УДК 519.6

О.М. Литвин, О.В. Ярмош, Т.І. Чорна
Українська інженерно-педагогічна академія, Харків, Україна
tanya_chorna@ukr.net

МЕТОД СПЛАЙН-ІНТЕРЛІНАЦІЇ ПРИ ЗНАХОДЖЕННІ НАЙБІЛЬШИХ (НАЙМЕНШИХ) ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ В ЗАМКНУТІЙ ОБЛАСТІ

Пропонується для розв'язання задачі знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції двох змінних в замкнутій області $D=[0,1]^2$ використовувати послідовність оптимізаційних задач на заданій системі взаємоперпендикулярних прямих. Побудовано оператори сплайн-інтерлінації та охарактеризовано їх властивості. Розглянуто приклади. Наведено аналіз обчислюваного експерименту.

НЕПЕРЕРВНА ФУНКЦІЯ, ІНТЕРВАЛИ МОНОТОННОСТІ, ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ СПЛАЙН, СИСТЕМА ВЕРТИКАЛЬНИХ І ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ПРЯМИХ

Вступ

Приймаючи ті чи інші рішення у різних проблемних ситуаціях наукової або практичної діяльності виникають найрізноманітніші завдання оптимізації. Розв'язуючи ці завдання у більшості випадків намагаються знайти найбільше або найменше значення досліджуваної функції при заданих обмеженнях, оскільки технічні чи економічні процеси моделюються функцією або декількома функціями, які залежать від змінних факторів, що впливають на стан моделюючого процесу.

Класичне формулювання алгоритму знаходження найбільшого (найменшого) значень функції двох змінних в замкнутій області *D* полягає в наступному.

Крок 1. Знаходимо стаціонарні точки першого роду (X_k, Y_k), $k=\overline{1,M}, M \ge 0$ в середині області *D*. В даних точках $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$ і $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$ або можуть не існувати.

Крок 2. Знаходимо стаціонарні точки на границі Γ області D. Позначаємо їх $(X_p^*, Y_p^*) \in \Gamma$, $p=\overline{1,N}$, $N \ge 0$.

Крок 3. Обчислюємо значення $Z_k = f(X_k, Y_k)$, $k=\overline{1,M}, (X_k, Y_k) \in \overline{D} \setminus \Gamma$ досліджуваної функції в точках (X_k, Y_k) (якщо $M=0$, то такі значення відсутні) та значення $Z_p^* = f(X_p^*, Y_p^*)$ в точках границі $(X_p^*, Y_p^*) \in \Gamma, p=\overline{1,N}$ (якщо $N=0$, то таких значень немає). Обов'язково підраховуємо значення функції і в кутових точках, якщо вони існують.

Крок 4. Визначивши $Z_k = f(X_k, Y_k)$, $k=\overline{1,M}$ та $Z_p^* = f(X_p^*, Y_p^*)$, $p=\overline{1,N}$, знаходимо

$$\max \{Z_1, ..., Z_M, Z_1^*, ..., Z_N^*\} \text{ або}$$

$$\min \{Z_1, ..., Z_M, Z_1^*, ..., Z_N^*\}.$$

Якщо $M=0$, то відповідних елементів у фігурних дужках не буде.

Якщо в області D число критичних точок, в яких може бути найбільше чи найменше значення, велике $(M+N)>10^3$, то знаходження їх координат вимагає великої кількості обчислень (взагалі кажучи слабо формалізованих операцій — диференціювання, знаходження точок недиференційовності тощо). Тому ми пропонуємо метод редукції поставленої задачі на найбільше та найменше значення функції двох змінних в замкнутій області до послідовності задач на знаходження найбільшого і найменшого значення $f(x,y)$ на системі прямих $x=X_p=\frac{p}{m}$, $0 \le p \le m$, $m \ge 2$ та $y=Y_q=\frac{q}{n}$, $0 \le q \le n$, $n \ge 2$.

Тобто в даній роботі пропонується метод знаходження найбільшого та найменшого значення неперервної функції $f(x,y)$ шляхом зведення двовимірної задачі до послідовності одновимірних задач на знаходження найбільшого та найменшого значення на системі паралельних горизонтальних та вертикальних прямих, які перетинають область дослідження D. Для тестування використовується $D=[0,1]^2$.

