

К РАСЧЕТУ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Введение

Внедрение цифровых технологий обработки и передачи информации создало определенные противоречия между потребностями практики и возможностями теории с точки зрения исследования нелинейного взаимодействия заряженных частиц в электронных приборах. Цифровая информация существенно отличается от аналоговой по своим временным и спектральным характеристикам. По мере нарастания скоростей обмена это различие усугубляется. Несмотря на то, что возникло и интенсивно развивается новое направление в радиотехнике и радиофизике – теория и техника сверхширокополосных электромагнитных импульсов, современная электродинамика все еще базируется в значительной мере на теоретических методах, разработанных для анализа квазигармонических электромагнитных полей. Существующие разнообразные вычислительные методы [1] также не вполне удовлетворяют многочисленным потребностям практики. Таким образом, проблема поиска новых теоретических подходов к решению электродинамических задач остается актуальной.

В электродинамике, помимо разработки новых аналитических и численных методов, целесообразно также оценить эффективность того или иного формализма в подходе к описанию электромагнитных взаимодействий. Как известно, существуют полевой ($\vec{E} - \vec{B}$) и потенциальный формализмы. Последний делится на трехмерный (скалярно-векторный, $\Phi - \vec{A}$) и четырехмерный (четыре-векторный, \vec{A}^f). На сегодняшний день чаще используется полевой формализм, в основе которого лежит предположение о существовании особого вида материальной субстанции – взаимозависимых электрического и магнитного полей, описываемых уравнениями Максвелла. Потенциальный формализм, базирующийся на уравнении Д'Аламбера для электромагнитных потенциалов и уравнении непрерывности для тока, применяется лишь в ограниченном числе публикаций.

Однако даже в этих работах потенциальный формализм не является самодостаточным (логически замкнутым), поскольку известные формулы для расчета электромагнитной энергии и импульса основаны на тензоре электромагнитного поля [1]. Тем самым подразумевается, что вклад в объемную плотность четырехвектора энергии-импульса вносят электрическое и магнитное поля. Заметим, что полевой формализм также не вполне самодостаточен, поскольку в функции Лагранжа для системы заряженных частиц и поля изначально фигурируют потенциалы (от них затем избавляются не вполне очевидным способом¹).

Не исключено, впрочем, что четырехмерный потенциальный формализм можно сделать логически замкнутым. Действительно, четырехвектор электромагнитного потенциала, будучи энергетической характеристикой электромагнитных взаимодействий, естественно вписывается в современные физические теории (релятивистскую теорию поля и квантовую электродинамику). Напряженность электрического и индукция магнитного полей, напротив, являясь силовыми характеристиками взаимодействия зарядов, не имеют, как и само понятие силы, существенного значения в квантовой теории (на это указывается, например, в [2]).

¹ Например, в [1] действие для замкнутой системы из заряженных частиц и электромагнитного поля записывается как сумма трех слагаемых: а) действия для свободных частиц; б) действия, обусловленного взаимодействием частиц с полем; в) действия для самого поля. Однако при выводе выражений для плотности и потока энергии системы считается состоящей лишь из двух слагаемых: а) энергии свободных частиц; б) энергии поля. Несмотря на то, что результат получается правильным, подобная непоследовательность (когда в выражении для действия различают заряды в поле и само поле, а в выражении для энергии – нет), возможно, является наиболее слабым звеном полевого формализма с точки зрения классической электродинамики.

Целью данной статьи является попытка вывести выражения для энергии и импульса распределенной электромагнитной колебательной системы с позиций последовательного (логически замкнутого) потенциального формализма. Для этого вместо предположения, что носителями этих величин являются электрическое и магнитное поля, введем другое предположение. Электромагнитная энергия и импульс – это энергия и импульс некой распределенной колебательной системы, возбуждаемой внешними воздействиями в виде электрических зарядов и токов. Такой системой является четырехмерное пространство-время Минковского.

