МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ КВАЗІСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІШУВАННЯ В'ЯЗКИХ СУМІШЕЙ

Стаднікова Г.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

Аналіз методом математичного моделювання в'язких течій широко застосовується в хімічній, фармацевтичній та харчовій промисловості при дослідженні процесів перемішування.

У роботі розглядається плоска квазістаціонарна течія в'язкої нестисливої рідини, яка заповнює внутрішність Ω прямокутника $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$, причому бічні стінки $\bar{\Omega}$ перебувають у стані спокою, а верхня та нижня стінки рухаються по черзі зі швидкостями $\mathbf{v}_{top}(t) = (v_{top}(t), 0)$ і $\mathbf{v}_{bot}(t) = (v_{bot}(t), 0)$ відповідно.

Розв'язання першої частини задачі перемішування полягає у отриманні поля швидкостей (v_x, v_y) в області течії Ω. Для функції течії $\psi(x, y, t)$ у наближенні Стокса можна поставити таку крайову задачу:

$$\Delta^2 \psi = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = \begin{cases} -v_{top}(t), & (x, y) \in \partial\Omega_1 = \{y = b\}, \\ v_{bot}(t), & (x, y) \in \partial\Omega_3 = \{y = 0\}, \\ 0, & (x, y) \in \partial\Omega_2 = \{x = 0\} \bigcup \partial\Omega_4 = \{x = a\}, \end{cases} \tag{2}$$

де $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до межі $\partial\Omega$ області течії, Δ^2 – бігармонічний оператор.

Розв'язання другої частини задачі перемішування полягає в розв'язанні початкової задачі для системи рівнянь руху лагранжевої частинки:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y}, \ \dot{y}(t) = -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}; \ x(t_0) = x_0, \ y(t_0) = y_0,$$

та в побудові й аналізі траєкторій руху.

Для знаходження розв'язку задачі (1), (2) запропоновано використати принцип суперпозиції у поєднанні зі структурним методом (методом R-функцій) [1, 2].

Обчислювальний експеримент було проведено для прямокутної області для різних співвідношень $a : b$ та для різних режимів руху верхньої та нижньої стінок. Розглянуті квазістаціонарні режими мають прикладний інтерес, бо у цих випадках можливим є виникнення хаотичної поведінки, коли перемішування відбувається найбільш ефективно.

Література:

1. Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету течения Стокса в квадратной каверне при малом числе Рейнольдса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 4 (21). С. 77 – 78.

2. Гибкина Н.В., Роговой Н.С., Сидоров М.В., Стадникова А.В. Численный анализ процессов перемешивания методом R-функций // Радиоэлектроника и информатика. 2012. № 3 (58). С. 28 – 34.