

Метод Построения Стохастической Модели Квазистационарного Режимы Работы Водопроводной Сети

Андрей Тевяшев
кафедра прикладной математики
Харьковский национальный университет
радиоэлектроники
Харьков, Украина
andrew.teviashev@nure.ua

Светлана Козыренко
кафедра прикладной математики
Харьковский национальный университет
радиоэлектроники
Харьков, Украина
svitlana.kozyrenko@nure.ua

Method of Constructing a Stochastic Model of Quasi-stationary Operating Mode of a Water Supply Network

Andrey Tevjashev
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University
of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
andrew.teviashev@nure.ua

Svitlana Kozyrenko
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University
of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
svitlana.kozyrenko@nure.ua

Аннотация—Рассмотрен общий подход к построению стохастической модели режима работы водопроводной сети по оперативным данным, включающим измерения расходов и давлений на выходах активных элементов и давлений в диктующих точках. Рассмотрены случаи, когда множество диктующих точек совпадает с множеством выходов водопроводной сети, является подмножеством множества выходов, содержит только одну диктующую точку.

Abstract—A general approach to the construction of a stochastic model of the operation mode of a water supply network is considered based on operational data, including measurements of the flow and pressure at the outputs of active elements and pressures at the dictating points. We consider cases when the set of dictating points coincides with the set of outputs of the water supply network, is a subset of the set of outputs, contains only one dictating point.

Ключевые слова—стохастическая модель; водопроводная сеть; идентификация; структура; параметры; состояние.

Keywords—stochastic model; water supply network; identification; structure; options; state.

I. ВВЕДЕНИЕ

Повышение качества и эффективности управления режимами функционирования водопроводных сетей (ВС) связано с созданием модели объекта управления, наиболее адекватно описывающих его свойства с точки зрения достижения целей управления.

При решении задачи оперативного управления режимами транспорта и распределения целевого продукта в ВС на этапе программного управления необходимо иметь статическую модель объекта управления, обеспечивающую его адекватное описание относительно математических ожиданий режимных параметров целевого продукта на его входах и выходах и математических ожиданий параметров участков трубопровода, являющихся по своей природе случайными величинами. В качестве такой модели используется стохастическая модель квазистационарного потокораспределения (КСПР) в ВС.

Огромная размерность реальных ВС, ограниченность информационных ресурсов и оперативных данных



практически исключают эффективность использования полной модели КСПР в этих системах. Поэтому одной из центральных проблем становится проблема построения модели КСПР по оперативным данным, адекватно описывающей реакцию системы в контролируемом пространстве измеряемых параметров.

В работе рассмотрен общий подход к построению стохастической модели КСПР режима работы ВС по оперативным данным, включающим измерения расходов и давлений на выходах активных элементов ВС и давлений в диктующих точках. Рассмотрены два предельных случая, представляющих в основном теоретический интерес, когда множество диктующих точек совпадает с множеством выходов ВС и содержит только одну диктующую точку. Наибольший практический интерес представляет третий промежуточный случай, когда множество диктующих точек является подмножеством множества выходов ВС.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ВОДОПРОВОДНОЙ СЕТИ

Пусть $\mu = \tilde{R} - \hat{R}$ – обобщённый вектор невязок модели, где $\tilde{R}^T = [\tilde{R}(0), \tilde{R}(-1), \tilde{R}(-2), \dots]$, $\hat{R}^T = [\hat{R}(0), \hat{R}(-1), \hat{R}(-2), \dots]$ – обобщенные векторы измеренных и оцененных с использованием моде КСПР параметров режима.

Тогда задача идентификации модели КСПР может быть сформулирована следующим образом:

$$\Phi(F_{II}) = \|\mu\| \rightarrow \min_{F_{II}}, \quad (1)$$

где $F_{II} = \langle G(V, E), C, R \rangle$ – оператор модели КСПР; $I = 0, -1, -2, \dots$. Оператор F_{II} определяется графом сети $G(V, E)$, где V, E – множества вершин и дуг графа сети; вектором параметров реальных участков сети C и вектором режимных параметров R .