Общие положения

В работе использованы следующие обозначения. Для отличия четырехмерных векторов и операторов от трехмерных к первым добавлен верхний индекс «f». Фигурные скобки означают объединение заключенных в них компонент в трех- или четырехвектор. Четырехвекторы не разделяются на ковариантные и контравариантные, но в соответствующих местах операторов и скалярных произведений проставлены знаки минус. Например, квадрат четырехвектора $\vec{a}^f = \{a_t, a_x, a_y, a_z\}$ определяется как $(\vec{a}^f)^2 = a_t a_t - a_x a_x - a_y a_y - a_z a_z$, а скалярное произведение четырехвекторов \vec{a}^f и $\vec{b}^f = \{b_t, b_x, b_y, b_z\}$ – как $\vec{a}^f \cdot \vec{b}^f = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$.

Для достижения четырехмерной симметрии уравнений далее везде за исключением особо оговоренных случаев используем временную координату t с размерностью длины, определяемую как произведение скорости света в вакууме на время. Действие (первая главная функция Гамильтона) определяется как интеграл от функции Лагранжа по этой координате и измеряется в Дж·м.

В некоторых случаях будем применять родовые (generic) обозначения для переменных, означающих пространственно-временные координаты. Символом τ обозначается любая из координат t, x, y, z , символом ξ – любая из координат x, y, z . Появление одного из родовых обозначений в знаке суммы означает суммирование по всем координатам, заменяемым данным обозначением (с учетом вышеуказанных знаков произведений составляющих четырехвекторов, если они присутствуют в сумме).

Исходное положение логически замкнутого потенциального формализма состоит в том, что четырехвектор электромагнитного потенциала $\vec{A}^f(t, x, y, z) = \{A_t, A_x, A_y, A_z\}$ – не средство для описания электрического и магнитного полей, а одна из фундаментальных характеристик пространства-времени, наряду с другими его характеристиками (например, тензором кривизны [1]) определяющая, во-первых, поведение в этом пространстве-времени элементарных частиц, обладающих электрическим зарядом, во-вторых – распределение в нем четырехвектора объемной плотности энергии-импульса $\vec{p}^f(t, x, y, z) = \{p_t, p_x, p_y, p_z\}$. Под поведением частицы в классической теории понимается ее траектория, описываемая уравнением движения, в квантовой – распределение амплитуды вероятности, описываемое, например, уравнением Шредингера. Неоднозначность определения потенциала \vec{A}^f , выражающаяся в его калибровочной инвариантности [1], несущественна, поскольку в ряд выражений (например, уравнение движения частицы) потенциал входит только в виде его производных по координатам τ . Если же потенциал фигурирует в исходном виде (как в выражении для единичной псевдоэнергии [3]), его можно доопределить требованием асимптотического приближения всех составляющих четырехвектора \vec{A}^f к нулю при удалении на бесконечность.

Вследствие псевдоевклидовости пространства-времени четырехвектор электромагнитного потенциала описывается гиперболическим уравнением (уравнением Д'Аламбера)

$$\nabla^{2f} \vec{A}^f = \mu_0 \vec{j}^f, \quad (1)$$

где $\nabla^{2f} = \partial^2 / \partial t^2 - \partial^2 / \partial x^2 - \partial^2 / \partial y^2 - \partial^2 / \partial z^2$ – оператор Д'Аламбера; $\vec{j}^f(t, x, y, z)$ – четырехвектор плотности тока; μ_0 – магнитная постоянная. Поэтому пространство-время можно

формально рассматривать как распределенную электромагнитную колебательную систему (физическая природа этой системы в данном случае не важна). Обобщенными координатами ее являются составляющие четырехвектора потенциала A_τ . Если такая точка зрения допустима, для описания электромагнитных явлений можно использовать математический аппарат теории колебаний распределенных систем (см., например, [4]). В частности, электромагнитные волны в пространстве без зарядов и токов следует рассматривать как свободные колебания данной системы, а потенциалы зарядов и токов – как ее вынужденные колебания.

Классифицируем пространство-время как колебательную систему. В области частот $\omega \ll m_0 / \varepsilon_0 \mu_0 \hbar$, где m_0 – масса покоя электрона; ε_0 – электрическая постоянная; \hbar – постоянная Планка, нелинейностью физического вакуума можно пренебречь, и эта система является: а) линейной; б) консервативной; в) бездисперсной. При более высоких частотах увеличивается вероятность рассеяния фотонов на фотонах [5] и становится возможным возникновение реальных электрон-позитронных пар. В данной работе этими и другими нелинейными эффектами пренебрегаем, однако при необходимости они могут быть приняты во внимание.

