

ОБМОТКА АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ КАК НЕОДНОРОДНАЯ ЛИНИЯ

И. Ф. Огороднейчук

Харьков

Изучением волновых процессов, происходящих в обмотке вращающихся машин стали заниматься еще в начале 20-х годов. Но и сейчас еще нельзя утверждать, что проблема решена окончательно. Одной из причин этого является сложность природы волновых процессов, происходящих в обмотке.

Пытаясь изучить и объяснить волновые явления в обмотке электрических машин, исследователи были вынуждены прибегнуть к ряду упрощений. Одним из таких упрощений является подход к обмотке, как к однородной линии. При этом исследователи оперировали эффективными значениями первичных параметров обмотки, не учитывая, что параметры эти различны для пазовой и лобовой части обмотки.

В действительности пазовой части обмотки свойственны более высокие значения индуктивности и емкости относительно корпуса, соответственно скорость бегущих волн в пазовой части будет меньшей, чем в лобовой. Так, в [1] приводятся средние значения бегущих волн, которые для лобовых частей обмотки составляют около $200 \cdot 10^3$ км/сек, а для пазовых частей обмотки $(15 \div 20) \cdot 10^3$ км/сек.

Волновое сопротивление также непостоянно по длине обмотки; оно выражается некоторой периодической функцией. В общем случае эту функцию можно разложить в ряд Фурье и задаться гармоникой с основной частотой, совпадающей с частотой изменения волнового сопротивления. Будем, таким образом, считать закон изменения волнового сопротивления по длине обмотки синусоидальным. Такой вывод подтверждается экспериментами. На рис. 1 приводится экспериментально снятая частотная зависимость волнового сопротивления обмотки асинхронного электродвигателя типа МА 191/10 БК, наглядно демонстрирующая синусоидальный характер этих зависимостей.

Все это говорит о том, что при исследовании волновых процессов, происходящих в обмотке асинхронного электродвигателя, необходимо считаться с неоднородностью обмотки по длине, иначе пренебрежение этим фактором может привести к значительным погрешностям.

Будем исходить из схемы замещения обмотки асинхронного электродвигателя, предложенной З. Г. Кагановым, но в плечо, являющееся поперечной проводимостью обмотки, добавим элемент, соответствующий элементарной проводимости на землю. Такая поправка весьма существенная для двигателей, работающих во влажной атмосфере (например, шахтные электродвигатели).

Считаем, что на элементарном участке длины, равном dl , параметры R, L, C, G постоянные.

Составим дифференциальные уравнения, связывающие собой напряжение и ток в обмотке.

В соответствии с рис. 2 запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{1}{L} \frac{\partial U}{\partial t}; \\ i_R &= -\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial x}; \quad i_K = -K \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}; \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -GU - C \frac{\partial U}{\partial t}, \\ I &= i + i_R + i_K. \end{aligned} \quad (1)$$

