

ИНВАРИАНТНЫЙ ПОДХОД К СОСТАВЛЕНИЮ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ НЕОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЫ

В работах [1,2] рассматривался инвариантный подход к составлению уравнений гидродинамики и, после их линеаризации, к составлению уравнений акустики. Собственно, общности подхода требовало только уравнение состояния. Применение инвариантного подхода для получения второго уравнения необходимо было лишь для того, чтобы показать универсальность данного метода и доказать правомочность его использования [2].

Необходимость разработки инвариантного подхода была вызвана тем, что составление уравнений акустики на основании существенно различающихся как по физическому содержанию, так и по форме математической записи исходных законов, требовало значительных усилий в части их согласования между собой. Это особенно касалось согласования систем координат. Задачи движения сплошной среды решаются либо в неподвижной системе, координатные оси которой располагают обычно в соответствии с границами потока, либо в системе, которая движется вместе с выбранной частицей среды. Кроме того, используемые для получения уравнений акустики исходные величины не позволяли выстроить компактной последовательности преобразований и требовали привлечения дополнительных физических посылок, которые разными авторами вводились по-разному, причем, не всегда адекватно условиям решаемой задачи. Это неоднократно являлось причиной разночтений при толковании физического смысла промежуточных результатов, а при попытках их использования другими авторами в конечном итоге приводило к ошибкам.

Особую сложность разработка универсального подхода представляет на этапе описания внутреннего состояния среды, ее внутренней энергии. По отношению к механическому движению параметры, зависящие от внутренней энергии, определяют упругость или сжимаемость среды. А они, в свою очередь, особенно важны при описании движения газов и являются определяющими при анализе распространения акустических волн.

В литературе известно много подходов к учету внутренней энергии движущейся неоднородной сплошной среды. Их обилие, как представлено, например в [3], само по себе создает трудности для понимания даже на уровне учебных пособий, но, кроме того, доказывает, что пока не найден достаточно удобный и универсальный подход.

Внутренняя энергия эквивалентна температуре среды, поэтому многим исследователям показалось заманчивым использовать величины, непосредственно определяющие тепловые и температурные характеристики. Наиболее развитые подходы использовали энтропию и энтальпию – тепловую функцию. Например, в предположении неизменности этой величины в невязкой, нетеплопроводной среде в [4] представлен вывод третьего уравнения, однако при этом ничего не говорится о системе координат. При выводе использован подход, аналогичный подходу для вывода второго уравнения. В качестве одного из подходов в [3] представлено использование закона сохранения кинетической энергии для получения второго уравнения, но для движущегося индивидуального объема среды. Это, по сути, приводит к разночтению уже между первым и вторым уравнениями, или к использованию эйлеровской (движущейся) системы координат, которая неудобна для решения подавляющего большинства краевых задач. Использование энтропии в качестве консервативной субстанции в уравнении состояния [5], привело к тому, что уже в начале выкладок третье уравнение фактически оказалось записанным для эйлеровой системы.

Известен подход, основанный на применении закона сохранения для полной энергии в выделенном объеме. Его неоднократно пытались использовать [3]. В нем объединяются кинетическая и потенциальная энергии. Наверное, это самый трудный путь, требующий самых громоздких выкладок. В случае его использования возникает необходимость последующего разделения переменных, характеризующих отдельно кинетическую и потенциальную энергии, и исключения тех, которые связаны с кинетической, для чего используется второе уравнение. Но именно такой путь использован в [6], где, вероятно, получены наиболее точные результаты. Однако они не нашли широкого применения. Вероятнее всего потому, что основывались на слишком громоздких выкладках.

Инвариантный подход выделяет группу скалярных величин, к которым можно единообразно применить закон сохранения и далее провести идентичные математические преобразования, по крайней мере, на начальных стадиях. Не повторяя здесь уже представленные в [1,2] выкладки, запишем систему акустических уравнений, которая получена с использованием инвариантного подхода:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla(\rho_s \vec{v} + \rho \vec{v}_s) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \nabla) \vec{v}_s + \rho(\vec{v}_s \nabla) \vec{v} + \rho_s(\vec{v} \nabla) \vec{v} + \nabla p_s = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + (\vec{v} \nabla \rho_s) + (\vec{v}_s \nabla \rho) - \frac{\rho}{\gamma p} \left[\frac{\partial p_s}{\partial t} + (\vec{v} \nabla p_s) + (\vec{v}_s \nabla p) \right] - \frac{\rho}{\gamma p} \left(\frac{\rho_s}{\rho} - \frac{p_s}{p} \right) \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \nabla p) \right] = 0, \quad (3)$$

где ρ , p и $\vec{v}$ – плотность, давление и скорость движения среды соответственно.