Собственные функции колебательной системы

Двукратно (doubly) ортогональные [3] в четырехмерном объеме V^f собственные функции $\vec{A}_e^f(t, x, y, z, k_{et}, k_{ex}, k_{ey}, k_{ez})$ оператора Д'Аламбера $-\nabla^{2f}$ для электромагнитной колебательной системы являются базисом, по которому можно раскладывать решения уравнения (1). Они определяются как нетривиальные решения уравнения $\nabla^{2f} \vec{A}_e^f + k_e^2 \vec{A}_e^f = 0$, где $k_e^2 = k_{et}^2 - k_{ex}^2 - k_{ey}^2 - k_{ez}^2$ – собственные числа (квадраты собственных волновых четырехвекторов $\vec{k}_e^f = \{k_{et}, k_{ex}, k_{ey}, k_{ez}\}$) колебательной системы.

Для примера выпишем полную систему собственных функций оператора $-\nabla^{2f}$ в прямоугольном гиперрезонаторе (четырёхмерном параллелепипеде) с периодическими граничными условиями (ГУ) по всем координатам. Здесь $k_{et} = 2\pi l / \Delta T$; $k_{ex} = 2\pi i / \Delta X$; $k_{ey} = 2\pi j / \Delta Y$; $k_{ez} = 2\pi k / \Delta Z$, где ΔT , ΔX , ΔY , ΔZ – размеры гиперрезонатора по координатам t, x, y, z соответственно; l, i, j, k – целые числа. Нижеприведенные выражения можно также рассматривать как исходные при выводе базисных функций для разложения четырехвектора потенциала в электродинамических системах (ЭС) с иными ГУ. Например, неограниченным увеличением ΔT они превращаются в систему собственных функций прямоугольного гиперволновода (трехмерного прямоугольного резонатора в пространстве-времени) с периодическими ГУ по пространственным координатам. Затем, при неограниченном увеличении одного из пространственных размеров, получим аналогичную систему для двухплоскостного гиперволновода (трехмерного прямоугольного волновода в пространстве-времени) с периодическими ГУ по поперечным координатам. Наконец, надлежащим выбором комбинации действительных и мнимых частей составляющих A_τ формируются собственные функции закрытых ЭС прямоугольной геометрии с однородными ГУ на стенках. Путем линейного преобразования собственных функций можно получить множества четырехмерных парциальных функций всех вышеперечисленных систем (четырёхмерных осцилляторов) [3].

Систему собственных функций оператора Д'Аламбера можно разделить на четыре взаимно ортогональные подмножества, отличающиеся числом измерений, в которых замыкаются линии поля четырехвектора \vec{A}_e^f (т.е. количеством отличных от нуля составляющих данного четырехвектора). Несмотря на изящество такой «геометрической» классификации, имеет смысл сохранить традиционные для электродинамики названия данных подмножеств. Далее координаты x, y предполагаются поперечными, координата z – продольной (у функций ТЕМ всегда поперечной является только координата x). Для наглядности временная составляющая четырехвектора потенциала записана последней.

1. Подмножество собственных функций, соленоидальных в четырех измерениях (т.е. $\partial A_{et} / \partial t + \partial A_{ex} / \partial x + \partial A_{ey} / \partial y + \partial A_{ez} / \partial z \equiv 0$). Назовем их *Zero Magnetic (ZM)* или *Potential (P)* [6]:

$$A_{eZMx} = A_0 \frac{k_{ex} k_{et}}{k_{ex}^2 + k_{ey}^2 + k_{ez}^2} \exp(ik_{et}t) \exp(-ik_{ex}x) \exp(-ik_{ey}y) \exp(-ik_{ez}z);$$

$$A_{eZMy} = A_0 \frac{k_{ey} k_{et}}{k_{ex}^2 + k_{ey}^2 + k_{ez}^2} \exp(ik_{et}t) \exp(-ik_{ex}x) \exp(-ik_{ey}y) \exp(-ik_{ez}z);$$

$$A_{eZMz} = A_0 \frac{k_{ez} k_{et}}{k_{ex}^2 + k_{ey}^2 + k_{ez}^2} \exp(ik_{et}t) \exp(-ik_{ex}x) \exp(-ik_{ey}y) \exp(-ik_{ez}z);$$

$$A_{eZMt} = A_0 \exp(ik_{et}t) \exp(-ik_{ex}x) \exp(-ik_{ey}y) \exp(-ik_{ez}z)$$

(если k_{ex} , k_{ey} и k_{ez} равны нулю, k_{et} также должно быть нулевым, при этом $A_{eZMx} \equiv 0$, $A_{eZMy} \equiv 0$, $A_{eZMz} \equiv 0$).

