УДК 621.391

С. В. ОМЕЛЬЧЕНКО

ВЫДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ КОМПОНЕНТ БИПЕРИОДИЧЕСКИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ФИЛЬТРАЦИИ

Использование математического описания нестационарных случайных процессов в виде периодически коррелированных случайных процессов (ПКСП) и аналогичных им процессов с целью решения задач распознавания, обнаружения, оценивания параметров широко известно. Такая модель находит широкое применение для решения различных задач в радиолокации, связи, технической и медицинской диагностике, а также других прикладных задачах обработки сигналов [1]. Решение таких задач может быть осуществлено классическими методами, если найден алгоритм перехода к эквивалентному их описанию с использованием векторных стационарных случайных процессов (стационарных компонент ПКСП). Ряд алгоритмов получения такого эквивалентного представления методом детерминированной фильтрации, дискретизации через период широко известны из литературы [1]. В случае фильтрационного метода статистического оценивания необходимо синтезировать узкополосное разделение коррелированных полос гармоник. Полоса пропускания такого фильтра может превышать периода. Такое оценивание осуществляется путем пропускания наблюдаемого сигнала через параллельно соединенные полосовые фильтры ("гребенку" фильтров). Амплитудно-частотная характеристика таких фильтров должна быть близкой к прямоугольной. Для получения нужных амплитудно-частотных характеристик фильтров могут использоваться, в том числе, и рекурсивные фильтры различного порядка. Однако, задача получения стационарных компонент в случае более сложной модели бипериодически коррелированных случайных процессов (БПКСП) требует дальнейшего решения и дальнейших исследований.

Случайный процесс будет бипериодически коррелированным, когда он может быть представлен в виде

$$\xi(t)=\sum_{k,j\in Z}\xi_{k,j}(t)\exp\left\{i\omega_{k,j}t\right\} \tag{1}$$

где $\xi(t)=\left[\xi_{k,j}(t)\right]_{k,j\in Z}$ – стационарный матричный процесс, а его ковариация –

$$K(t,s)=\sum_{k,j,p,q\in Z}K_{k,j,p,q}(t-s)\exp\left\{i(\omega_{k,j}t-\omega_{p,q}s)\right\},$$

где $K(\tau)=\left[K_{k,j,p,q}(\tau)\right]_{k,j,p,q\in Z}$ – четырехмерная ковариационная матрица стационарной матрицы $\xi(t)=\left[\xi_{k,j}(t)\right]_{k,j\in Z}$ и матричные элементы $K_{k,j,p,q}(\tau)=M\left[\xi_{k,j}(t+\tau)\xi_{p,q}(t)\right]$ являются функциями ковариации и взаимной ковариации стационарных случайных процессов $\xi_{k,j}(t),k,j\in Z$.

В работе [1] показано, что сумма ПКСП с разными периодами образует поли-ПКСП соответствующей кратности. Поэтому сумма двух ПКСП с разными периодами является частным случаем более общей модели БПКСП.

Целью работы является нахождение алгоритмов оценивания стационарных компонент сигналов представляемых в виде сумм ПКСП с дискретным временем на фоне помехи типа "гауссов белый шум".

Сложность такой "неклассической" задачи фильтрация аддитивной суммы периодически коррелированных случайных процессов заключается в трудности использования фильтрации в рамках детерминистского подхода, так как в любой заданный диапазон частот могут попасть стационарные компоненты процессов с различным периодом. Широко известны прикладные задачи, математическая постановка которых включает линейную оценку случайного процесса $\lambda(t)$ по наблюдению $\xi(t)$ на интервале $[a,b]$, связанному известной зависимостью с фильтруемым процессом $\lambda(t)$. Подобная задача может решаться методами линейной Калмановской фильтрации периодически нестационарных сигналов на фоне аддитивной суммы сигналов, каждый из которых описывается подобной моделью. При этом полагается, что каждый из процессов, участвующих в сумме, статистически независим. Необходимость решения подобных задач связана с тем, что подобный метод разделения сложного процесса на векторный процесс с более простым описанием позволяет строить алгоритмы, инвариантные к имеющимся помехам, а также упростить алгоритмы принятия решений, связанные с тем, что сложный полипериодический случайный процесс на фоне помех может быть сведен к описанию стационарных компонент каждого из независимых ПКСП.

Широко используемые алгоритмы для фильтрации сигналов, как правило, относятся к фильтрации на фоне аддитивной помехи, такие, например, описаны в работе [1]. В работах [7] рассмотрено обобщение такой задачи на случай фильтрации сигналов, когда информация о вероятностных свойствах сигналов известна в рамках указанной модели. Такие условия обработки сигналов здесь определены.