1. Актуальність використання методу сплайн-інтерлінації

Задача полягає в наступному: на квадраті $D=[0,1]^2$ знайти найбільше або найменше значення функції $f(x,y) \in C(D)$ за допомогою методу сплайн-інтерлінації функції двох змінних.

Серед численних методів знаходження глобального екстремуму увагу привертають наступні.

Класичні методи знаходження глобального екстремуму, які базуються на диференціальному численні. Вони передбачають визначення всіх точок можливих екстремумів на основі рівності частинних похідних функції в даних точках нулю, обчислення значення функції в цих точках, знаходження серед них максимальних або мінімальних значень [1, 2, 3].

Але, як справедливо зазначав Н.С. Бахвалов, формальний підхід вирішення задач оптимізації потребує дуже велике число операцій та знаходиться під сильним впливом округлень при обчисленнях [4, с. 323].

Окрім того, класичний метод дає можливість знайти екстремум, якщо він знаходиться усередині, а не на границі можливих значень аргументів.

Тобто, класичний метод, який вивчається на першому курсі університетів та вищих технічних закладів, має деякі недоліки. Вони були усунені у відомих методах знаходження найбільшого і найменшого значення в методі лінійного програмування для того частинного випадку, коли область D є випуклим багатокутником, а функція $f(x,y)$ є лінійною функцією двох змінних [2, 3].

Відмітимо також метод квадратичного програмування, в якому функція, що мінімізується, може бути квадратичною функцією, і обмеження, що виділяють область, в яких знаходиться екстремум можуть бути записані як у вигляді лінійних нерівностей, так і у вигляді квадратичних нерівностей [5, 6]. Задачу знаходження глобального екстремуму квадратичних функцій багатьох змінних детально проаналізовано в [7, Див. також огляд робіт в 7].

В роботах [2] досліджується для розв'язання задачі оптимізації випуклих функцій випадок недиференційовних функцій і вводиться поняття субградієнта для розв'язання задачі оптимізації випуклих функцій.

Чисельні методи знаходження найбільшого та найменшого значення в замкнутій області обґрунтовуються різними науковцями [8, 9, 10, 11, 12].

Серед цих методів і метод градієнтного спуску, метод яру («овражный метод»), симплекс – метод, метод статистичної обробки результатів випадкових випробувань (метод Монте-Карло) та багато інших.

Та на даний час авторам невідомі загальні конструктивні методи мінімізації функції двох змінних на довільній замкнутій однозв'язній області.

Тому, очевидно, що використання методу сплайн-інтерлінації для знаходження найбільшого та найменшого значення функції в замкнутій області є доцільним і цілком актуальним.

2. Сутність методу сплайн-інтерлінації при знаходженні найбільшого (найменшого) значення функції двох змінних

Будемо вважати, що функція $f(x,y)$ є неперервною і має для кожного x скінченну кількість інтервалів монотонності для $y\in[0,1]$, а також для кожного y функція $f(x,y)$, як функція тільки змінної y, теж має скінченну кількість інтервалів зростання та спадання (інтервалів монотонності) при $x\in[0,1]$.

Розіб'ємо область D на прямокутні елементи $\Pi_{p,q}=\left\{X_{p-1}\le x<X_p, Y_{q-1}\le y<Y_q\right\},\ p=\overline{1,m};\ q=\overline{1,n}$ прямими $x=X_p, 0=X_0<X_1<\ldots<X_m=1; y=Y_q$, $0=Y_0<Y_1<\ldots<Y_n=1, p=\overline{0,m}, q=\overline{0,n}, m\ge 2, n\ge 2$.

Побудуємо оператор сплайн-інтерлінації у вигляді $O_{m,n}f(x,y)=\left(O_{1,m}+O_{2,n}-O_{1,m}\times O_{2,n}\right)f(x,y)$.

$$O_{2,n}f(x,y)=\sum_{q=0}^{n}f\left(x,Y_q\right)\times h_{2,q}(y)$$

$$O_{1,m}f(x,y)=\sum_{p=0}^{m}f\left(X_p,y\right)\times h_{1,p}(x)$$

$$h_{1,p}(x)=\begin{cases}0,\ \text{якщо } x\le X_{p-1}\\ \dfrac{x-X_{p-1}}{X_p-X_{p-1}},\ \text{якщо } X_{p-1}<x\le X_p\\ \dfrac{x-X_{p+1}}{X_p-X_{p+1}},\ \text{якщо } X_p<x<X_{p+1}\\ 0,\ \text{якщо } x\ge X_{p+1}\end{cases}$$

$X_{-1}=X_0-X_1, X_{m+1}=2\times X_m-X_{m-1}$. Аналогічно визначаються допоміжні функції $h_{2,q}(y), q=\overline{0,n}$.