2. Подмножество собственных функций, соленоидальных в трех измерениях x, y, z (т.е. $\partial A_{ex} / \partial x + \partial A_{ey} / \partial y + \partial A_{ez} / \partial z \equiv 0$). Классифицируются как *Transverse Magnetic (TM)* или *Electric (E)*:

$$A_{eTMx} = -A_0 \frac{k_{ex} k_{ez}}{k_{ex}^2 + k_{ey}^2} \exp(ik_{et}t) \exp(-ik_{ex}x) \exp(-ik_{ey}y) \exp(-ik_{ez}z);$$

$$A_{eTMy} = -A_0 \frac{k_{ey} k_{ez}}{k_{ex}^2 + k_{ey}^2} \exp(ik_{et}t) \exp(-ik_{ex}x) \exp(-ik_{ey}y) \exp(-ik_{ez}z);$$

$$A_{eTMz} = A_0 \exp(ik_{et}t) \exp(-ik_{ex}x) \exp(-ik_{ey}y) \exp(-ik_{ez}z);$$

$$A_{eTMt} = 0$$

(если k_{ex} и k_{ey} равны нулю, k_{ez} также должно быть нулевым, при этом $A_{eTMx} \equiv 0$, $A_{eTMy} \equiv 0$).

3. Подмножество собственных функций, соленоидальных в двух измерениях x, y (т.е. $\partial A_{ex} / \partial x + \partial A_{ey} / \partial y \equiv 0$). Классифицируются как *Transverse Electric (TE)* или *Magnetic (H)*:

$$A_{eTEx} = -A_0 \frac{k_{ex} k_{ey}}{k_{ex}^2} \exp(ik_{et}t) \exp(-ik_{ex}x) \exp(-ik_{ey}y) \exp(-ik_{ez}z);$$

$$A_{eTEy} = A_0 \exp(ik_{et}t) \exp(-ik_{ex}x) \exp(-ik_{ey}y) \exp(-ik_{ez}z);$$

$$A_{eTEz} = 0; \quad A_{eTEt} = 0$$

(если k_{ex} равно нулю, k_{ey} также должно быть нулевым, при этом $A_{eTEx} \equiv 0$).

4. Подмножество собственных функций, соленоидальных в одном измерении x (т.е. $\partial A_{ex} / \partial x \equiv 0$). Классифицируются как *Transverse Electric and Magnetic (TEM)*:

$$A_{eTEMx} = A_0 \exp(ik_{et}t) \exp(-ik_{ex}x) \exp(-ik_{ey}y) \exp(-ik_{ez}z);$$

$$A_{eTEMy} = 0; \quad A_{eTEMz} = 0; \quad A_{eTEMt} = 0$$

(k_{ex} всегда должно быть нулевым). A_0 – нормировочная амплитуда четырехвекторного потенциала, для амплитудной нормировки [3] равная 1 В·с/м. Обычная и «геометрическая»

классификации не вполне тождественны. Например, традиционные виды колебаний H_{ij0} , H_{i0k} и H_{0jk} прямоугольного резонатора с однородными или периодическими ГУ на стенках относятся к вышеуказанным подмножествам TM , TE и TEM соответственно.

Функция Лагранжа колебательной системы

В работе [1] приведено выражение для функции Лагранжа замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля и заряженных частиц, которое содержит тензор электромагнитного поля. Чтобы построить функцию Лагранжа электромагнитной колебательной системы, не используя полевых характеристик, воспользуемся сходством математического описания колебательных систем различной физической природы.

В качестве модели используем двумерную распределенную механическую колебательную систему в виде однородной мембраны с площадью S , поверхностной плотностью массы материала ρ_M и линейной плотностью силы натяжения T_M . Мембрана нагружена N постоянными по величине, но перемещающимися по ее поверхности силами f_n ($n = 1, 2, \dots, N$), нормальными к плоскости неподвижной ненагруженной мембраны. Каждая сила сосредоточена на малой (практически точечной) площадке. Обобщенными координатами такой системы являются поперечное отклонение мембраны от положения ненагруженного равновесия $u(t, x, y)$ и координаты точек приложения всех сил $x_n(t)$, $y_n(t)$ (для механической модели t – время в секундах).