В настоящей работе рассматривается пример решения задачи восстановления стационарных компонент методами фильтрации.

Постановка задачи

Пусть наблюдаемый сигнал описывается в виде суммы ПКСП:

$$\xi(t) = \sum_{\nu=1}^{M} \xi_\nu(t), \tag{2}$$

заданных на дискретном множестве времени T.

Для каждого из процессов ПКСП $\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_M(t)$ выполняется условие периодической коррелированности

$$K(t+T, t+T) = K(t,t),$$

где $K(t,t)$ – корреляционная функция.

Для гармонизуемых ПКСП справедливо представление [1]

$$\xi(t) = \sum_{n \in Z} C_n(t) \exp(i \frac{2\pi}{T} nt), \tag{3}$$

где C_n (t) – стационарные компоненты, которые могут быть заданы как векторный процесс авторегрессии скользящего среднего.

Требуется получить оптимальные оценки стационарных компонент по наблюдаемым реализациям суммы ПКСП с известными параметрами.

Для решения поставленной задачи сформулируем ее в терминах многомерной фильтрации, когда имеется один канал наблюдения, а сообщения являются векторным "многокомпонентным", то есть, необходимо произвести совместную обработку результатов измерений для различных стационарных компонент модели, представленной в виде суммы ПКСП.

Пусть наблюдаемые реализации случайного процесса заданы дискретными моментами времени. Матричные разностные уравнения наблюдения и сообщения описываются в виде

$$\xi_\nu = \sum_{i \in Z} \vec{h}_\nu^i \vec{\lambda}_\nu^i + u_\nu + n_{0\nu}, \tag{4}$$

$$\lambda_\nu^{(i)} = A_{\nu-1}^{(i)} \vec{\lambda}_{\nu-1}^{(i)} + \vec{n}_{\lambda\nu}^{(i)},$$

где $h_\nu^{T_i} = \left| \exp\left[j \frac{2\pi}{T_i} (-H)\nu \right], \exp\left[j \frac{2\pi}{T_i} (-H+1)\nu \right], ..., \exp\left[j \frac{2\pi}{T_i} H\nu \right] \right|$ – весовой коэффициент; $n_{0\nu}, \vec{n}_{\lambda\nu}^{(i)}$ – последовательность взаимно независимых скалярных и векторных белых гауссовских шумов с нулевым математическим ожиданием и корреляционным элементом V_ν и матрицей ψ_ν.

Составим расширенный вектор параметров стационарных компонент $\vec{\lambda}_\nu$ и расширенный передаточный вектор $\vec{h}_\nu$, образованные из всех элементов соответствующих векторов в виде:

$$\vec{\lambda}_\nu = \left[\vec{\lambda}_\nu^{(1)}, \vec{\lambda}_\nu^{(2)}, ..., \vec{\lambda}_\nu^{(r)}\right]^T, \ \vec{h}_\nu = \left[\vec{h}_\nu^{T_1}, \vec{h}_\nu^{T_2}, ..., \vec{h}_\nu^{T_r}\right].$$

Обобщая для случая БПКСП уравнение наблюдения и сообщения, имеем:

$$\xi_\nu = \vec{h}_\nu \vec{\lambda}_\nu + u_\nu + n_{0\nu}, \tag{5}$$

$$\lambda_\nu^{(i)} = A_{\nu-1}^{(i)} \vec{\lambda}_{\nu-1}^{(i)} + \vec{n}_{\lambda\nu}^{(i)},$$

где $h_\nu = \left| \exp\left[j(\frac{2\pi}{T_1}(-H_1^1) + \frac{2\pi}{T_2}(-H_2^1))\nu \right], ..., \exp\left[j(\frac{2\pi}{T_1} H_1^1 + \frac{2\pi}{T_2} H_2^1)\nu \right] \right|$ – расширенный весовой коэффициент.