Индексом s обозначены параметры, относящиеся к акустическому течению, без индекса – к основному.

Здесь собраны все слагаемые за исключением тех, которые определяются вязкостью. При определении акустических полей она оказывает столь малое влияние, что учитывается лишь в ряде специфических задач, например, распространения звука в длинных и тонких трубах. В остальных случаях ею можно пренебречь. Решение этой системы необходимо проводить с учетом приближений, допустимых в каждой конкретной задаче.

В качестве примера рассмотрим условия распространения звука в турбулентной температурно-неоднородной атмосфере. Для этого случая флуктуации температуры – ΔT , давления – Δp , плотности – $\Delta \rho$ малы по сравнению со средними значениями этих величин (T_0 , p_0 , ρ_0). Скорость основного потока $\vec{v}$ и ее флуктуации $\Delta \vec{v}$ значительно меньше скорости распространения звуковых волн c , а между собой они могут быть в любом соотношении. Характерный размер флуктуаций основного потока l , значительно больше длины звуковых волн λ_s , а характерный период флуктуаций T_f значительно меньше периода звуковых колебаний T_s . В этом случае можно использовать дополнительные условия. Если температурно-неоднородный газ неподвижен и отсутствуют внешние силовые поля, то давление в нем неизменно. Для атмосферы это условие применимо, так как гравитационным полем при решении задач распространения звуковых волн можно пренебречь. Тогда, используя уравнение состояния, получим:

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}, \quad (4)$$

где R – универсальная газовая постоянная, которая равна $8.31 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{град} \cdot \text{кмоль}}$; μ – масса киломоля; T – абсолютная температура.

Тогда флуктуации давления, определяемые флуктуациями температуры, связаны с ними следующим соотношением

$$\frac{\Delta \rho_T}{\rho_0} = \frac{\Delta T}{T_0}. \quad (5)$$

Флуктуации плотности основного потока определяются также дивергенцией его скорости. Обычно при решении задач рассеяния основной поток считают бездивергентным, например [5]. Отчасти к этому вынуждены прибегать потому, что учесть влияние дивергенции основного потока весьма сложно. Но ее вклад в отраженный сигнал может быть значительным. Дивергенция потока приводит к флуктуациям плотности и давления. Взаимосвязь между этими величинами можно получить, считая, что теплопередача в среде мала. Тогда связь между флуктуациями плотности и давления, обусловленными турбулентностью, определяется адиабатой:

$$\frac{\Delta p_f}{p} = \gamma \frac{\Delta \rho_f}{\rho}. \quad (6)$$

В общем случае уравнения гидродинамики позволяют установить связь между всеми величинами, описывающими турбулентный поток, но определение этой связи весьма сложная задача и не яв-

ляется предметом данной статьи. Здесь оценим только характер связи между пульсациями ветра и пульсациями давления. На основании уравнения непрерывности можно записать:

$$\frac{\Delta p_f}{c \lambda_f} \approx \rho \frac{\Delta v_f}{l}, \quad (7)$$

где λ_f – длина волны звуковых волн, генерируемых турбулентностью.

Как известно [4]:

$$\lambda_f \equiv \frac{c}{\Delta v_f} l. \quad (8)$$

Тогда

$$\Delta p_f \approx z \frac{\Delta v_f^2}{c}, \quad (9)$$

где z – волновое сопротивление среды.

Так как связь между Δp_f и $\Delta \bar{v}_f$ нелинейная, то соотношение их вкладов в суммарный коэффициент отражения может изменяться в зависимости от конкретных условий. Поэтому пренебрегать флуктуациями любого из этих параметров без дополнительного анализа нельзя.

Проведем преобразования системы уравнений (1), (2), (3), сохраняя слагаемые, которые вносят наибольший вклад.