В этом случае задача (1) может быть записана в следующем виде:

$$\Phi(F_{II}) = \Phi(V, E, C, R) = \|\mu\| \rightarrow \min_{\langle V, E, C, R \rangle \in \Omega}, \quad (2)$$

где Ω – область, определяемая моделью КСПР и имеющая вид $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$, где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – допустимые множества состояний, параметров и структур модели КСПР.

Задачу минимизации (2) на множестве операторов F_{II} можно решать путём её декомпозиции на три иерархически связанные между собой задачи:

1. Идентификация состояния модели КСПР

$$\Phi_1(R^*) = \min_{R \in \Omega_1} \Phi(V^+, E^+, C^+, R). \quad (3)$$

2. Идентификация параметров модели КСПР

$$\Phi_2(C^*) = \min_{R \in \Omega_2} \Phi(V^+, E^+, C, R^*). \quad (4)$$

3. Идентификация структуры модели КСПР

$$\Phi_3(V^*, E^*) = \min_{V, E \in \Omega_3} \Phi(V, E, C^*, R^*). \quad (5)$$

Символом “+”, “*” отмечены, соответственно, фиксируемые и оптимальные значения переменных.

III. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ВОДОПРОВОДНОЙ СЕТИ

Задача построения стохастической модели КСПР рассматривается для ВС, структура которой задаётся в виде графа $G(V, E)$, содержащего $e = \text{Card}(E)$ дуг и $v = \text{Card}(V)$ вершин.

Множество E дуг графа сети $G(V, E)$ можно представить как $E = M \cup L \cup N$, где M, L, N – множества дуг графа сети, соответствующих реальным участкам; входам и выходам сети, соответственно.

Выберем дерево графа сети, тогда $E = E_1 \cup E_2$, где E_1, E_2 – множества дуг, соответствующих ветвям дерева и хордам. Тогда система уравнений стохастической модели КСПР запишется в следующем виде:

$$M_\infty \{h_r(\omega) + \sum_{i \in E_1} b_{ir} h_i(\omega)\} = 0, r \in E_2; \quad (6)$$

$$M_\infty \{q_i(\omega) - \sum_{r \in E_2} b_{ir} q_r(\omega)\} = 0, i \in E_1, \quad (7)$$

где (Ω, B, P) – вероятностное пространство; Ω – пространство элементарных событий; B – σ -алгебра событий из Ω ; P – вероятностная мера на B ;

$$h_i(q_i(\omega)) = c_i(\omega) q_i(\omega) |q_i(\omega)|^{k_i-1} = 0, i \in M; \quad (8)$$

$$h_j(\omega) = -P_j^\alpha(\omega), j \in L; \quad (9)$$

$$h_j(\omega) = P_j^\alpha(\omega), j \in N; \quad (10)$$

$h_i(\omega), q_i(\omega), P_i(\omega)$ – случайные величины, характеризующие соответственно перепад давлений на i -ой дуге, расход по i -ой дуге, давление в начале ($j \in N$) или конце ($j \in L$) j -ой фиктивной дуги; $c_i(\omega)$ – случайная



величина, характеризующая гидравлическое сопротивление i -го реального участка сети; χ_i - коэффициент нелинейности i -го реального участка сети ($\chi_i \geq 1$); α - показатель степени при значениях давлений; b_{lr} - элемент цикломатической матрицы B_l , построенной для ветвей дерева графа сети; $M\{\cdot\}$ - символ математического ожидания.

Конкретизируем систему уравнений (6),(7) в зависимости от задания граничных условий и выбора дерева графа сети. Пусть дерево графа сети не содержит фиктивных дуг, соответствующих выходам сети. Тогда каждое из множеств M, L, N разобьётся на два, соответствующих ветвям дерева M_1, L_1, N_1 и хордам M_2, L_2, N_2 , причём $N_1 = \emptyset$. В каждом узле, соответствующем входу или выходу сети (дугам множеств L, N), задаётся значение давления или расхода. Задание этих величин разбивает каждое из множеств L_1, L_2, N_2 на два в зависимости от того, задан в этих дугах расход L_{11}, L_{21}, N_{21} или давление L_{12}, L_{22}, N_{22} . Для определённости к ветвям дерева отнесём дугу, соответствующую входу сети с заданным давлением, присвоим её номер 1. В этом случае множество $L_{11} = \emptyset$.

