6. Численные эксперименты

В качестве тестового примера рассмотрим следующие исходные данные: w=20; $\nu_w^0=0{,}08$; $\nu_l^0=0{,}05$; m=6; n=7; $R_1=3$; $R_2=4{,}1$; $R_3=2{,}7$; $R_4=3{,}7$; $R_5=2{,}2$; $R_6=1{,}8$; $R_7=2$; $\nu_{x_1}^0=0{,}09$; $\nu_{x_2}^0=0{,}1$; $\nu_{x_3}^0=0{,}05$; $\nu_{x_4}^0=0{,}12$; $\nu_{x_5}^0=0{,}01$; $\nu_{x_6}^0=0{,}02$; $\nu_{x_7}^0=0{,}03$; $\nu_{y_1}^0=0{,}03$; $\nu_{y_2}^0=0{,}14$; $\nu_{y_3}^0=0{,}06$; $\nu_{y_4}^0=0{,}07$; $\nu_{y_5}^0=0{,}04$; $\nu_{y_6}^0=0{,}05$; $\nu_{y_7}^0=0{,}05$.

Применяя к решению поставленной задачи изложенный выше метод, получаем следующий результат: точное решение задачи (20), (21) равно: l=10,8577. Для сравнения, точное решение для идеализированного случая равно: l^0=10,503, а точные нижняя и верхняя оценки оптимального решения задачи (20), (21) равны соответственно: l^-= 9,657, l^+=11,1442. Справедливо неравенство $l^- < l^0 < l < l^+$, причем предложенный в работе алгоритм позволяет улучшить верхнюю оценку l^+ на 0,0965.

Литература: 1. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. К.: Наук. думка, 1976. 248с. 2. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук.думка, 1986. 286с. 3. *Новожилова М.В.* Решение задачи поиска глобального экстремума линейной функции цели на структуре линейных неравенств. Харьков, 1988. 48с. / (Препр./ АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; №292). 4. *Milencovic V., Daniels K., Li Zh.* Placement and compaction of nonconvex polygons for clothing manufacture // Paper for forth Canadian conference on computational geometry. St. John's, Newfoundland, Canada. 1992. P.10-18. 5. *Dowsland K.A., Dowsland W.B.* Solution approaches to irregular nesting problems // Europ. Journ. Oper. Res. 1995. 84. P.506-521. 6. *Элементы теории геометрического проектирования* / Под ред. В.Л.Рвачева. К.: Наук. думка, 1995. 244с. 7. *Сысоева Ю.А.* Математическая модель и метод решения задачи размещения правильных ориентированных многоугольников в полосе. Харьков, 1996. 19с. Рукопись представлена Ин-том проблем машиностроения НАН Украины. Деп. в ВИНИТИ 22 января 1996 г. №242В-96. 8. *Стоян Ю.Г.* Метрическое пространство центрированных интервалов // Докл. НАН Украины. 1995. №7. С.23-25. 9. *Стоян Ю.Г.* Интервальные отображения // Докл. НАН Украины. 1996. №10. С.57-63. 10. *Стоян Ю.Г.* Интервальное пространство $I_S^2(R)$. Интервальные уравнения. Харьков, 1996. 19с. (Препр./ НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения; №392). 11. *Стоян Ю.Г.* Интервальные множества. Харьков, 1997. 27с. (Препр./ НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения; № 400). 12. *Moore R.E.* Interval analysis. Prentice Hall, 1966. 400p. 13. *Kaucher E.* Interval analysis in the extended interval space IR // Comp.Suppl. 1980. P.33-49. 14. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 356с. 15. *Ахо А., Хопкфорт Дж, Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979. 536с.

Поступила в редколегию 20.06.98

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Чудинович И.Ю.

Сысоева Юлия Анатольевна, ассистент кафедры естественных наук ХТУРЭ. Научные интересы: оптимизационные методы геометрического проектирования. Адрес: 310726, Украина, Харьков, пр.Ленина, 14, тел. 30-09-03.