Вычитая из уравнения (1) уравнение (3), получим систему:

$$\frac{\rho}{\gamma p} \left[\frac{\partial p_s}{\partial t} + (\bar{v} \nabla p_s) + (\bar{v}_s \nabla p) \right] + \rho_s \nabla \bar{v} + \rho \nabla \bar{v}_s + \frac{\rho}{\gamma p} \left(\frac{\rho_s}{\rho} - \frac{p_s}{p} \right) \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (\bar{v} \nabla p) \right] = 0, \quad (10)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial t} + \rho_s \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho (\bar{v} \nabla) \bar{v}_s + \rho (\bar{v}_s \nabla) \bar{v} + \rho_s (\bar{v} \nabla) \bar{v} + \nabla p_s = 0. \quad (11)$$

Основной порядок слагаемых в уравнении (10), который соответствует $\frac{p_s}{c \lambda_a}$, имеют первое слагаемое в квадратных скобках и третье слагаемое. Второе слагаемое в квадратных скобках имеет первый порядок малости, остальные слагаемые этого уравнения – более высокий. В уравнении (11) основной порядок слагаемых соответствует $\frac{p_s}{\lambda_a}$. Его имеют первое и последнее слагаемое. Третье слагаемое имеет второй порядок малости, остальные – более высокий. Тогда система упрощается до

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{1}{c^2} (\bar{v} \nabla p_s) + \rho \nabla \bar{v}_s = 0, \quad (12)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial t} + \rho (\bar{v} \nabla) \bar{v}_s + \nabla p_s = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим для этих условий задачу рассеяния волн на неоднородностях атмосферы. Волновое уравнение более удобно составить для звукового давления. Для этого уравнение (12) дифференцируется по времени, а к уравнению (13) применяется операция дивергенции. После вычитания результата имеем:

$$\nabla^2 p_s + \nabla \rho ((\bar{v} \nabla) \bar{v}_s) + \rho \nabla ((\bar{v} \nabla) \bar{v}_s) + \nabla \rho \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{1}{c^2} (\bar{v} \nabla p_s) \right) - \frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla \bar{v}_s = 0. \quad (14)$$

Здесь третье слагаемое представляет собой произведение плотности на дивергенцию вектора $(\bar{v} \nabla) \bar{v}_s$. Используя для записи этого слагаемого дифференциальную и сопряженную диады, разложим его на два:

$$\rho \nabla((\bar{v} \nabla) \bar{v}_s) = \rho \left[(\nabla \bar{v}) \cdot (\nabla \bar{v}_s)^* + (\bar{v} \nabla) \nabla \bar{v}_s \right]. \quad (15)$$

Здесь первое слагаемое в квадратных скобках представляет собой скалярное произведение двух тензоров. Первый является градиентом вектора $\bar{v}$ ($\text{Grad } \bar{v}$), второй – производной вектора $\bar{v}_s$ по вектор-радиусу ($d\bar{v}_s/d\bar{r}$). Во втором слагаемом дивергенцию $\bar{v}_s$ можно представить, используя уравнение (12)

$$\rho(\bar{v} \nabla) \nabla \bar{v}_s = -\rho(\bar{v} \nabla) \left[\frac{1}{\gamma p} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + (\bar{v} \nabla p_s) \right) \right], \quad (16)$$

или

$$\rho(\bar{v} \nabla) \nabla \bar{v}_s = -\frac{\rho}{\gamma p} (\bar{v} \nabla) \left[\frac{\partial p_s}{\partial t} + (\bar{v} \nabla p_s) \right] - \rho \left[\frac{\partial p_s}{\partial t} + (\bar{v} \nabla p_s) \right] (\bar{v} \nabla) \frac{1}{\gamma p}. \quad (17)$$

После подстановки (16) и (17) уравнение (14) принимает вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p_s - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \right)^2 p_s + \nabla \rho (\bar{v} \nabla) \bar{v}_s + \rho \text{Grad } \bar{v} \cdot (\nabla \bar{v}_s) - \rho \left[\frac{\partial p_s}{\partial t} + (\bar{v} \nabla p_s) \right] (\bar{v} \nabla) \frac{1}{\gamma p} + \nabla \rho \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial t} - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p_s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^2} \bar{v} \nabla p_s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \nabla p_s - \frac{1}{c^2} \left(\bar{v} \nabla \frac{\partial p_s}{\partial t} \right) - \frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla \bar{v}_s - \frac{1}{c^2} \bar{v} (\bar{v} \nabla) \nabla p_s = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Опуская слагаемые второго порядка малости, получим:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p_s - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \right)^2 p_s = \\ = -\nabla \rho \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial t} - \rho \left(\text{Grad } \bar{v} \frac{d\bar{v}_s}{d\bar{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \nabla p_s + \frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla \bar{v}_s + \frac{1}{c^2} \bar{v} (\bar{v} \nabla) \nabla p_s. \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом температурных и турбулентных неоднородностей распределение плотности можно представить как