Алгоритм многомерной линейной фильтрации в дискретном времени /2/ имеет следующий вид

$$\hat{\vec{\lambda}}_\nu = A_{\nu-1}\hat{\vec{\lambda}}_{\nu-1} + \vec{K}_\nu \left(\xi_\nu - u_\nu - \vec{h}_\nu \tilde{A}_{\nu-1}\hat{\vec{\lambda}}_{\nu-1}\right),$$

$$R_\nu = (I - \vec{K}_u \vec{h}_\nu)\tilde{R}_\nu, \tag{6}$$

$$\tilde{R}_\nu = A_{\nu-1}^T R_{\nu-1} A_{\nu-1} + \psi_\nu,$$

$$\vec{K}_\nu = \frac{\tilde{R}_\nu \vec{h}_\nu^T}{\vec{h}_\nu R_\nu \vec{h}_\nu + V_\nu}.$$

Приведенные выражения определяют полный алгоритм оценивания (идентификации) параметров модели в виде суммы процессов ПКСП. Рекуррентные алгоритмы вычислений стационарных компонент $\hat{\vec{\lambda}}_\nu$, корреляционных матриц ошибок фильтрации R_ν и векторного коэффициента усиления $\vec{K}_\nu$ существенно упрощают расчеты с использованием ЭВМ.

С целью определения характеристик и проверки работоспособности проводилось математическое моделирование на ЭВМ. Генерировались сигналы в виде независимых гауссовских ПКСП:

$$X_s = \sum_{\nu=1}^{2} \sum_{l=0}^{H_\nu} \xi_s^\nu \exp\left[j\frac{2\pi}{N_s} ls \right], \tag{7}$$

где N_1 и N_2 – периоды ПКСП, а стационарные компоненты ПКСП удовлетворяют векторным уравнениям авторегрессии первого порядка $\vec{\xi}_s^\nu = A^\nu \vec{\xi}_{s-1}^\nu + B^\nu \vec{n}_s^\nu$.

Для каждого из моделируемых ПКСП задавались свои матрицы коэффициентов авторегрессии:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,1 & 0,0 \\ -0,1 & 0,9 & -0,1 \\ 0,0 & -0,1 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0,95 & -0,1 & 0,0 \\ -0,1 & 0,9 & -0,1 \\ 0,0 & -0,1 & 0,9 \end{bmatrix},$$

а $B^1 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,1 \end{bmatrix}$ и $B^2 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,1 \end{bmatrix}$ – коэффициенты регрессии.

Порождающие процессы $\vec{n}_s, \vec{\zeta}_s$ являлись гауссовскими трехмерными процессами с независимыми компонентами. Длительность наблюдаемых реализаций модельных сигналов принимали равной 100 отчётам.

При проведении статистического эксперимента задавали следующие параметры: $N_1 = 3$ и $N_2 = 4$.

Оценивание стационарных компонент модельных сигналов производили в соответствии с алгоритмом (6). Для заданных условий эксперимента получена относительная ошибка, равная 0,29. На рис. 1 пунктиром приведен энергетический спектр одной из компонент для моделируемых реализаций, а вторая кривая соответствует энергетическому спектру восстановленной реализации. Относительная ошибка для энергетических спектров составила 0,68. Проведенные исследования подтверждают сходимость вероятностносных характеристик стационарных компонент модельных сигналов и их оценок, полученных по результатам фильтрации.

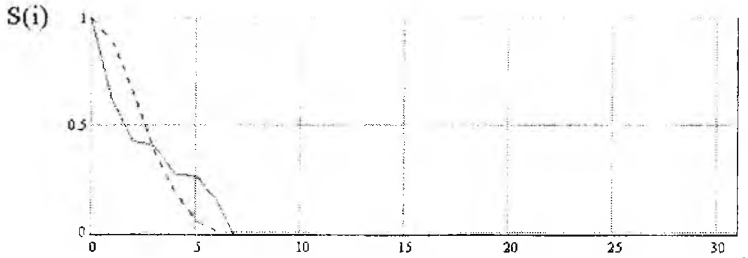

Рис.1

Заключение

Сформулирована задача определения стационарных компонент поли-ПКСП. Найден алгоритм восстановления стационарных компонент сумм ПКСП на фоне аддитивной помехи типа "гауссов белый шум" методом линейной Калмановской фильтрации. По результатам статистического эксперимента показана возможность практического использования алгоритмов восстановления реализаций периодически коррелированных случайных процессов. Найдены характеристики приведенных алгоритмов, с использованием модельных сигналов показана сходимость энергетических спектров модельных и восстановленных стационарных компонент БПКСП, исследованы практические особенности основных этапов решения сформулированной задачи.

Список литературы: 1. *Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н.* Методы вероятностного анализа ритмики океанических процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 320 с. 2. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем: Учебное пособие для вузов.-М.: Радио и связь, 1991. 608 с. 3. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Сов радио, 1975. 704 с. 4. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и её применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 496 с.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 30.07.2000