УДК 519.21

ФОКУСИРУЮЩИЕ ФАКТОРЫ. БАЗИСЫ ФОКУСИРОВКИ И СТАБИЛИЗАЦИИ

ДИКАРЕВ В.А.

Введены понятия меры фокусировки, базиса фокусировки и базиса стабилизации. Приведены примеры их применения при рассмотрении реальных процессов, которые могут быть описаны системами уравнений Колмогорова.

Рассмотрим задачи, связанные с процессами фокусировки и стабилизации [1—4]. Фокусировка и стабилизация имеют место в системах,эволюция которых может быть описана с помощью марковских процессов с непрерывным временем и конечным числом состояний. Явления фокусировки и стабилизации состоят в том, что при определенных воздействиях на процесс его основные характеристики (вероятности состояний, переходные вероятности и др.) с изменением времени все менее отличаются от наперед заданых значений. Эти воздействия можно выбрать так, что промежуток времени, необходимый для фокусировки и стабилизации, можно сделать сколь угодно малым. В статье основное внимание уделено именно этому случаю. Общий случай, когда время, необходимое для фокусировки и стабилизации, произвольно, рассматривается аналогично.

В [1,2] показано, что фокусировка в точке t_0 может иметь место, если элементы $\lambda_{ij}(t)$ инфинитезимальной матрицы $\Lambda(t)$ (все или их часть) при $t \uparrow t_0$ быстро возрастают. Возникающие при этом в точке t_0 разрывы функций $\lambda_{ij}(t)$ должны быть неинтегрируемы (случай точной фокусировки) или почти неинтегрируемы (случай s-фокусировки). Если кроме этого выполняются некоторые условия (см. [2,4]), то при $t \uparrow t_0$:

а) для случая точной фокусировки

$$P_j(S_0, t) \to \pi_j; \tag{1}$$

б) для случая s-фокусировки

$$\varlimsup_{t \uparrow t_0} P_j(S_0, t) \in (\pi_j - \sigma, \pi_j + \sigma),$$
$$\varliminf_{t \uparrow t_0} P_j(S_0, t) \in (\pi_j - \sigma, \pi_j + \sigma). \tag{2}$$

Здесь индексом j нумеруются состояния $\pi_j > 0$, $\sum_j \pi_j = 1$, (1) и (2) должны выполнятся для всех состояний; величина s в (2) является нижней гранью по всем $\tilde{\sigma}$, для которых условия (2) имеют место. Случай точной фокусировки связан с бесконечными энергозатратами и является некоторой идеализацией, позволяющей наиболее полно исследовать процесс фокусировки. Далее, где это не оговорено, под точками фокусировки будем понимать точки s-фокусировки.

Быстрый рост (при $t \uparrow t_0$) элементов матрицы L обычно возникает из-за воздействия на процесс быстро изменяющихся факторов, локализованных на малых промежутках времени. Часто бывает, что такие факторы, многократно воздействуя на процесс в течение некоторого промежутка времени, всякий раз вызывают сильные возмущения элементов матрицы L, что приводит к многократному "тиражированию" точек фокусировки, подобных тем, которые были описаны выше для точки t_0. На практике приходится иметь дело с такими факторами, которые, непрерывно воздействуя на процесс в промежутке времени [a,b]М[0,Г), приводят к появлению на нем точек фокусировки, распределённых почти непрерывно. Такие факторы будем называть фокусирующими. В этом случае для любого [t',t")М[a,b] можно ввести меру фокусировки F[t',t"). Положим

$$
\begin{gathered}
F[t',t'')=\sup_j \left\{ R_j(t',t'') - r_j(x',x'') \right\} \\
R_j(t',t'') = \sup_i P_{ij}(t',t''),\ r_j = \inf_i P_{ij}(t',t''),
\end{gathered} \tag{3}
$$

нижняя грань в (3) берётся по всем значениям j. Величина F(t',t") фиксирует суммарный фокусирующий эффект, возникающий за счет всех точек фокусировки, "размазанных" на [t',t").