Как известно из механики [7], поверхностная плотность кинетической энергии движущейся массы мембраны равна $\rho_M (\partial u / \partial t)^2 / 2$, поверхностная плотность потенциальной энергии деформированного материала мембраны вычисляется как $T_M [(\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2] / 2$. Энергия взаимодействия мембраны с n -й приложенной силой равна $-f_n u(t, x_n, y_n)$. Функцию Лагранжа для такой системы можно записать в виде:

$$L_M(t) = \sum_{n=1}^N f_n u(t, x_n, y_n) + \frac{T_M}{2} \int_S dx dy \left[(\partial u / \partial t)^2 - (\partial u / \partial x)^2 - (\partial u / \partial y)^2 \right], \quad (2)$$

где $c_M = (T_M / \rho_M)^{1/2}$ – скорость поперечной волны в мембране. Первое слагаемое – это составляющая $L_M^I(t)$, обусловленная взаимодействием приложенных сил с колебательной системой, второе – составляющая для самой системы $L_M^S(t)$ (кинетическая энергия движущейся массы мембраны минус потенциальная энергия деформированного материала).

Построим по аналогии функцию Лагранжа для замкнутой распределенной электромагнитной колебательной системы в виде пространства-времени с трехмерным объемом V , содержащего N малых (практически точечных) заряженных частиц с массами покоя m_{0n} и зарядами q_n ($n = 1, 2, \dots, N$). Обобщенными координатами такой системы, помимо составляющих $A_\tau(t, x, y, z)$, являются координаты всех частиц $\xi_n(t)$. Имеем:

$$\begin{aligned} L(t) = & -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \sum_{n=1}^N m_{0n} \sqrt{1 - (dx_n / dt)^2 - (dy_n / dt)^2 - (dz_n / dt)^2} - \\ & -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sum_{n=1}^N q_n \left[A_{nt} - (dx_n / dt) A_{nx} - (dy_n / dt) A_{ny} - (dz_n / dt) A_{nz} \right] - \\ & -\frac{1}{2\mu_0} \int_V dx dy dz \left[(\partial \vec{A}^f / \partial t)^2 - (\partial \vec{A}^f / \partial x)^2 - (\partial \vec{A}^f / \partial y)^2 - (\partial \vec{A}^f / \partial z)^2 \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\vec{A}_n^f(t) \equiv \vec{A}^f[t, x_n(t), y_n(t), z_n(t)]$ – сокращенное обозначение четырехвектора потенциала в месте расположения n -й частицы². Первое слагаемое в (3) – «механическая» составляющая для частиц $L^p(t)$, второе – составляющая, обусловленная взаимодействием частиц с колебательной системой $L^l(t)$, третье – составляющая для самой колебательной системы $L^s(t)$. Можно показать (например, путем подстановки преобразований Лоренца для составляющих четырехвектора потенциала и четырехмерного градиента), что подынтегральное выражение в третьем слагаемом является, как и следует, истинным скаляром.

Это выражение отличается от соответствующего скаляра для полевого формализма [1] наличием членов $(\partial A_\tau / \partial \tau)^2$. Данные члены нельзя убрать, поскольку после этого действие электромагнитной колебательной системы, вычисленное на основе формулы (3), стало бы отличным от действия, вычисленного в полевом формализме. Следовательно, логически замкнутый потенциальный формализм допускает существование колебательных решений для составляющей A_l и дивергентных частей A_ε в пустом пространстве.

Знаки перед слагаемыми в (3) выбраны противоположными по сравнению с соответствующими членами (2) исходя из следующих соображений. Энергия силы, деформирующей мембрану, отрицательна, поскольку на возвращение системы, нагруженной единственной неподвижной силой $f_1(x_1, y_1)$, из стационарного состояния $u_0(x, y)$ в положение, при котором $u \equiv 0$ (например, путем «рассредоточения» этой силы по значительной площади), необходимо затратить энергию $f_1 u_0(x_1, y_1) / 2$. Недостающая половина восполняется за счет положительной потенциальной энергии деформированного материала мембраны. Напротив, уединенная неподвижная частица, создающая в пространстве скалярный потенциал $\Phi_0(x, y, z)$, обладает положительной энергией, так как при рассредоточении ее заряда по значительному объему может быть получена энергия $q_1 \Phi_0(x_1, y_1, z_1) / 2$. Другая половина энергии исходной частицы возвращается колебательной системе.