Заменяя все случайные величины их математическими ожиданиями, получим стохастическую модель КСПР в ВС следующего вида:

$$\bar{c}_r \bar{q}_r |\bar{q}_r|^{\chi_r-1} + \sum_{i \in M_1} b_{lr} \bar{c}_i \bar{q}_i |\bar{q}_i|^{\chi_i-1} = 0, r \in M_2; \quad (11)$$

$$\bar{P}_1^\alpha - \bar{P}_r^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{lr} \bar{c}_i \bar{q}_i |\bar{q}_i|^{\chi_i-1} = 0, r \in L_{22}; \quad (12)$$

$$\bar{P}_r^\alpha - \bar{P}_1^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{lr} \bar{c}_i \bar{q}_i |\bar{q}_i|^{\chi_i-1} = 0, r \in N_{22}; \quad (13) \square$$

$$\bar{P}_1^\alpha - \bar{P}_r^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{lr} \bar{c}_i \bar{q}_i |\bar{q}_i|^{\chi_i-1} = 0, r \in L_{21}; \quad (14)$$

$$\bar{P}_r^\alpha - \bar{P}_1^\alpha + \sum_{i \in M_1} b_{lr} \bar{c}_i \bar{q}_i |\bar{q}_i|^{\chi_i-1} = 0, r \in N_{21}; \quad (15)$$

$$\bar{q}_i = \sum_{r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}} b_{lr} \bar{q}_r + \sum_{r \in L_{21} \cup N_{21}} b_{lr} \bar{q}_r, i \in M_1 \cup L_{12}. \quad (16)$$

Здесь $\bar{P}_r = M(P_r); r \in L_{12} \cup L_{22} \cup N_{22};$

$\bar{q}_j = M(q_j), j \in M \cup L_{21} \cup N_{21}; \bar{c}_r, r \in M -$

математические ожидания давлений, расходов и параметров реальных участков ВС, соответственно.

Для системы уравнений (11)-(15) с учётом уравнений (16) независимыми переменными являются

математические ожидания расходов $\bar{q}_i, i \in L_{21} \cup N_{21}$ и давлений $\bar{P}_1; \bar{P}_j, j \in L_{22} \cup N_{22}$, а зависимыми – математические ожидания расходов $\bar{q}_r, r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}$ и давлений $\bar{P}_r, r \in L_{21} \cup N_{21}$. Математические ожидания расходов в хордах $\bar{q}_r, r \in M_2 \cup L_{22} \cup N_{22}$ определяются в результате решения системы уравнений (11)-(13) с учётом уравнений связи (16), а математические ожидания давлений $\bar{P}_r, r \in L_{21} \cup N_{21}$ - из уравнений (14),(15).

В качестве граничных условий в системе уравнений (11)-(16) будем использовать математические ожидания расходов и давлений на входах и выходах ВС $\bar{q}_j, j \in L_{21} \cup N_{21}; \bar{P}_1; \bar{P}_r, r \in L_{22} \cup N_{22}$.

Особенностью стохастической модели КСПР в ВС является необходимость в качестве граничных условий кроме математических ожиданий давлений и расходов на входах и выходах сети задавать их дисперсии. Это позволяет получить оценки дисперсий на входах и выходах ВС. математические ожидания которых представляют собой зависимые переменные в модели КСПР.

Пусть известны оценки дисперсий давлений и расходов на входах и выходах сети $\sigma_r^2,$

$r \in L_{12} \cup L_{22} \cup N_{22}; \sigma_{q_j}^2, j \in L_{21} \cup N_{21}$. Требуется получить

оценки дисперсий $\sigma_{q_j}^2, j \in L_{22} \cup N_{22}; \sigma_{P_r}^2, r \in L_{21} \cup N_{21}$.

Получить такие оценки возможно лишь для линеаризованной модели КСПР, что совпадает с линеаризованной моделью установившегося потокораспределения [1].