Если вклад любой точки фокусировки из [a,b] в суммарный фокусирующий эффект на этом отрезке мал, можно ввести понятие плотности распределения точек фокусировки $P_F(t)$. При этом следует использовать макроскопическое описание понятия плотности (см, например, [5]), когда пренебрегают "микроскопическими" значениями усредняемых величин. Если среди точек фокусировки, распределённых на [a,b], есть точки, вклад которых в суммарный фокусирующий эффект существенен, при описании плотности $P_F(t)$ следует использовать d-функции. В случае, когда плотность фокусировки постоянна на [a,b], для любого [t',t") мера F[t',t") зависит лишь от длины [t',t") и на любом [t',t") фокусировка процесса производится на одно и то же распределение.

Рассмотрим множество P векторов $\vec{P}(P_1, P_2, \dots)$, вообще говоря, бесконечномерных, таких что

$$P_i > 0 \ \ (i = 1,2,\dots), \ \ \sum_i P_i = 1.$$

Любой такой вектор можно рассматривать как вектор распределения вероятностей. Пусть $\left\{\vec{P}_n\right\}$ (n=1,2,...) - ε-сеть в П. С любым элементом $\vec{P}_n$ этой сети свяжем марковский процес с инфинитезимальной матрицей $\Lambda_n(t)$ $(S_0 < t < t_0)$, для которого t_0 является точкой фокусировки на $\vec{P}_n$. Отметим,что матрицу $\Lambda_n(t)$, реализующую эту фокусировку, можно выбрать неоднозначно. Множество $\left\{\Lambda_n(t)\right\} = \Omega(t_0)$ всех таких матриц будем называть базисом фокусировки на t_0.

Рассмотрим векторную кривую $\vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots)$, $t \in [\alpha, \beta]$, вообще говоря, бесконечномерную, такую что

$$\varphi_k(t) > 0 \ \ (k = 1,2,\dots), \ \ \sum_k \varphi_k(t) \equiv 1 \text{ на } [\alpha, \beta].$$

Для любого $t \in [\alpha, \beta]$ вектор $\vec{\varphi}(t)$ можно рассматривать как вектор распределения вероятностей. Используя подход, изложенный в [2,3], можно проверить, что существует процесс с соответствующим образом подобранной на $[\alpha, \beta]$ плотностью точек фокусировки, для вероятностей всех состояний которого выполняются условия

$$\left| P_j(\alpha, t) - \varphi_j(t) \right| < \sigma, \ t \in [\alpha + \delta, \beta], \ j = 1,2,\dots \tag{4}$$

Это (δ, σ)-стабилизация.

Решение задачи о стабилизации можно стандартизировать, введя понятие базиса стабилизации. Его построение (с некоторыми изменениями) производится так же, как и построение базиса фокусировки.

При решении многих прикладных задач о фокусировке и стабилизации особый интерес представляют такие ситуации, когда: а) фокусировка производится на распределение

$$\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_l, \dots), \tag{5}$$

в котором все компоненты, кроме одной, например, π_l, мало отличаются от нуля, а π_l лишь незначительно отличается от единицы; б) аналогично, стабилизация производится на такую векторную кривую

$$
\begin{gathered}
\vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots) \\
\varphi_k(t) > 0, \ \sum_k \varphi_k(t) = 1, \ t \in [\alpha, \beta],
\end{gathered} \tag{6}
$$

в которой все компоненты, кроме π_l, малы, а π_l мало отличается от единицы. Дело в том, что марковские процессы, с которыми приходится встречаться на практике, описывают определённые технологические, физические, экологические и другие процессы. Их состояниями являются конкретные экологическая или экономическая ситуации, которые можно реализовывать, воздействуя на процесс определённым образом подобранными факторами. Если выход на конкретное состояние (режим) производить с помощью процесса фокусировки (или стабилизации), то в качестве предельного распределения вероятностей, на которые производится фокусировка, следует выбрать то, в котором вероятность, отвечающая предпочтительному режиму, мало отличается от единицы.