где

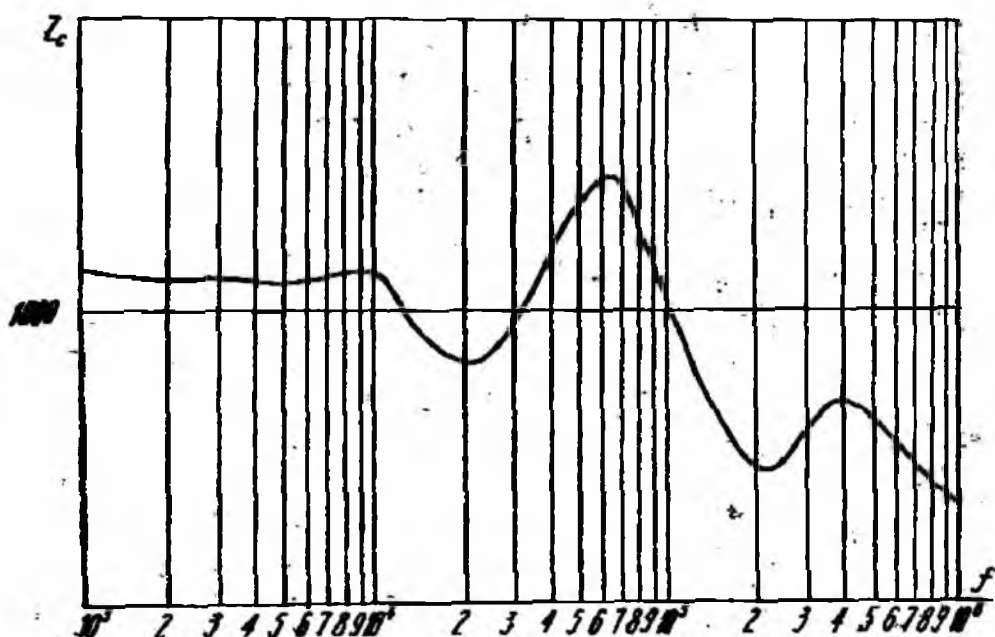


Рис. 1.

Дифференцируя и преобразуя уравнения (1), а также применяя преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dx} &= PI \frac{RL}{R + PL + P^2 KLR} \\ -\frac{dI}{dx} &= U(G + PC), \end{aligned} \quad (2)$$

где $P = \frac{d}{dt}$ — оператор, заменивший символ дифференцирования по времени.

Упростим систему уравнений (2), перейдя от переменной x к новой переменной τ

$$\tau = \int_0^x \frac{dx}{v} \quad (3)$$

Очевидно, что τ — время распространения фронта волны от начала обмотки до точки с координатой x .

После замены переменной по формуле (3) система (2) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{dY}{d\tau} &= LZ_c(\tau)I; \\ -\frac{dI}{d\tau} &= -\frac{P}{Z_c(\tau)}U, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} Z_c(\tau) &= \sqrt{\frac{PRL}{(G+PC)(R+PL+P^2KLR)}}; \\ v &= \frac{P}{Z_c(PC+G)}. \end{aligned} \quad (5)$$

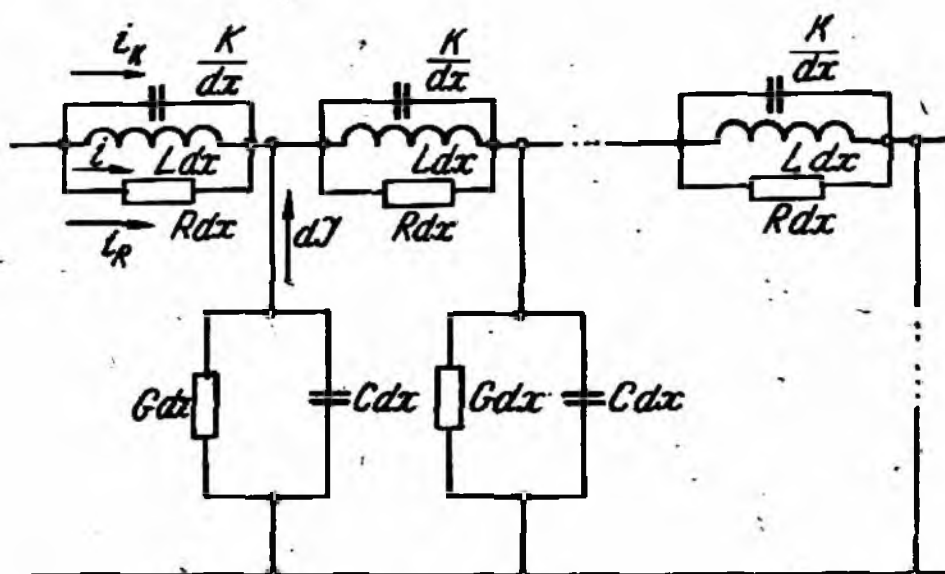


Рис. 2.

Вывод уравнений (5) в настоящей работе не приводится.

