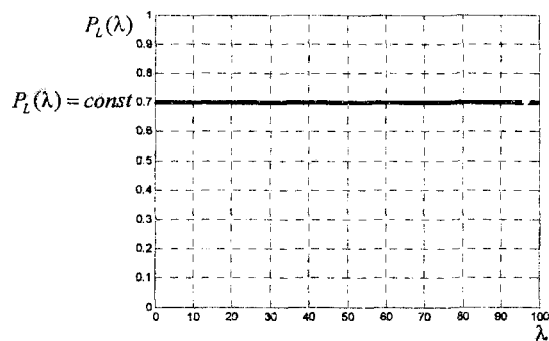


Рис. 1

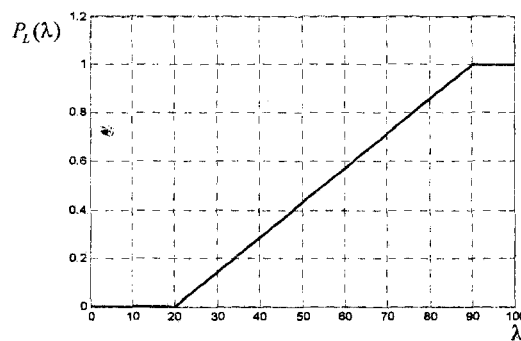


Рис. 2

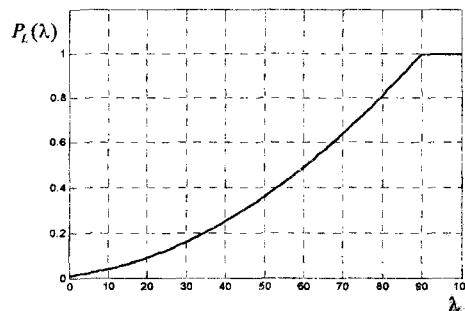


Рис. 3

В первом случае решением уравнения являются два действительных корня (решения исходного уравнения), во втором – три корня (действительный и два комплексных). В обоих случаях результаты анализа свидетельствуют о том, что в рамках предлагаемой методики процесс борьбы с перегрузками обладает устойчивостью [4, 5]. Причем в первом случае точке бифуркации соответствует случай, когда отбрасываются все входящие сегменты данных, т.е. с вероятностью блокировки сегментов равной единице ( $P_L = 1$ ). В третьем случае, учитывая соответствующие подстановки, выражение (1) принимает вид:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{1 - k\lambda^2(t)}{R^2} - \frac{k\lambda^2(t)}{2} \lambda^2(t) = \frac{1}{R^2} - \frac{k}{R^2} \lambda^2(t) - \frac{k}{2} \lambda^4(t) \quad (2)$$

Основываясь на полученной модели, проведем соответствующий анализ устойчивости функционирования сети.

**Шаг 1.** Согласно методике на первом шаге осуществляем поиск стационарных состояний системы (2), для которых характерно  $\frac{d\lambda(t)}{dt} = 0$ , т.е.

$$\lambda^4(t) + \frac{2}{R^2}\lambda^2(t) - \frac{2}{kR^2} = 0.$$

В результате решения уравнения получаем четыре корня

$$\begin{aligned} \lambda_1^0 &= \frac{1}{kR} \sqrt{-k \left( k - \sqrt{k^2 + 2kR^2} \right)}, & \lambda_2^0 &= -\frac{1}{kR} \sqrt{-k \left( k - \sqrt{k^2 + 2kR^2} \right)}, \\ \lambda_3^0 &= \frac{1}{kR} \sqrt{-k \left( k + \sqrt{k^2 + 2kR^2} \right)}, & \lambda_4^0 &= -\frac{1}{kR} \sqrt{-k \left( k + \sqrt{k^2 + 2kR^2} \right)}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание физический смысл величин, входящих в состав исходного уравнения, решения  $\lambda_1^0$  и  $\lambda_2^0$  являются действительными числами (причем,  $\lambda_1^0$  положительным,  $\lambda_2^0$  отрицательным), а решения  $\lambda_3^0$  и  $\lambda_4^0$  – комплексно сопряженными числами.

**Шаг 2.** На втором шаге производим анализ устойчивости системы в окрестности полученных стационарных точек (в данном случае  $\lambda_1^0$  и  $\lambda_2^0$ ). Пусть  $\lambda^0(t)$  есть некоторое частное решение уравнения (2). Исследуем устойчивость этого решения (состояния), для чего введем в рассмотрение переменную  $y(t)$ , которая задает малое отклонение от частного решения:

$$y(t) = \lambda(t) - \lambda^0(t), \quad (3)$$

где  $\lambda(t)$  – возмущенное решение;

При этом задача состоит в исследовании изменения во времени малого возмущения, в данном случае  $y(t)$ , которая подчиняется уравнению (2). Обозначив левую часть уравнения (1) через  $F$ , эволюцию малого возмущения  $y(t)$  можно представить в виде линейного уравнения

$$\dot{y} = A(t)y, \text{ где } A(t) = \left. \frac{dF}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^0(t)}, \quad (4)$$

которое получено с учетом разложения функции  $F$  в степенной ряд в окрестности частного решения  $\lambda^0(t)$  [3]:

$$F(y) = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^0(t)} \cdot y(t) + \left. \frac{d^2F}{dx^2} \right|_{x=x^0(t)} \cdot y^2(t) + \dots, \quad (5)$$

где производные функции  $F$  должны вычисляться в точках, соответствующих частному решению.