Выражения для вычисления оценок дисперсий соответствующих величин имеют следующий вид:

$$\sigma_{q_r}^2 = \sum_{j \in L_{12} \cup L_{22} \cup N_{22}} \left[\left(\frac{\partial q_r}{\partial P_j} \right)^0 \right]^2 \sigma_{P_j}^2 + \sum_{j \in L_{21} \cup N_{21}} \left[\left(\frac{\partial q_r}{\partial q_j} \right)^0 \right]^2 \sigma_{q_j}^2, r \in L_{22} \cup N_{22}$$

$$\sigma_{P_r}^2 = \sum_{j \in L_{12} \cup L_{22} \cup N_{22}} \left[\left(\frac{\partial P_r}{\partial P_j} \right)^0 \right]^2 \sigma_{P_j}^2 + \sum_{j \in L_{21} \cup N_{21}} \left[\left(\frac{\partial P_r}{\partial q_j} \right)^0 \right]^2 \sigma_{q_j}^2, r \in L_{21} \cup N_{21}$$

IV. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ВОДОПРОВОДНОЙ СЕТИ

Пусть в результате обследования ВС удалось установить её структуру и получить оценки её параметров. Объём и состав оперативной информации для реальных систем не обеспечивают выполнения условий топологической наблюдаемости и идентифицируемости модели КСПР. Предположим, что средства телемеханики позволяют контролировать p режимных параметров.



Считая, что $p > 2Card(L)$, выбираем в качестве контролируемых параметров на входах сети расходы $\tilde{q}_i, i \in L$ и давления $\tilde{P}_j, j \in L$. Тогда w , где $w = p - 2Card(L)$, датчиков могут быть использованы для контроля давлений $P_j, j \in N$ на выходах сети. Для определения места установки w датчиков давлений будем использовать эвристическое предположение, что контролировать давления нужно только в диктующих точках, которые и будут вершинами графа эквивалентной модели КСПР.

Множество вершин V графа эквивалентной модели $G(V, E)$ определяется в результате выполнения следующих этапов.

1. Гидравлический расчёт ВС, структура которой описывается исходным графом $G(V_0, E_0)$. Решение задачи гидравлического расчёта ВС позволяет получить оценки математических ожиданий зависимых составляющих вектора режимных параметров $R_2 = \{\tilde{q}_i, i \in L; \tilde{P}_j, j \in N\}$ при задании математических ожиданий независимых составляющих $R_1 = \{\tilde{q}_j, j \in N; \tilde{P}_i, i \in L\}$.

2. Оценка дисперсии $\sigma_{P_r}^2, r \in N$ каждого из давлений $P_j, j \in N$ при заданных дисперсиях компонент вектора R_1 . Получение оценок дисперсий $\sigma_{P_r}^2, r \in N$ осуществляется для линеаризованной модели КСПР. При этом в качестве независимых переменных принимаются математические ожидания расходов на выходах сети $\tilde{q}_i, i \in N$ и давлений на входах сети $\tilde{P}_j, j \in L$. Известны также дисперсии независимых переменных $\sigma_{q_i}^2, i \in N; \sigma_{P_j}^2, j \in L$. Тогда, учитывая, что дисперсии давлений на выходах сети значительно превышают дисперсии давлений на входах сети, т.е. можно принять $\sigma_{P_j}^2 = 0, j \in L$, получим:

$$\sigma_{P_r}^2 = \sum_{j \in N} \left[\left(\frac{\partial P_r}{\partial q_j} \right)^0 \right]^2 \sigma_{q_j}^2, r \in N. \quad (17) \square$$

3. Проранжировав узлы, соответствующие выходам сети, в порядке убывания значений дисперсий $\sigma_{P_r}^2, r \in N$ и ограничиваясь некоторым пороговым значением, получим множество узлов графа сети U , соответствующих диктующим точкам, $U \equiv N$.

4. Определение множества вершин графа модели сети $G(V, E)$. Если значение $Card(V)$ известно и равно p , то множеством V является объединение множества узлов, соответствующих входам сети, и подмножества W первых w элементов множества U .

