

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ЗАПАСАМИ

Н. В. Святская

Киев

Математическое описание управления запасами на складах промышленных предприятий определяется одним из трех основных режимов их работы:

1. Поступление на склад и расход материалов детерминированы, определены.

2. Спрос случаен, поставки регулярны.

3. Спрос и поставки случайны по величине и во времени.

Для первого режима расчетными (управляемыми) величинами являются размер партии и точка заказа. Как правило, реальная модель промышленного предприятия редко отвечает задачам первого типа. Спрос чаще всего — случайная величина.

Для режимов работы второго типа управляемые величины — размер партии, точка заказа и страховой запас, который расходуется при повышенной интенсивности спроса.

Существует ряд предприятий, математическое описание работы складов которых относится к задачам третьего типа. В этом случае можно лишь указать величину минимального уровня запаса, при достижении которого принимаются меры к срочному приобретению данного вида материала.

Для наиболее рационального ведения хозяйства нужно стремиться к тому, чтобы управление запасами предприятия отвечало задаче второго типа. В этом случае самый трудоемкий расчет выпадает на долю страхового запаса, поэтому крайне важно получить для него простое выражение.

В задачах второго и третьего типа оптимальная величина страхового запаса рассчитывается из условий минимальных суммарных издержек от содержания запаса и его дефицитности. Определение оптимального размера дефицита (вероятность простоя) производится в целом ряде работ [1, 2] и т.д. Однако, находя допустимую величину дефицита, авторы их указывают лишь на сам факт простоя без учета его продолжительности.

Исходя из изложенного, можно сформулировать задачи нашей работы:

1) определение допустимой вероятности простоя с учетом его продолжительности;

2) определение оптимальной величины страхового запаса при случайном спросе и регулярных поставках.

1. Определение допустимой вероятности простоя с учетом его продолжительности

Запишем выражение для математического ожидания стоимости простоя предприятия

$$c_2 \int_0^{n_{\text{ср}}} (n_{\text{ср}} - n) p(n) dn, \quad (1)$$

где c_2 — удельные издержки дефицитности за один год, которые можно определить заранее;

$n_{\text{ср}}$ — среднее время доставки материала на склад от поставщика;

$p(n)$ — дифференциальный закон распределения полного исчерпания запаса за n дней при случайном спросе (функция распределения спроса может быть неизвестна, достаточно знать лишь ее параметры — математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2).

Издержки содержания избыточного запаса могут быть выражены интегралом

$$c_1 \int_{n_{\text{ср}}}^{\infty} (n - n_{\text{ср}}) p(n) dn. \quad (2)$$

Дифференциальный закон распределения полного исчерпания запаса A за n дней имеет вид

$$p(n) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi T}} \frac{A^2}{m_x n^3} e^{-\frac{\left(\frac{A^2}{m_x n} - A\right)^2}{2\sigma_x^2 n_{\text{ср}}}}.$$

Заметив, что $A = m_x T$, где T — математическое ожидание времени полного израсходования запаса A , заменим переменную

$$x = m_x \frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}.$$

Тогда

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

а издержки простоя предприятия (1) будут

$$c_2 \int_{\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}}^{\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}} \left(\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}} - x \right) p(x) dx.$$

Соответственно выражение (2) запишется так:

$$c_1 \int_{\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}}^{\infty} \left(x - \frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}} \right) p(x) dx,$$

c_1 — удельные издержки содержания запаса за один год (определяется заранее).

Минимизируем предполагаемое значение (математическое ожидание) суммарных издержек:

$$F = \min \left(c_2 \int_{-\infty}^{\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}} \left(\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}} - x \right) p(x) dx + c_1 \int_{\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}}^{\infty} \left(x - \frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}} \right) p(x) dx \right), \quad (3)$$

т.е. установим, для какого резерва $A = m_x T$ и для какого значения коэффициента риска p предполагаемое значение суммарных издержек F минимально.

Это обычная задача дифференциального исчисления:

$$F = \min, \text{ если } \frac{dF}{dA} = 0 \text{ или } \frac{dF}{dT} = 0;$$

$$\frac{d}{dT} \left[c_2 \int_{-\infty}^{\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}} \left(\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}} - x \right) p(x) dx + c_1 \int_{\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}}^{\infty} \left(x - \frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}} \right) p(x) dx \right] = 0. \quad (4)$$

Преобразуем выражение (4), вычислив содержащиеся в нем интегралы. Для этого воспользуемся теоремой математического анализа о дифференцировании под знаком интеграла.

Получим

$$c_2 \left(\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}} \right)' \int_{-\infty}^{\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}} p(x) dx - c_1 \left(\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}} \right)'_T \int_{\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}}^{\infty} p(x) dx = 0 \quad (5)$$

или

$$\frac{\int_{-\infty}^{\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}} p(x) dx}{\int_{\frac{n_{\text{ср}} - T}{\sigma_x \sqrt{T}}}^{\infty} p(x) dx} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (6)$$

Заметим, что интеграл в знаменателе этого выражения есть полная вероятность простоя, т.е. это коэффициент риска p .