Несмотря на то, что член $(\partial A_l / \partial t)^2$ входит в функцию Лагранжа с отрицательным знаком, действие не уменьшается неограниченно с ростом k_{el} . В этом нетрудно убедиться, подставляя в (3) выражения для собственных функций оператора Д'Аламбера³.

Введем также объемную плотность функции Лагранжа $\Lambda(t, x, y, z)$. Эта плотность уже присутствует в третьем слагаемом выражения (3). Ее можно определить также для второго слагаемого, поскольку все обобщенные координаты входят в него линейно. Запишем заряд n -й частицы в виде:

$$q_n = \int_V dx dy dz \rho_{0n}(x, y, z), \quad (4)$$

где ρ_{0n} – объемная плотность заряда частицы в системе координат, связанной с этой частицей. Подставляя (4) в (3) и вводя четырехвектор плотности тока по формуле

$$\vec{j}^f(t, x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sum_{n=1}^N \rho_n(t, x, y, z) \{1, dx_n / dt, dy_n / dt, dz_n / dt\}, \quad (5)$$

² Мы не углубляемся здесь в вопрос о размерах электрона и сопутствующие ему проблемы электродинамики [1]. Для наших целей достаточным будет приближение малых, но конечных размеров заряженных частиц. При этом потенциал во всех точках пространства остается конечным. Средневзвешенное по объему частицы (с учетом распределения плотности заряда) его значение можно считать потенциалом в месте расположения частицы.

³ Аналогичная форма функции Лагранжа приведена в неопубликованных работах В.А. Кулигина. К сожалению, наряду с заслуживающими внимания положениями в них присутствует ряд необоснованных утверждений и выводов.

где ρ_n – объемная плотность заряда n -й частицы в системе координат, в которой вычисляется плотность тока, запишем объемную плотность «электромагнитной» части функции Лагранжа $L^I + L^S$ в виде:

$$\Lambda(t, x, y, z) \equiv \Lambda^I + \Lambda^S = -\vec{j}^f \cdot \vec{A}^f - \frac{1}{2\mu_0} \left[(\partial \vec{A}^f / \partial t)^2 - (\partial \vec{A}^f / \partial x)^2 - (\partial \vec{A}^f / \partial y)^2 - (\partial \vec{A}^f / \partial z)^2 \right] \quad (6)$$

(здесь учтено, что произведение $\rho_{0n} dx dy dz$ является инвариантом).

Для слагаемого L^P , в которое обобщенные координаты частиц ξ_n входят нелинейно, определить подобным образом (т.е. вводя четырехвектор «плотности тока масс») объемную плотность функции Лагранжа невозможно. Однако благодаря аддитивности данной функции, «механические» энергию и импульс частиц можно вычислить отдельно и прибавить к общей энергии и общему импульсу системы. В дальнейшем под плотностью функции Лагранжа электромагнитной колебательной системы будем понимать плотность составляющих этой функции, входящих в выражение (6).

Уравнения Лагранжа колебательной системы

Поскольку функция Лагранжа электромагнитной колебательной системы с зарядами и токами (3) содержит две разнородные группы обобщенных координат (дискретные координаты частиц ξ_n и непрерывные в пространстве-времени составляющие четырехвектора потенциала A_t), уравнение Лагранжа необходимо записывать отдельно для частиц и потенциала. Уравнение движения заряженных частиц в электромагнитном поле [2] применимо в потенциальном формализме без каких-либо изменений.

При выводе уравнения Лагранжа для потенциала используем общий вид данного уравнения для распределенных динамических систем [8] (полная производная по τ имеет смысл, описанный в указанной работе):

$$\sum_{\tau} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial \eta_m / \partial \tau)} \right] - \frac{\partial \Lambda}{\partial \eta_m} = 0, \quad (7)$$

где η_m – m -я обобщенная координата системы. Подставляя в (7) Λ из (6) и обобщенные координаты A_t , приходим к уравнению (1), которое и является искомым уравнением Лагранжа для пространства-времени как электромагнитной колебательной системы.