5. Выбор структуры модели сети. Целесообразно искать структуру модели сети в виде дерева, т.е. $Card(E) = Card(V) - 1$. Это позволяет, решив задачу распределения расходов по узлам сети, принадлежащих множеству W , перейти к структуре сети, для которой выполнены условия топологической наблюдаемости и идентифицируемости, и решать задачу совместного оценивания параметров и состояний модели КСПР.

V. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ И СОСТОЯНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ВОДОПРОВОДНОЙ СЕТИ

Пусть граф $G(V, E)$ модели представляет собой дерево, т.е. $Card(E) = Card(V) - 1$ и $Card(V) = Card(L) + Card(W)$.

Алгоритмы решения задачи совместного оценивания параметров и состояний модели КСПР существенно зависят от мощности множества диктующих точек W .

Случай 1. Граф модели сети содержит все узлы исходного графа, соответствующие входам и выходам сети, т.е. $Card(V) = Card(L) + Card(N)$, $W \equiv N$.

В каждом узле известны измеренные значения расходов $\tilde{q}_i, i \in L \cup N$ и давлений $\tilde{P}_j, j \in L \cup N$, а также значения дисперсий $\sigma_{q_i}^2, i \in L \cup N; \sigma_{P_j}^2, j \in L \cup N$.

Требуется получить оценки параметров $c_i, i \in M$ реальных участков сети, истинных значений расходов $q_i, i \in L \cup N$ и давлений $P_j, j \in L \cup N$, а также функционально связанных с ними расходов в реальных участках сети $q_i, i \in M$.

Согласно методу максимального правдоподобия, формальная постановка задачи совместного оценивания параметров и состояний приводит к задаче условной оптимизации:

$$y = \sum_{i \in L \cup N} \sigma_{P_i}^{-2} (P_i - \tilde{P}_i)^2 + \sum_{j \in L \cup N} \sigma_{q_j}^{-2} (q_j - \tilde{q}_j)^2 \rightarrow \min_{c_r, P_i, q_j \in \Omega}, \quad (18)$$

где Ω - область, определяемая уравнениями модели КСПР (11)-(16).

Конкретизируем вид системы уравнений (6),(7). Выберем дерево графа сети таким образом, чтобы его ветвями стали все фиктивные дуги, соответствующие входам и выходам сети, т.е. $E1 = L \cup N$. Тогда все дуги, соответствующие реальным участкам, станут хордами, т.е. $E2 = M$. В этом случае система уравнений (6),(7) может быть преобразована к следующему виду:

$$\bar{c}_r \bar{q}_r |\bar{q}_r| + \sum_{j \in N} b_{lri} \bar{P}_j - \sum_{j \in L} b_{lri} \bar{P}_j = 0, r \in M; \quad (19)$$



$$\bar{q}_i = \sum_{r \in M} b_{ir} \bar{q}_r, i \in L \cup N. \quad (20)$$

Система уравнений (19), (20) представляет собой систему $m+l+n$ уравнений относительно $2m+2l+2n$ переменных $\bar{q}_i, i \in M \cup L \cup N$; $\bar{P}_j, j \in L \cup N$; $\bar{c}_i, i \in M$.

Разделим переменные задачи на зависимые и независимые. К независимым отнесем давления в дугах, соответствующих входам и выходам сети $\bar{P}_j, j \in L \cup N$, и параметры реальных участков $\bar{c}_i, i \in M$; к зависимым – расходы $\bar{q}_i, i \in M \cup L \cup N$. Выражение (19) позволяет явно выразить расходы в хордах $\bar{q}_r, r \in M$ через давления на входах и выходах сети $\bar{P}_j, j \in L \cup N$ и параметры $\bar{c}_r, r \in M$, и, согласно (20), расходы в ветвях дерева $\bar{q}_i, i \in L \cup N$ также являются явными функциями от $\bar{P}_j, j \in L \cup N$ и $\bar{c}_r, r \in M$.