При решении конкретных задач о фокусировке и стабилизации на распределения вида (5), (6) часто приходится иметь дело с такими, воздействующими на процесс факторами, которые, в свою очередь, подвергаются детерминованным или случайным возмущениям. Эти возмущения обычно приводят к тому, что отлаженный с помощью специальным образом подобранных воздействий технологический режим изменяет свои рабочие характеристики, в результате чего фокусировка (или стабилизация) уже не будет удовлетворять условиям (5), (6). Описанная ситуация приводит к задачам о возмущениях элементов базиса фокусировки (стабилизации), о потере базисности и о том, как при этом будут изменяться линейные комбинации базисных элементов, реализующие заданный рабочий режим. Эти задачи здесь не рассматриваются.

При рассмотрении конкретного технологического процесса решение задачи о его фокусировке (стабилизации) на заданное распределение удобнее проводить с помощью естественного базиса фокусировки, который тесно связан с исследуемым процессом. Определим этот базис. Пусть $\{F_\alpha\}_{\alpha=1}^{m}$ - множество воздействующих на процесс факторов и $\delta_\alpha \Lambda$, (a=1,...,m) - инфинитезимальная матрица, составленная из возмущений элементов матрицы L процесса, возникающих под воздействием возмущения фактора F_α. Рассмотрим множество $\{\delta_\alpha \Lambda\}_{\alpha=1}^{m}$ и отображение

$$\delta F_\alpha \to \delta_\alpha \Lambda \;\; (\alpha = 1,...,m). \tag{7}$$

Допустим, что каждое возмущение $\delta_\alpha \Lambda$ реализует фокусировку исследуемого процесса на некоторое распределение $\vec{P}_\alpha$ и что $\vec{P}_1,...,\vec{P}_m$ линейно независимы. Тогда $\{\delta_\alpha \Lambda\}_{\alpha=1}^{m}$ будем называть естественным базисом фокусировки. Особый интерес представляет случай, когда отображение (7) линейное.

Рассмотрим пример использования естественного базиса. Пусть этот базис известен и известно распределение вероятностей состояний $\vec{P}$, соответствующее паспортному технологическому режиму R_p. Допустим, что реально действующему режиму R_d соответствует наблюдаемое распределение вероятностей $\vec{P}_d$, отличающееся от паспортного $\vec{P}$. Требуется найти возмущения δF_α факторов F_α, которые приводят к несовпадению режимов R_p и R_d. Если отображение (7) линейное, то решение этой задачи сводится к рассмотрению систем линейных алгебраических уравнений. Решение данной задачи для случая, когда отображение (7) нелинейное, не может быть получено без дополнительной информации о его свойствах.

Пусть процесс фокусировки исследуется на $[s_0, t_0)$. Пусть, далее, существует такое состояние j_0, для которого

$$\int_{s_0}^{t_0} f(t)dt = \infty \,, \tag{8}$$

где $f(t) = \inf_i \left|\lambda_{i\,j_0}(t)\right|,\; t \in [s_0, t_0),\; \lambda_{i\,j_0}(t)$ — элементы j_0-го столбца инфинитезимальной матрицы. Условие (8) является необходимым для того, чтобы фокусировка в t_0 имела место [2]. При решении ряда задач о фокусировке и стабилизации в ряде случаев удобно перейти от функции f(t) к функциям $f^*(t),\; f^+(t, t_0),\; f^+(t, s_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_0)$, определение которых приводится ниже. Переход к этим функциям позволяет использовать отдельные результаты из теории пространств Г.Г.Лоренца [6,7]. Из приводимых ниже определений видно, что для функций $f^+(t, t_0),\; f^+(t, s_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_0)$ также будет выполняться условие (8). Используя подход, изложенный в [1,2,4], можно проверить, что мера фокусировки на $[s_0, t_0)$ полностью определяется функцией f(t). В связи с этим подчеркнем, что при переходе от f(t) к $f^+(t),\; f^+(t, s_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_0)$, мера фокусировки $F[s_0, t_0)$ не изменяется.