Энергия и импульс колебательной системы

Объемную плотность w «электромагнитной» энергии колебательной системы (без учета «механической» энергии частиц) можно получить непосредственно из плотности ее функции Лагранжа (6), воспользовавшись известным соотношением [8]:

$$w(t, x, y, z) = \sum_m \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial \eta_m / \partial t)} \frac{\partial \eta_m}{\partial t} - \Lambda, \quad (8)$$

где суммирование производится по всем обобщенным координатам системы. В нашем случае это координаты всех частиц ξ_n и составляющие четырехвектора потенциала A_t . Подставляя (6) в (8) с учетом (5) получаем:

$$w(t, x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \rho A_t - \frac{1}{2\mu_0} \left[(\partial \vec{A}^f / \partial t)^2 + (\partial \vec{A}^f / \partial x)^2 + (\partial \vec{A}^f / \partial y)^2 + (\partial \vec{A}^f / \partial z)^2 \right]. \quad (9)$$

Объемная плотность канонического импульса p_m по обобщенной координате η_m вычисляется как [8]:

$$p_m(t, x, y, z) = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial \eta_m / \partial t)}. \quad (10)$$

Для частиц канонический импульс – это их импульс по координатам ξ . Чтобы вычислить импульс распределенной колебательной системы по этим же координатам, необходимо выразить его через канонический импульс данной системы по составляющим A_τ .

Введем четыре континуума переменных Лагранжа $\vec{r}_{L\tau}(t, \vec{r}_{L0}) = \{x_{L\tau}(t, \vec{r}_{L0}), y_{L\tau}(t, \vec{r}_{L0}), z_{L\tau}(t, \vec{r}_{L0})\}$ распределенной колебательной системы (по одному для каждой из составляющих потенциала A_τ), где \vec{r}_{L0} – общий континуум начальных значений этих переменных в некий момент t_0 . Определим переменные Лагранжа таким образом, чтобы составляющая A_τ , вычисленная в точке с координатой $\vec{r}_{L\tau}$, не зависела от времени:

$$\frac{dA_\tau(t, \vec{r}_{L\tau})}{dt} = \frac{\partial A_\tau(t, \vec{r}_{L\tau})}{\partial t} + \frac{\partial A_\tau(t, \vec{r}_{L\tau})}{\partial x} \frac{dx_{L\tau}}{dt} + \frac{\partial A_\tau(t, \vec{r}_{L\tau})}{\partial y} \frac{dy_{L\tau}}{dt} + \frac{\partial A_\tau(t, \vec{r}_{L\tau})}{\partial z} \frac{dz_{L\tau}}{dt} \equiv 0. \quad (11)$$

После подстановки в (6) значения $\partial A_\tau / \partial t$ из (11) плотность функции Лагранжа перестает зависеть от $\partial A_\tau / \partial t$, но становится зависимой от $d\xi_{L\tau} / dt$. Следовательно, плотность импульса распределенной колебательной системы по координате ξ можно вычислить как

$$\sum_\tau \frac{\partial \Lambda}{\partial (d\xi_{L\tau} / dt)} = \sum_\tau \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_\tau / \partial t)} \frac{\partial (\partial A_\tau / \partial t)}{\partial (d\xi_{L\tau} / dt)} = - \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial \vec{A}^f / \partial t)} \cdot \partial \vec{A}^f / \partial \xi, \quad (12)$$

где под производной скаляра по четырехвектору \vec{a}^f понимается четырехвектор, образованный производными данного скаляра по соответствующим составляющим четырехвектора \vec{a}^f . С учетом (5), (6) и (12) составляющая объемной плотности вектора импульса \vec{p} по координате ξ электромагнитной колебательной системы без учета «механического» импульса частиц равна:

$$p_\xi(t, x, y, z) = \rho A_\xi + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\partial \vec{A}^f / \partial t) \cdot (\partial \vec{A}^f / \partial \xi). \quad (13)$$

Можно показать (например, подстановкой преобразований Лоренца для составляющих четырехвектора потенциала и четырехмерного градиента), что величины $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} w$ и p_ξ в совокупности образуют четырехвектор объемной плотности энергии-импульса \vec{p}^f .