Перейдем от системы уравнений (4) к двум уравнениям, каждое из которых содержит только одну неизвестную U или I . С этой целью продифференцируем первое из уравнений (4) по τ , а второе по t .

$$\begin{aligned} -\frac{d^2U}{d\tau^2} &= PI \frac{dZ_c}{d\tau} = PZ_c \frac{dI}{d\tau}; \\ -P \frac{dI}{d\tau} &= \frac{P^2}{Z_c} U. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений $P \frac{dI}{d\tau}$ и PI , получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{d\tau^2} - \frac{1}{Z_c} \frac{dZ_c}{d\tau} - P^2U &= 0; \\ \frac{d^2I}{d\tau^2} + \frac{1}{Z_c} \frac{dZ_c}{d\tau} - P^2I &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения, входящие в систему (6), гиперболического типа, поэтому два независимых решения каждого из этих уравнений могут быть интерпретированы как две волны, распространяющиеся вдоль обмотки в противоположных направлениях. Каждая волна при распространении деформируется.

Определим коэффициент трансформации волны. Для этого заменим линию с непрерывно изменяющимся волновым сопротивлением ступенчатой функцией, состоящей из отрезков однородных линий весьма малой электрической длины. Если обозначить величину фронта волны у первого участка единицей, то учитывая отражения на границах неоднородности, получим

$$K = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_3} \cdots \frac{2Z_i}{Z_{i-1} + Z_i} \quad (7)$$

Перейдем к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$.

При этом

$$\Delta K_i = K_{i+1} - K_i; \quad \Delta Z = Z_{i+1} - Z_i,$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta K_i}{K_i} = \frac{\Delta Z}{2Z_i + \Delta Z} = \frac{\Delta Z}{2Z} + \varepsilon_1,$$

где через ε обозначена бесконечно малая более высокого порядка малости, чем

$$\frac{\Delta Z_i}{2Z_i} \quad (8)$$

Беря предел, находим

$$K(\tau) = \sqrt{\frac{Z(\tau)}{Z(0)}}$$

Таким образом, коэффициент деформации волны зависит только от крайних значений волнового сопротивления и не зависит от промежуточных.

Введем понятие нормированных напряжений и тока, которые находятся следующим образом:

$$\bar{U} = \frac{U}{K}; \quad I = IK.$$

Будем считать закон изменения волнового сопротивления по длине обмотки синусоидальным

$$Z_n = Z_c + A \sin \Omega \tau, \quad (9)$$

где Z_n — волновое сопротивление неоднородной линии;

A — амплитуда колебаний волнового сопротивления неоднородной линии относительно постоянной величины;

Ω — пространственная частота изменения параметров обмотки;

τ — электрическая длина обмотки, т. е. время, за которое фронт волны достигает координаты с точкой x .

Из теории неоднородных линий известно, что связь между волновым и входным сопротивлением выражается при помощи уравнения Риккати

$$Z_{xx} - P \frac{Z_{xx}^2}{Z_n} + P Z_n = 0. \quad (10)$$

Здесь знак «'» означает дифференцирование по времени. Решая уравнение (10), найдем:

$$Z_{xx} = Z_n + \frac{1}{\eta}. \quad (11)$$

Подставив в (9) уравнения, входящие в систему (6) и пользуясь (8), получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \bar{U}}{d\tau^2} - P^2 \bar{U} &= \varphi \bar{U}, \\ \frac{d^2 \bar{I}}{d\tau^2} - P^2 \bar{I} &= \psi \bar{I},\end{aligned}\quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= \left(\frac{Z'}{2Z}\right)^2 - \left(\frac{Z'}{2Z}\right)'; \\ \psi(\tau) &= \left(\frac{Z'}{2Z}\right)^2 - \left(\frac{Z}{2Z}\right).\end{aligned}$$

где η — функция, подлежащая определению.