Оператори $O_{m,n}f(x,y)$ задовольняють умови: $f(x,y)\in C(\overline{D}) \Rightarrow O_{m,n}f(x,y)\in C(\overline{D})$ де $C(\overline{D})$ – клас неперервних функцій в $\overline{D}$ [13].

$$O_{m,n}f\left(X_k,y\right)=f\left(X_k,y\right),\ \text{якщо }\ 0\le k\le m$$

$$O_{m,n}f\left(x,Y_l\right)=f\left(x,Y_l\right),\ \text{якщо }\ 0\le l\le n.$$

Тобто оператор $O_{m,n}f(x,y)$ має ті ж самі сліди на прямих $x=X_k$ та $y=Y_l$, що й функція $f(x,y)$.

Ці властивості покладені нами в основу розробки і дослідження методу наближеного знаходження найбільшого та найменшого значень функції двох змінних шляхом редукції до знаходження найбільшого та найменшого значень функції до $(m+1)+(n+1)=(m+n+2)$ одновимірних задач на знаходження найбільшого та найменшого значень функції в $\overline{D}$.

Тобто будемо зводити задачу знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції двох змінних в замкнутій області до $(m+n+2)$ одновимірних задач на знаходження найбільшого та найменшого значень функції.

Необхідно знайти $X_{q,e}\in[0,1], q=\overline{0,n}$ з умови $f\left(X_{q,e},Y_q\right)\ge f\left(x,Y_q\right), \forall x\in[0,1]$ (якщо знаходимо максимальне значення $f(x,y)$) або $f\left(X_{q,e},Y_q\right)\le f\left(x,Y_q\right), \forall x\in[0,1]$ (якщо знаходимо мінімальне значення $f(x,y)$), та знайти $Y_{p,e}\in[0,1]$, яке задовольняє нерівність

$$f\left(X_p, Y_{p,e}\right) \geq f\left(X_p, y\right) \text{ або } f\left(X_p, Y_{p,e}\right) \leq f\left(X_p, y\right), \quad \forall p = \overline{0,m}.$$

Для знаходження розв'язків одновимірних задач оптимізації будемо використовувати один із методів, зазначених у [8].

Важливою особливістю операторів $O_{m,n} f(x,y)$ є вказане у наступних лемі та теоремах. Введемо позначення $\Delta_1 = \max\limits_{1 \leq p \leq m} (X_p - X_{p-1})$; $\Delta_2 = \max\limits_{1 \leq q \leq n} (Y_q - Y_{q-1})$.

Лема. Нехай $g(x) \in C[0,1]$ і має на цьому інтервалі скінченне число інтервалів монотонності (позначимо його m), тоді для кожного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке розбиття інтервалу $[0,1]$ при $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$, що $\left|g(x) - Sp(x)\right| \leq \varepsilon$, де $Sp(x)$ – інтерполяційний сплайн 1 степеню для функції $g(x)$:

$$Sp(x) = \sum_{k=0}^{m} g(X_k) h(x, X_{k-1}, X_k, X_{k+1}),$$

де $X_{-1} = X_0 - X_1, X_{m+1} = 2X_m - X_{m-1}$.

Це твердження витікає з того, що пряма лінія сплайну, яка з'єднує початкову $(x = a)$ і кінцеву $(x = b)$ точки інтервалу зростання (спадання) функції $g(x)$ не може відхилятися від $y = f(x)$ більше ніж на $(b - a)$. Розбиваючи цей інтервал інтерполювання ab на Q-частин точками

$$X_0 = 0,\ X_1 = 0 + \frac{b-a}{Q},\ X_2 = 0 + 2\frac{b-a}{Q}, \ldots,$$

$$X_Q = 0 + Q\frac{b-a}{Q} = b$$

і вибираючи Q так, щоб максимум

$$\left|g(X_k) - g(X_{k-1})\right| \leq \varepsilon,$$

отримаємо, що сплайн 1 степені на цьому інтервалі при такому виборі Q буде задовольняти вимогам леми. Повторюючи сказане для кожного інтервалу монотонності $g(x)$ побудуємо інтерполяційний сплайн 1 степені, який буде наближувати функцію $g(x)$ з потрібною точністю ε, $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1. Для похибки $Rf(x,y)$ наближення кожної неперервної функції $f(x,y)$ справедливе співвідношення

$$Rf(x,y) = \max_{(x,y) \in \overline{D}} \left| f(x,y) - O_{m,n} f(x,y) \right| \to 0,$$

$$\text{якщо } \Delta_1 \to 0,\ \Delta_2 \to 0, \quad m \to \infty, n \to \infty.$$