Пусть f(t) — произвольная функция, измеримая и почти всюду конечная на временной оси. Если существует такое N>0, что множество $E = \{t:\ |f(t)| > N\}$ имеет конечную меру, то определим функцию $f^*(t)$ $(0 < t < \infty)$ убывающую, непрерывную справа, равноизмеримую с f(t):

$$\mathrm{mes}\{t:\ f^*(t) > N\} = \mathrm{mes}\{t:\ |f(t)| > N\} \tag{9}$$

для любого N>0. Здесь символ mes означает меру Лебега. Если носитель функции f(t) имеет конечную меру, равную a, то доопределим $f^*(t)$ при t>a, полагая $f^*(t)$ =0. При рассмотрении процессов фокусировки удобнее работать с функцией $f^*(t, t_0)$. Она определяется как $f^*(t)$, но здесь роль нуля играет точка фокусировки t_0, а ось t направлена влево: $-\infty < t < t_0$. При этом $f^+(t)$ по-прежнему определяется формулой (9). Определим $f^+(t, s_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_0)$. Рассмотрим произвольное разбиение T интервала $[s_0, t_0)$ точками деления $t_1, ..., t_{n-1};\; s_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_0$. Для каждого частичного отрезка $[t_{k-1}, t_k]$ зададим $f^+(t, s_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_0)$, положив

$$f^+(t_0, t_1, ..., t_n, t) = \begin{cases} f^+(t, t_k),\; t \in [t_{k-1}, t_k) \\ 0,\; t \notin [t_{k-1}, t_k] \end{cases}, \tag{10}$$

где $f^+(t, t_k)$ определяется для $t \in [t_{k-1}, t_k)$ так же, как и $f^+(t, t_0)$. Можно проверить, что на каждом частичном отрезке $[t_{k-1}, t_k)$ мера фокусировки при переходе от f(t) к $f^+(t, s_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_0)$ сохраняется. Если f(t) измерима и почти всюду конечна на $[s_0, t_0)$, то при $\max_k (t_k - t_{k-1}) \to 0$ $f^+(t, s_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_0)$ сходится к f(t) на $[s_0, t_0)$. Если же f(t) непрерывна на $[s_0, t_0)$, то эта сходимость будет равномерной.

Использование функций $f^*(t),\; f^+(t, t_0),\; f^+(t, s_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_0)$ позволяет более точно оценивать меру фокусировки исследуемого процесса и дает возможность проследить за ее вариациями при воздействии на процесс факторов, быстро изменяющихся во времени.

Литература: 1. *Дикарев В. А.* Точки эргодичности и сходимость к финальным вероятностям. Харьков, 1994. 7с. Деп. в ГНТБ Украины 17.10.94, №2017-Ук 94. 2. *Дикарев В. А.* Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей. Харьков, 1995. 11 с. Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95, №526-Ук 95. 3. *Дикарев В. А.* Точки фокусировки и стабилизация неоднородных марковских процессов. Харьков, 1995. 9 с. Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95, №533 – Ук 95. 4. *Веприк А. Е., Герасин С. Н., Дикарев В. А., Родзинский А. А.* Методы и алгоритмы фокусировки распределений марковских процессов. Харьков, 1997.158 с. 5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1977. 532 с. 6. *G.G. Lorentz*, Some new functional spaces, Ann. of Math., 51 (1950). P. 37-55. 7. *Дикарев В.А.* Теоремы вложения для одного класса функциональных пространств. Докл. АН, СССР. Т. 168, N6 (1966). С. 1239-1241.

Поступила в редколлегию 12.05.98

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Руткас А.Г.