Интеграл в числителе есть вероятность избыточного резерва, т.е. $1 - p$.

Тогда оптимальный коэффициент риска

$$p = \frac{c_2}{c_1 + c_2}, \quad (7)$$

а оптимальный коэффициент доверия

$$1 - p = \frac{c_1}{c_1 + c_2}. \quad (8)$$

Итак, выражения (7) и (8) по форме совпадают с выражениями для оптимальных величин риска и коэффициента доверия, найденных в [1, 2], но имеют более глубокое содержание — учитывается не только факт

простая, но и его длительность. Такое определение коэффициента риска стало возможным при известном $p(n)$ — дифференциальном законе распределения полного исчерпания запаса.

II. Определение оптимальной величины страхового запаса при случайном спросе и регулярных поставках

Предполагается, что

- 1) спрос случаен, стационарен;
- 2) поставки регулярны, время доставки постоянно и равно $n_{\text{ср}}$;
- 3) размер заказа — величина постоянная, определяемая известным методом [2].

Обозначим:

m_x — средняя интенсивность спроса на участке в n дней;

$m_{\text{ср}}$ — математическое ожидание функции спроса;

σ_x — стандартное отклонение случайной функции спроса;

q_x — размер страхового запаса;

$q_{\text{опт}}$ — оптимальный размер страхового запаса;

$n_{\text{ср}}$ — время между поставками;

Q — размер текущего запаса для периода $n_{\text{ср}}$ дней.

Известно [3], что вероятности отклонения среднего за некоторый промежуток времени $n_{\text{ср}}$ от математического ожидания распределены по нормальному закону с дисперсией $\frac{\sigma_x^2}{n_{\text{ср}}}$.

Запишем распределение интенсивности спроса на участке в $n_{\text{ср}}$ дней:

$$p(m_x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(m_x - m_{\text{ср}})^2}{2\sigma_x^2 n_{\text{ср}}}} dm_x. \quad (9)$$

Интенсивность спроса m_x на участке в $n_{\text{ср}}$ дней при полном исчерпании запаса можно записать как

$$m_x = \frac{Q + q_x}{n_{\text{ср}}}, \quad (10)$$

а среднюю интенсивность спроса как

$$m_{\text{ср}} = \frac{Q}{n_{\text{ср}}}. \quad (11)$$

Выражение для распределения вероятностей величин страхового запаса q_x при постоянном времени исчерпания запаса $Q + q_x$ за $n_{\text{ср}}$ дней найдем с помощью соотношения для монотонно возрастающей функции [5]:

$$p(q_x) = p(m_x) \cdot (m_x)'_{q_x} \quad (12)$$

или

$$p(q_x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi n_{\text{ср}}}} e^{-\frac{q_x^2}{2\sigma_x^2 n_{\text{ср}}}} dq; \quad (13)$$

σ_q — стандартное отклонение функции $p(q_x)$

$$\sigma_q = \sigma_x \sqrt{n_{\text{ср}}}. \quad (14)$$

Тогда

$$p\left(\frac{q_x}{\sigma_x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q_{\text{опт}}}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{2}} dq. \quad (15)$$

Вероятность исчерпания такого запаса $q_{\text{опт}}$, при наличии которого вероятность простоя оптимальна (т.е. коэффициент риска) предстанет в виде

$$p\left(\frac{q_{\text{опт}}}{\sigma_q}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q_{\text{опт}}}^{\infty} e^{-\frac{q_x^2}{2}} dq_x = \frac{c_1}{c_1 + c_2}. \quad (16)$$

Определим величину $\frac{q_{\text{опт}}}{\sigma_q}$ как p — квантиль нормального распределения с параметрами $(0; 1)$:

$$\frac{q_{\text{опт}}}{\sigma_q} = N^{-1}\left(\frac{c_1}{c_1 + c_2}, 0, 1\right), \quad (17)$$

отсюда

$$q_{\text{опт}} = \sigma_x \sqrt{n_{\text{сп}}} N^{-1}\left(\frac{c_1}{c_1 + c_2}, 0, 1\right). \quad (18)$$

Выражение (18) совпадает с выражением для определения оптимального размера запаса при случайном спросе и поставках [1]. Однако σ_x стандартное отклонение функции спросов-поставок для данного материала по величине больше стандартного отклонения случайной функции спроса, следовательно, и страховой запас при случайных поставках и спросах должен быть больше, чем при регулярных поставках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Хелсменн. Применение математических методов в управлении производством и запасами. Изд-во «Прогресс», 1966.
2. Оскар Ланге. Оптимальные решения. Изд-во «Прогресс», 1967.
3. Н. А. Лившиц, В. Н. Пугачев. Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. I. Изд-во «Советское радио», 1963.