Д о в е д е н н я. Очевидно, що функції $O_{1,m} f(x,y), O_{2,n} f(x,y) \in C(\overline{D})$ за побудовою будуть неперервними функціями. Згідно з доведеною лемою, існують такі m і n та відповідне їм розбиття, що

$$\max_{(x,y) \in \overline{D}} \left| f(x,y) - O_{1m} f(x,y) \right| \leq \varepsilon,$$

$$\max_{(x,y) \in \overline{D}} \left| f(x,y) - O_{2n} f(x,y) \right| \leq \varepsilon$$

У відповідності з побудовою оператора

$$O_{m,n} f(x,y) = \left(O_{1,m} + O_{2,n} - O_{1,m} \times O_{2,n}\right) f(x,y)$$

для похибки

$$Rf(x,y) = \max_{(x,y) \in \overline{D}} \left| f(x,y) - O_{m,n} f(x,y) \right|$$

можна написати, що

$$R_{m,n} f(x,y) = f(x,y) - O_{1,m} f(x,y) - O_{2,n} f(x,y) + \\ + O_{1,m} \times O_{2,n} f(x,y) = (I - O_{1,m})(I - O_{2,n}) f(x,y),$$

де I — тотожний оператор. Тому

$$R_{m,n} f(x,y) = \max_{(x,y) \in \overline{D}} \left| (I - O_{1,m})(I - O_{2,n}) f(x,y) \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon^2 \to 0, \text{ якщо } \varepsilon \to 0.$$

Теорема 1 доведена.

Введемо позначення $g2(x)$ та $g1(y)$, де

$$g2(x) = \sum_{k=0}^{m} Y2_k \times h\left(x, X2_{k-1}, X2_k, X2_{k+1}\right),$$

$$g1(y) = \sum_{l=0}^{n} X1_l \times h\left(y, Y1_{l-1}, Y1_l, Y1_{l+1}\right).$$

Теорема 2. Для кожної точки $\left(x^*, y^*\right) \in \overline{D}$, в якій досягається найбільше (найменше) значення функції $f(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$, яка задовольняє вимогам теореми 1, знайдуться такі m і n, і таке розбиття області D прямими $x = X_k$ та $y = Y_l$, що точка A^* — точка перетину кривих $y = g2(x)$, $x = g1(y)$ і точка $A_{\max}$ будуть знаходитися в одному прямокутнику Π_{k^*,l^*}, $k = \overline{0,m}$, $l = \overline{0,n}$, тобто в ε – околі точки $A_{\max}$, де $\varepsilon \leq \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$.

Для доведення використаємо наступний рис.1.

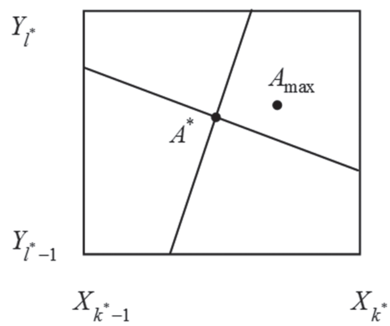

Рис. 1. Прямокутник Π_{k^*,l^*}

Оскільки функція неперервна, то знайдуться такі значення k^* та l^*, при яких $A^* \in {}_{k^*,l^*}$, і якщо в середині цього прямокутника функція $f(x,y)$ досягає найбільшого (найменшого) значення, то в точці $A_{\max}$:

$$f(A_{\max}) > f(X_{k^*-1}, y),\ f(X_{k^*}, y)\ \forall y \text{ та}$$

$$f\left(A_{\max}\right) > f\left(x, Y_{l^*-1}\right),\ f\left(x, Y_{l^*}\right) \forall x .$$