Рассмотрим уравнение для возмущений (4) применительно к стационарному состоянию  $\lambda_1^0$ :

$$\begin{aligned} \dot{y} = -2k \left( \frac{1}{R^2} \lambda_1^0 + (\lambda_1^0)^3 \right) y = -2k \frac{1}{R^2} \left( \left( \frac{1}{kR} \sqrt{-k \left( k - \sqrt{k^2 + 2kR^2} \right)} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{kR} \sqrt{-k \left( k - \sqrt{k^2 + 2kR^2} \right)} \right)^3 \right) y = Ay, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$A = \left. \frac{dF}{d\lambda} \right|_{\lambda_1^0} = -2k \frac{1}{R^2} \left( \left( \frac{1}{kR} \sqrt{-k(k - \sqrt{k^2 + 2kR^2})} \right) + \left( \frac{1}{kR} \sqrt{-k(k - \sqrt{k^2 + 2kR^2})} \right)^3 \right).$$

Решением уравнения (6) будет  $y = \exp(At)$ . Возмущение  $y$  экспоненциально затухает во времени ( $A$  есть отрицательное число). Это означает, что состояние  $\lambda_1^0$  устойчиво.

Так как второе состояние  $\lambda_2^0$  отличается от первого только знаком, то решение уравнения (6) в этом случае будет экспоненциально нарастающим во времени, т.е. стационарное состояние  $\lambda_2^0$  неустойчиво. Учитывая, что  $\lambda(t)$  определяет плотность потока сегментов данных, т.е.  $\lambda(t) > 0$ , то решением уравнения (2) может быть только положительный корень. Следовательно, стационарное состояние  $\lambda_1^0$  устойчиво, что говорит об устойчивости модели (2) в рамках предложенной методики.

**Шаг 3.** Следующим шагом является математический анализ бифуркаций. Для действительных корней, как и в случае первой модели ( $P_L(t, \lambda) = const$ ), точке бифуркации соответствует случай, когда отбрасываются все приходящие пакеты, т.е. вероятность блокировки сегментов равна единице ( $P_L = 1$ ). При этом имеет место так называемая бифуркация «двукратное равновесие» [4].

Все вышесказанное говорит об адекватности исследуемой модели реальному процессу передачи данных.

Таким образом, результаты анализа в рамках предложенной методики свидетельствуют о том, что, в целом процесс борьбы с перегрузками обладает устойчивостью как при условии независимости вероятности потери сегментов данных  $P_L$  от времени и плотности потока данных  $\lambda(t)$ , т.е. при  $P_L(t, \lambda) = const$ , так и при условии линейной  $P_L(\lambda) = k\lambda + b$  и квадратичной зависимости  $P_L(\lambda) = k\lambda^2$ . В первом ( $P_L(t, \lambda) = const$ ) и третьем ( $P_L(\lambda) = k\lambda^2$  для действительных корней) случаях возникает явление бифуркации, что с физической точки зрения можно определить как момент, когда отбрасываются все приходящие сегменты ( $P_L = 1$ ). Исследование комплексных корней, полученных при использовании последних двух моделей потери сегментов данных, требует дальнейшего детального анализа на предмет возникновения более сложных состояний равновесия (предельных множеств динамической системы), например, фокусов, узлов, предельных циклов.

#### Литература:

1. Синелобов А.В. Кинетическая модель TCP-сеансов передачи данных // Электросвязь. – 2005. – № 2. – С. 26-30.
2. Арнольд В.И. Теория катастроф. 3-е изд., доп. // Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 128 с.
3. Анищенко В.С. Устойчивость, бифуркации, катастрофы // Соросовский образовательный журнал. 2000. – № 6. – С. 105-109.
4. Старкова Е.В. Анализ устойчивости функционирования механизмов борьбы с перегрузками телекоммуникационной сети // Радиотехника. 2007. – № 151. – С. 78-84.
5. Старкова Е.В., Пастушенко О.Н. Анализ устойчивости TCP-сеанса при различных моделях блокировки пакетов // Друга міжнародна науково-технічна конференція „Проблеми телекомунікацій”: Збірник тез. – Київ: НТУУ „КПІ”, 2008 – С. 353-354.