Дикарев Вадим Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: случайный анализ и его приложения. Адрес: 310164, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 33-57-03 , 40-94-36 .

УДК 681.513.7

СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ СО СТРУКТУРНЫМИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

УДОВЕНКО С.Г.

Предложен алгоритм синтеза цифровых регуляторов, учитывающий структурные ограничения на матрицу обратной связи. Рассмотрена возможность субоптимального управления стохастическими объектами с дополнительными ограничениями на переменные состояния.

Введение

Методы оптимального управления линейными системами при квадратичном критерии качества и заданных переменных состояния зачастую основаны на решении дискретного уравнения Риккати. Однако на практике такой подход не всегда является эффективным в силу следующих причин:

– как правило, не все переменные состояния системы доступны наблюдению;

– оценка недостающей информации о состоянии системы с помощью наблюдателя Люенбергера или фильтра Калмана существенно усложненяет расчеты на каждом такте управления;

– синтез многосвязных регуляторов требует определения большого числа обратных связей, задающих структуру управления;

– при ограниченной априорной информации о параметрах объекта необходимо применять адаптивные методы оценивания, что, в сочетании с трудоемкой многошаговой процедурой поиска оптимальных управлений, приводит к значительным вычислительным трудностям;

– в ряде практических случаев возникает необходимость соблюдения различных ограничений на переменные состояния.

Эти обстоятельства существенно ограничивают возможность применения стандартных методов оптимального управления с квадратичным функционалом качества, определяя целесообразность синтеза субоптимальных цифровых регуляторов [1].

На практике возникает необходимость такого синтеза для детерминированных и стохастических систем при наличии различных структурных и параметрических ограничений.

1. Субоптимальное управление детерминированной системой

Рассмотрим многомерную дискретную систему, уравнения состояния которой представлены в виде

$$x(k+1)=Ax(k)+By(k); \qquad (1)$$

$$u(k)=-Gx(k)=-GCy(k), \qquad (2)$$

где для переменных состояния, управления и выхода принимаются условия

$$x(k)\in R^n, \quad u(k)\in R^m, \quad y(k)\in R^l,$$

а матрицы A, B, C и G имеют соответствующие размерности.

Оптимальным будем считать управление $u^*(k)$, минимизирующее на бесконечном интервале квадратичный функционал

$$J=\sum[x^T(k)Qx(k)]+u^T(k)Ru(k)], \qquad (3)$$

где Q – положительно полуопределенная матрица размерности (n×m); R – положительно полуопределенная матрица размерности (m×m). Преобразуем уравнение системы к виду

$$x(k+1)=(A-BG)x(k). \qquad (4)$$

Представим матрицу обратной связи G суммой подматриц G_0 и G_1, где G_0 – подматрица, отдельные элементы g_{0ij} которой содержат предписанные постоянные значения (остальные элементы являются нулевыми); G_1 – подматрица, отдельные элементы g_{1ij} которой рассчитываются в соответствии с алгоритмом оптимизации (остальные элементы являются нулевыми).

Множество индексов (i, j), соответствующих ненулевым элементам $g_{1ij,}$ обозначим символом Ω. При этом

$$g_{1ij}=g_{ij}, \text{ если } (i,j)\in\Omega; \; g_{1ij}=0, \text{ если } (i,j)\notin\Omega; \qquad (5)$$

$$g_{0ij}=0, \text{ если } (i,j)\in\Omega; \; g_{0ij}=\text{const}, \text{ если } (i,j)\notin\Omega. \qquad (6)$$

Введя обозначение

$$K(G)=\sum x^T(k)[Q+G^TRG]x(k),$$

представим функционал (3) в виде

$$J=0{,}5tr[K(G)X(0)X^T(0)], \qquad (7)$$

так как для симметрических матриц

$$x^T(k)Kx(k)=tr[kx(k)x^T(k)].$$

Для оптимизации системы с известными параметрами вместо (7) целесообразно использовать функционал