Тоді знайдуться такі m і n, що відповідне їм розбиття забезпечить виконання таких нерівностей для k^* і

$$l^* : \left|x^* - X_{k^*-1}\right|, \left|X_{k^*} - x^*\right|, \left|y^* - Y_{l^*-1}\right|, \left|Y_{l^*} - y^*\right| \le \varepsilon.$$

ε задане таке, що відповідні максимуми на лініях $x = X_{k^*-1}$ та $x = X_{k^*}$ будуть знаходитись в точках

$$(X_{k^*-1}, Y_{k^*-1,e}), (X_{k^*}, Y_{k^*,e}), (X_{l^*-1,e}, Y_{l^*-1}), (X_{l^*,e}, Y_{l^*}).$$

за умови, що

$$Y_{l^*-1} \le Y_{k^*-1,e} \le Y_{l^*}, Y_{l^*-1} \le Y_{k^*,e} \le Y_{l^*},$$

$$X_{k^*-1} \le X_{l^*-1,e} \le X_{k^*}, X_{k^*-1} \le X_{l^*,e} \le X_{k^*}.$$

Це означає, що $\left|f(x^*, y^*) - f(X_{k^*-1}, Y_{k^*-1}, e)\right|$ та $\left|f(x^*, y^*) - f(X_{l^*-1}, Y_{l^*-1}, e)\right| \le \varepsilon \times c$, де c – деяка стала, яка залежить від функції $f\left(x, y\right)$.

Наприклад, якщо $f\left(x, y\right)$ є функцією, яка задовольняє умови

$$f(x^{'}, y^{'}) - f(x^{''}, y^{''}) \le \left|(x^{'} - x^{''})^{\alpha} \times (y^{'} - y^{''})^{\beta}\right| \times M,$$

$$0 < \alpha, \beta < 1,\ M > 0$$

то вказані нерівності будуть виконуватись.

Таким чином якщо $\Delta 1 \to 0$ і $\Delta 2 \to 0$, то вказаний прямокутник стискується в точку (x^*, y^*). Очевидно, що найбільше відхилення буде лише якщо A^* знаходиться в центрі прямокутника Π_{k^*, l^*}. Оскільки доведено, що при зменшенні кроку розбиття області наближення системою вертикальних і горизонтальних прямих в силу неперервності функції $f(x, y)$ різниця між слідами $\left|f(X_{k^*-1}, y) - f(X_{k^*}, y)\right|, \left|f(x, Y_{l^*-1}) - f(x, Y_{l^*})\right| \to 0.$

Тобто похибка наближується до 0, що й треба було довести. Теорема 2 доведена.

3. Обчислюваний експеримент

Приклад 1. Визначити найменше значення функції

$$f\left(x, y\right) = \frac{\left(\frac{2\left(x + y\right) + 1}{4} - a\right)^2}{c^2} + \frac{\left(\frac{2\left(y - x\right) + 1}{4} - b\right)^2}{d^2} - 1$$

за умови $a = 0{,}5;\ b = 0{,}5;\ c = 0{,}5; d = 1$.

Розв'язання. На рис. 2 представлено лінії рівня даної функції.

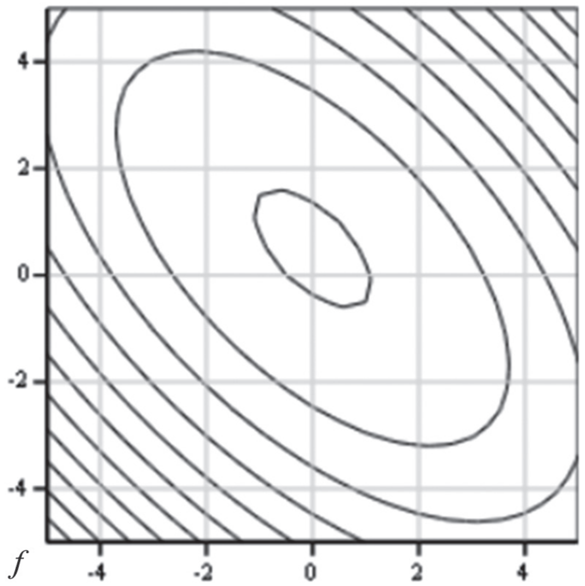

Рис. 2. Лінії рівня функції $f(x, y)$

Область D задання функції розбиваємо на прямокутні елементи лініями, паралельними осям OX та OY.