Специальный способ выбора дерева графа сети и разбиения на зависимые и независимые переменные позволили уравнения (6) - (10) представить в алгебраически разрешенном виде и свести исходную задачу условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации [1]:

$$y = y(P_j, j \in L \cup N; c_r, r \in M) \rightarrow \min_{c_r, P_j}. \quad (21)$$

Для решения данной задачи будем использовать метод Гаусса, основанный на линейной аппроксимации системы ограничений на каждой итерации решения.

Случай 2. Пусть узлами графа модели сети являются все узлы, соответствующие входам сети, и узлы, принадлежащие множеству W , причём $W \subset N$, т.е. $Card(V) = Card(L) + Card(W)$. В узлах, соответствующих входам, известны измерения расходов $\tilde{q}_i, i \in L$ и давлений $\tilde{P}_j, j \in L$, а также их дисперсии $\sigma_{q_i}^2, i \in L, \sigma_{P_j}^2, j \in L$. Кроме того, в узлах, соответствующих множеству W , известны измерения давлений $\tilde{P}_j, j \in W$ и их дисперсии $\sigma_{P_j}^2, j \in W$.

Для решения задачи совместного оценивания параметров и состояний модели КСПР предварительно решим задачу распределения расходов по узлам сети, принадлежащих множеству W . Данная задача может быть решена в результате решения задачи оценивания параметров $c_r, r \in M$ [1].

Учитывая, что уравнения модели (19),(20) представляют собой приведенную форму модели в предположении, что независимые переменные $P_j, j \in L \cup W$ измерены точно, для решения задачи оценивания параметров $c_r, r \in M$ будем использовать

метод наименьших квадратов со взвешиванием измерений по переменным, функция цели согласно которому имеет вид:

$$y = \sum_{i \in L} \sigma_{q_i}^{-2} (\tilde{q}_i - q_i)^2 \rightarrow \min_{c_r, r \in M}, \quad (22)$$

где параметры $c_r, r \in M$ удовлетворяют уравнениям модели КСПР (19),(20).

В результате решения сформулированной задачи получим оценки расходов $q_i, i \in W$, а с использованием линеаризованной модели КСПР - оценки их дисперсий. Принимая оцененные значения за измеренные, можно решать задачу совместного оценивания параметров и состояний модели КСПР, рассмотренную для случая 1,

Случай 3. Пусть узлами графа модели сети являются все узлы, соответствующие входам сети, и один узел, соответствующий выходу, т.е. $Card(V) = Card(L) + 1$.

Известны измерения режимных параметров на входах сети $\tilde{q}_i, i \in L$; $\tilde{P}_j, j \in L$, а также их дисперсии $\sigma_{q_i}^2, \sigma_{P_j}^2, i, j \in L$. Для узла, соответствующего выходу сети, известно измерение давления $\tilde{P}_{l+1}$, $l = Card(L)$, а также его дисперсия $\sigma_{P_{l+1}}^2$.

Тогда оценку расхода на выходе сети, а также его дисперсию можно получить следующим образом:

$$\hat{q}_{l+1} = \sum_{i \in L} \tilde{q}_i; \hat{\sigma}_{q_{l+1}}^2 = \sum_{i \in L} \sigma_{q_i}^2.$$

Считая, что $\tilde{q}_{l+1} = \hat{q}_{l+1}, \sigma_{q_{l+1}}^2 = \hat{\sigma}_{q_{l+1}}^2$, для рассматриваемой модели сети можно решать задачу совместного оценивания параметров и состояний, рассмотренную для случая 1.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод построения модели КСПР по оперативным данным позволяет построить адекватные математические модели КСПР в пространстве измеряемых переменных с учётом ограничений на средства телемеханики. Использование предлагаемого метода позволяет обеспечить повышение качества и эффективности функционирования ВС.

ЛИТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Тевяшев А.Д., Козыренко С.И., Непочатова В.Д. Стохастическая модель квазистационарных режимов работы систем водоснабжения и метод её построения для водопроводных сетей с утечками. В сб. "Трубопроводные системы энергетики. Методические и прикладные проблемы математического моделирования". Новосибирск, Наука, 2015 – с. 205 – 220.