Подставив (12) в (11), получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\eta' + \frac{2P}{Z_n} Z \eta + \frac{P}{Z_n} = 0,$$

общий интеграл которого имеет вид

$$Z = Z_n + \frac{P P_1}{C - P \int \frac{1}{Z_n} P P_1 dY}. \quad (13)$$

Используя начальные условия для режимов холостого хода и короткого замыкания и производя дальнейшие преобразования, получим

а) для режима короткого замыкания

$$Z_0 = \frac{Z_c(A + Z_c) \sin \omega t_3}{A_0 \sin \omega t_3 + Z_c^2 \cos^2 \omega t_3} \cdot (A \sin \omega t_3 + j Z_c \cos \omega t_3); \quad (14)$$

б) для режима холостого хода

$$Z_\infty = \frac{Z_0}{\sin \omega t_3 (Z_r - A)} \cdot (A \sin \omega t_3 + j Z_c \cos \omega t_3), \quad (15)$$

где t_3 — полная электрическая длина обмотки.

Волновое сопротивление определяется выражением

$$Z_n = Z_c(A \sin \omega t_3 + j Z_c \cos \omega t_3) \cdot \sqrt{\frac{A + Z_c}{(A - Z_0)(A^2 \sin^2 \omega t_3 + Z_c^2 \cos^2 \omega t_3)}}. \quad (16)$$

Для полного анализа формул (14), (15), (16) необходимо выразить величину A через первичные параметры электромашиной обмотки и найти ее частотную зависимость.

Очевидно, что в точках, для которых $Z_0 = Z_\infty$, существует равенство $Z_c = Z_n$.

Решим уравнение $Z_0 = Z_\infty$ относительно ω .

Из равенства действительных частей получим

$$\frac{Z_0(A + Z_c) \sin \omega t_3}{A_0^2 \sin^2 \omega t_3 + Z_c^2 \cos^2 \omega t_3} A \sin \omega t_3 - \frac{Z_0}{\sin \omega t_3 (Z_r - A)} A \sin \omega t_3 = 0. \quad (17)$$

Используем одно из решений этого уравнения

$$\omega + \frac{\pi n}{t_2}.$$

При $n = 1$; $t_2 = 1$ (что равносильно нормированию) $\omega = \pi$. По условию $Z_c = Z_n$ в точке $\omega = \pi$ следует, что

$$Z_n(Z_c) = Z_n(Z_n),$$

откуда

$$\frac{\pi LR(GR - \pi^2 LC)}{(GR - \pi^2 LC)^2 + \pi^2 (CR + LG)^2} = Z_0^2 \frac{A + Z_0}{A - Z_0}. \quad (18)$$

Из уравнения (18) получим

$$A = Z_c \frac{\pi CR^2 Z_c^2 + \pi L^2 CZ_c^2 - L^2 R}{\pi CR^2 Z_c^2 + \pi L^2 CZ_c^2 - L^2 R}. \quad (19)$$

Так как для любого ω существует соотношение

$$\pi CR^2 Z_0^2 \gg \pi L^2 CZ_0^2,$$

то

$$A = Z_c \frac{\pi CR^2 Z_c^2 - L^2 R}{\pi CR^2 Z_c^2 + L^2 R}. \quad (20)$$

Из анализа частотной зависимости активного сопротивления и индуктивности электромашинной обмотки следует, что при изменении частоты от 0 до ∞ величина A изменяется от 0 до ∞ . При частотах, достигающих 10^5 ш величина A для электродвигателей различного исполнения составляет $(0,3 + 0,5) Z_c$ при дальнейшем увеличении частоты $A \rightarrow Z_c$.

ВЫВОДЫ

1. При передаче электромагнитной энергии вдоль обмотки асинхронного электродвигателя условия для распространения волн в пазовой и лобовой части различны, следовательно, электромашинная обмотка, с точки зрения волновой теории, является неоднородной линией.

2. В ограниченном диапазоне частот с достаточной для практики точностью принимается допущение, что электромашинная обмотка может быть представлена однородной линией.

3. При широком диапазоне частот, а также при всех исследованиях, требующих высокой точности, необходимо использовать выражения (14), (15), (16).