На системі паралельних вертикальних ліній, які перетинають область дослідження з кроком 0,2, знаходимо мінімальні значення даної функції $f(X_p, y), 0 \le y \le 1$. Позначимо значення координати y, які відповідають найменшим значенням $f(X_p, y), 0 \le y \le 1$ через $Y2_{pe}$. Таким чином ми отримуємо набір точок $(X2_p, Y2_{pe}), p = \overline{0, m}$ за умови, що $\forall x = X2_p$ існує лише одне значення $Y2_{pe}$. В цьому прикладі вказана умова виконується. Якщо ж значення $Y2_{pe}$ не єдине, то дії, описані нижче, потрібно буде виконати для кожного значення $Y2_{pe}$. За допомогою цих точок будуємо функцію $y = g2(x)$, де

$$g2\left(x\right) = \sum_{k=0}^{m} Y2_k \times h\left(x, X2_{k-1}, X2_k, X2_{k+1}\right).$$

Аналогічно на системі паралельних горизонтальних ліній отримуємо набір точок $(X1_{qe}, Y1_q), Y1_q = Y_q, q = \overline{0, n}$. За допомогою цих точок будуємо функцію $x = g1(y)$, де

$$g1\left(y\right) = \sum_{l=0}^{n} X1_l \times h\left(y, Y1_{l-1}, Y1_l, Y1_{l+1}\right),$$

де $Y1_{-1} = Y1_0 - Y1_1, Y1_{n+1} = 2Y1_n - Y1_{n-1.}$

Конкретні значення цих даних наводимо в табл. 1.

Таблиця 1

m, n	Точки $(X1_{le}, Y1_l)$ найменших значень функції $f(x, y),\ y \in \left[0,1\right],\ l = \overline{0,1}$	Точки $(X2_k, Y2_{ke})$ найменших значень функції $f(x, y),\ x \in [0,1],\ k = \overline{0, m}$
5	$X1$=[0,3; 0,18; 0,06; 0; 0; 0]^T $Y1$=[-0,2; 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1;1,2]^T	$X2$=[-0,2;0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1;1,2]^T $Y2$=[0,5; 0,38; 0,26; 0,14; 0,02; 0]^T
10	$X1$=[0,3; 0,24; 0,18; 0,12; 0,06; 0; 0; 0; 0; 0;0]^T $Y1$=[-0,1; 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1;1,1]^T	$X2$=[-0,1; 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1;1,1]^T Y2=[0,5; 0,44; 0,38; 0,44; 0,26; 0,2; 0,14; 0,08; 0,02; 0; 0]^T

Графіки функцій $x = g1(y)$ та $y = g2(x)$ є ламаними, що з'єднують написані вище набори точок (рис. 3).

Дані лінії перетнулися в точці $A(0;\ 0{,}5)$. Координати точки знайшли за допомогою розрахунків. Значення функції в даній точці становить -1.

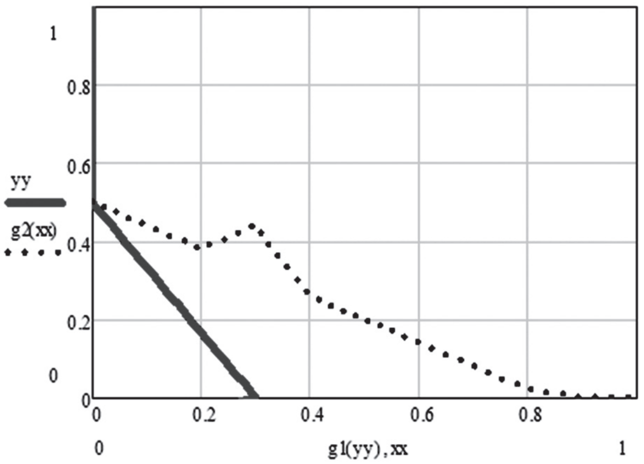

Рис. 3. Графік ліній, які поєднують точки з найменшими значеннями функції $Z = f(x,y)$ на вертикальних та горизонтальних прямих

Точні значення координат точки $A_{точ}$ такі $(6.816 \times 10^{-10};\ 0{,}5)$. Значення функції в даній точці становить -1.