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{\gamma p_0} - \frac{\Delta T}{T_0} \right). \quad (20)$$

Распределение локальной скорости звука будет иметь вид

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\Delta p}{p_0} - \frac{\Delta T}{T_0} \right). \quad (21)$$

Конкретизируем задачу рассмотрением отражения акустических волн. Решение этой задачи с достаточной степенью точности проводится в приближении однократного рассеяния [5]. Переменные представляются в виде сумм основной и рассеянной волн:

$$\rho_s = \rho_{s0} + \rho_{s1}, \quad p_s = p_{s0} + p_{s1}, \quad \bar{v}_s = \bar{v}_{s0} + \bar{v}_{s1}.$$

Левая часть (19) после подстановки p_{s0} , p_{s1} и (21) приобретает вид:

$$\nabla^2 p_{s0} + \nabla^2 p_{s1} - \frac{1}{c_0^2} \left(1 - \frac{\Delta T}{T_0} + \frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{\Delta p}{p_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + ((\bar{v}_0 + \Delta \bar{v}) \nabla) \right)^2 (p_{s0} + p_{s1}) = \Delta_2, \quad (22)$$

где Δ_2 – правая часть (19), содержащая слагаемые малой величины.

Необходимо отметить, что в приближении однократного рассеяния, слагаемые первого порядка малости уравнения (19) приобретают более высокий порядок.

Поле основной волны может быть с достаточной степенью точности представлено в виде решения для однородной атмосферы, которая имеет постоянную скорость движения:

$$\nabla^2 p_{s0} - \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_0 \nabla) \right)^2 p_{s0} = 0. \quad (23)$$

Остальные слагаемые из (22) составят уравнение для рассеянного поля:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p_{s1} - \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_0 \nabla) \right)^2 p_{s1} = & -\frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\Delta T}{T_0} - \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{\Delta p}{p_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + ((\vec{v}_0 + \Delta \vec{v}) \nabla) \right)^2 p_{s0} + \\ & + \frac{2}{c_0^2} \left(\Delta \vec{v} \nabla \frac{\partial p_{s0}}{\partial t} \right) + \frac{2}{c_0^2} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \nabla p_{s0} \right) + \Delta_2 \end{aligned} \quad (24)$$

Первые два слагаемых в правой части определяют порядок величины рассеянного поля. В первом слагаемом учитывается рассеяние на температурных и турбулентных пульсациях. Также учитывается доплеровский сдвиг частоты отраженного сигнала, обусловленный пульсациями основного потока в точке рассеяния. Во втором слагаемом дополнительно учитывается рассеяние на ветровых пульсациях. Два последних слагаемых в правой части имеют более высокий порядок малости, чем первые два. Однако их следует сохранить, так как при акустическом зондировании атмосферного пограничного слоя практически при любых его состояниях наблюдается достаточно сильный отраженный сигнал. Особенно сильный уровень отражения отмечается при интенсивном турбулентном перемешивании. Поэтому нужно сохранить и слагаемые второго порядка малости, в том числе и те, которые составляют добавку Δ_2 . В приближении однократного рассеяния добавка имеет вид

$$\Delta_2 = -\nabla \rho \frac{\partial \vec{v}_{s0}}{\partial t} - \rho \left(\text{Grad } \vec{v} \frac{d\vec{v}_{s0}}{d\vec{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p_{s0}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \nabla p_{s0} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla \vec{v}_{s0} + \frac{1}{c^2} \vec{v} (\vec{v} \nabla) \nabla p_{s0}. \quad (25)$$

Выразить $\vec{v}_{s0}$ в (24) и (25) через p_{s0} можно на основании (12) и (13). При этом, в зависимости от точности решения задачи, можно пренебречь вторыми слагаемыми, учитывающими доплеровский сдвиг частоты, зависящий от локального движения потока в точке рассеяния.

Список литературы: 1. Панченко А.Ю. Уравнение состояния в системе уравнений акустики для неоднородной движущейся среды // Радиотехника. 1997. Вып. 103. С. 169–174. 2. Панченко А.Ю. К оценке интенсивности вторичных источников поля при акустическом зондировании турбулентных движущихся сред // Радиотехника. 2001. Вып. 119. С. 226–228. 3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с. 4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М.: Наука. Т.6: Гидродинамика. 1986. 736 с. 5. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с. 6. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 02.10.2001.