Приклад 2. Визначити найбільше значення функції

$$f(x,y) = $$

$$= \frac{1}{\sqrt{c_1 \times c_2}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{c_1^2} - \frac{(y-b_1)^2}{c_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{c_3 \times c_4}} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{c_3^2} - \frac{(y-b_2)^2}{c_4^2}},$$

якщо $a_1 = 0{,}25$; $b_1 = 0{,}29$; $a_2 = 0{,}61$; $b_2 = 0{,}75$; $c_1 = 0{,}4$; $c_2 = 0{,}5$; $c_3 = 0{,}12$; $c_4 = 0{,}15$.

Розв'язання. На рис. 4 представлено лінії рівня даної функції. Область D задання функції розбиваємо на прямокутні елементи лініями, паралельними осям OX та OY.

На системі паралельних горизонтальних і вертикальних ліній, які перетинають область дослідження з кроком 0,1, знайшли максимальні значення даної функції за кожною із змінних (табл. 2).

Ці дані представили у вигляді точкового графіка (рис. 5).

Проводимо лінії через точки максимуму на вибраних лініях (рис. 6). Ці лінії описані нами як графіки функцій $y = g1(x)$ та $E = g2(y)$:

$$g1(x) = Y2_0 \times h(x, X2_0 - X2_1, X2_0, X2_1) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m-1} (Y2_k \times h(x, X2_{k-1}, X2_k, X2_{k+1})) +$$
$$+ Y2_m \times h(x, X2_{m-1}, X2_m, 2X2_m - X2_{m-1});$$

$$g2(y) = X1_0 \times h(y, Y1_0 - Y1_1, Y1_0, Y1_1) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m-1} (X1_k \times h(y, Y1_{k-1}, Y1_k, Y1_{k+1})) +$$
$$+ X1_m \times h(y, Y1_{m-1}, Y1_m, 2Y1_m - Y_{m-1}).$$

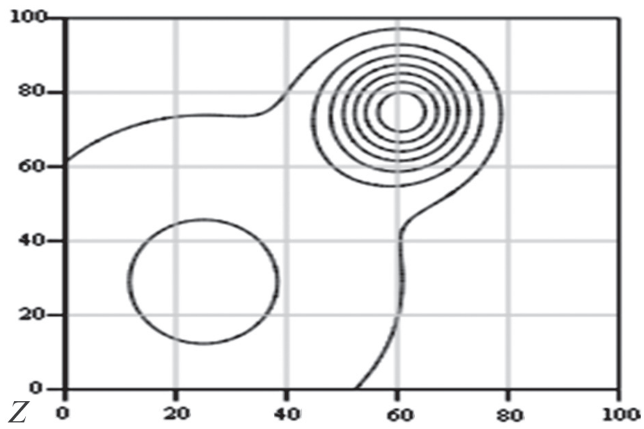

Рис. 4. Лінії рівня функції $f(x,y)$

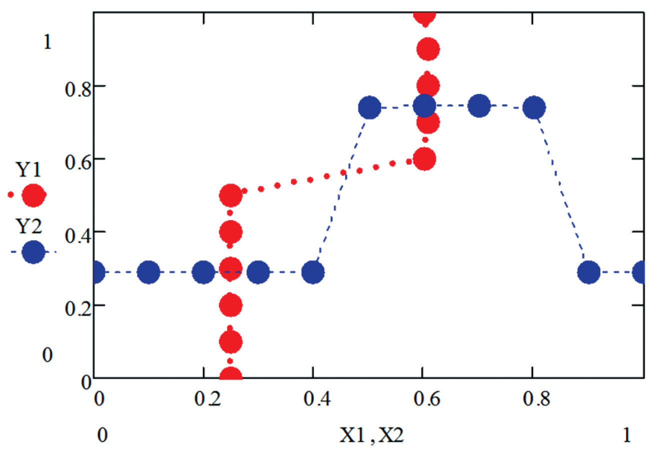

Рис. 5. Точковий графік

Отримані лінії перетнулися в трьох точках (див. рис. 6, зліва направо) $A1\,(0{,}25;\ 0{,}29)$, $A2\,(0{,}46;\ 0{,}561)$, $A3\,(0{,}608;\ 0{,}747)$. Обчислювальний експеримент показав, що значення заданої функції $f(x,y)$ в точці A1 дорівнює 2,236, в точці $A2$ – 1,585, в точці $A3$ – 7,884. Тобто максимальне значення цієї функції в області D досягається в точці $A3(0{,}608;\ 0{,}747)$. При цьому значення функції $f(x,y)$ становить 7,884.

Таблиця 2

m, n	Точки $(X1_{le}, Y1_l)$ найбільших значень функції $f(x{=}X1_k, y)$, $y \in [0,1]$, $l = \overline{0,n}$	Точки $(X2_k, Y2_{ke})$ найбільших значень функції $f(x, y{=}Y2_k)$, $x \in [0,1]$, $k = \overline{0,m}$
10	$X1 = [0{,}25; 0{,}25; 0{,}25; 0{,}25; 0{,}25; 0{,}25; 0{,}602; 0{,}608; 0{,}608; 0{,}607; 0{,}601]^T$ $Y1 = [0; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9; 1]^T$	$X2 = [0; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9; 1]^T$ $Y1 = [0{,}29; 0{,}29; 0{,}29; 0{,}29; 0{,}29; 0{,}742; 0{,}747; 0{,}747; 0{,}74; 0{,}29; 0{,}29]^T$

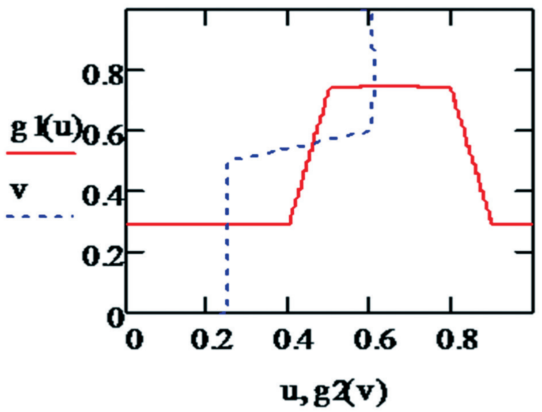

Рис. 6. Графік ліній, які поєднують точки з найменшими значеннями функції $Z = f(x, y)$ на вертикальних та горизонтальних прямих

Висновки

Таким чином в даній роботі запропоновано і досліджено метод знаходження найбільшого (найменшого) значення функції $f(x, y)$ в замкнутій області за допомогою знаходження максимальних (мінімальних) значень функції $f(x, y)$ на заданій системі взаємоперпендикулярних прямих паралельних системі координат. Результати обчислювального експерименту підтвердили його ефективність і обумовлюють можливість використання даного методу при розв'язанні багатоекстремальних задач. Автори впевнені, що даний метод може бути застосований при знаходженні найбільших або найменших значень функцій не лише двох змінних, а й трьох змінних в замкнутій області.

Список літератури:

1. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа [Текст] / С. М. Никольский, 6-е изд., стереотип. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 592 с. **2.** *Шор, Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения [Текст] / Н. З. Шор.– К. : Наук. думка, 1979. – 200 с. **3.** *Пшеничный, Б. Н.* Необходимые условия экстремума [Текст] / Б. Н. Пшеничный. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1982. – 144 с. **4.** *Бахвалов, Н. С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) [Текст] / Н. С. Бахвалов. – М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1975. — 632 с. **5.** *Акулич, И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов / И. Л. Акулич. – М. : Высш. шк., 1986. – 319 с. **6.** *Капустин, В. Ф.* Практические занятия по курсу математического программирования [Текст] / В. Ф. Капустин. – Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. – 192 с. **7.** *Косолап, А. И.* Выпуклый анализ и многоэкстремальные задачи [Текст] : Моногр. / А. И. Косолап. – Днепропетровск, Изд-во ДНУ, 2007. – 280 с. **8.** *Гаврилюк, І. П.* Методи обчислень [Текст] : Підручник: У 2ч. / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К.: Вища шк., 1995. – Ч.1., 367 с. **9.** *Гаврилюк, І. П.* Методи обчислень [Текст] : Підручник: У 2ч. / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К.: Вища шк., 1995. – Ч.2., 431 с. **10.** *Крылов, В. И.* Вычислительные методы [Текст] / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный – М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1977. – Т.2. – 400 с. **11.** *Демидович, Б. П.* Основы вычислительной математики [Текст] / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М.: Наука, 1970. – 664 с. **12.** *Демидович, Б. П.* Численные методы анализа [Текст] / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – М.,1967 – 368 с. **13.** *Литвин, О. М.* Інтерлінація функції та деякі її застосування [Текст] / О. М. Литвин. – Х. : Основа, 2002. – 544 с.

Поступила до редколегії 23.11.2016