Выражение (13) – это эквивалент вектора Пойнтинга для потенциального формализма. С физической точки зрения p_ξ равно объемной плотности «электромагнитного» импульса распределенной колебательной системы (поверхностной плотности потока «электромагнитной» энергии, умноженной на $\varepsilon_0 \mu_0$). Источниками данного импульса могут быть как свободные колебания системы (бегущие или стоячие электромагнитные волны), так и перемещающийся пространственный градиент потенциала, создаваемый движущимися заряженными частицами, в совокупности с потоком энергии взаимодействия этих частиц с колебательной системой.

Суммарные энергия W и составляющая вектора импульса \vec{P} по координате ξ электромагнитной колебательной системы вычисляются путем интегрирования выражений (9) и (13) по объему V и прибавления «механических» энергии и импульса частиц, которые нетрудно вычислить из (3) с помощью известных формул релятивистской механики [1]:

$$W(t) = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \sum_{n=1}^N \frac{m_{0n}}{\sqrt{1 - (dx_n/dt)^2 - (dy_n/dt)^2 - (dz_n/dt)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sum_{n=1}^N q_n A_{n\tau} - \frac{1}{2\mu_0 V} \int dx dy dz \left[(\partial \vec{A}^f / \partial t)^2 + (\partial \vec{A}^f / \partial x)^2 + (\partial \vec{A}^f / \partial y)^2 + (\partial \vec{A}^f / \partial z)^2 \right]; \quad (14)$$

$$P_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sum_{n=1}^N \frac{m_{0n} (d\xi_n/dt)}{\sqrt{1 - (dx_n/dt)^2 - (dy_n/dt)^2 - (dz_n/dt)^2}} + \sum_{n=1}^N q_n A_{n\xi} + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int dx dy dz (\partial \vec{A}^f / \partial t) \cdot (\partial \vec{A}^f / \partial \xi) \quad (15)$$

(для наглядности вторые слагаемые в обоих выражениях записаны в виде сумм по частицам).

Разложение потенциала по собственным функциям колебательной системы

Произвольный четырехвекторный потенциал гиперрезонатора можно разложить в ряд Фурье по его четырехмерным собственным функциям (нормальным модам):

$$\vec{A}^f(t, x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{ZMm} \vec{A}_{eZMm}^f + \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{TMm} \vec{A}_{eTMm}^f + \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{TEM} \vec{A}_{eTEM}^f + \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{TEMm} \vec{A}_{eTEMm}^f,$$

где u_m – безразмерные комплексные коэффициенты разложения (амплитуды m -х нормальных мод из соответствующих подмножеств).

Коэффициенты u_m можно вычислить из заданного распределения четырехвектора плотности тока в четырехмерном объеме гиперрезонатора V^f путем решения уравнения (1). Предварительно запишем условия ортогональности нормальных мод первого и второго рода [3] с учетом самосопряженности оператора $-\nabla^{2f}$ соответственно как:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{V^f} dt dx dy dz \vec{A}_{em}^f \vec{A}_{em'}^{f*} = \begin{cases} 0 & (m' \neq m), \\ \tilde{H}_{em} & (m' = m); \end{cases} \quad (16)$$

$$\frac{1}{2\mu_0} \int_{V^f} dt dx dy dz (-\nabla^{2f} \vec{A}_{em}^f) \vec{A}_{em'}^{f*} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V^f} dt dx dy dz \vec{A}_{em}^f (-\nabla^{2f} \vec{A}_{em'}^{f*}) = \begin{cases} 0 & (m' \neq m), \\ H_{em} & (m' = m), \end{cases} \quad (17)$$

где \tilde{H}_{em} – так называемое единичное псевдодействие четырехвекторного потенциала m -й нормальной моды, Дж·м·с² (термин введен по аналогии с единичной псевдоэнергией [3]); H_{em} – единичное действие четырехвекторного потенциала этой же моды, Дж·м.

Умножая (1) на \vec{A}_{em}^{f*} и интегрируя по V^f , с учетом (17) получаем:

$$u_m = -\frac{1}{2H_{em}} \int_{V^f} dt dx dy dz \vec{j}^f(\tau, x, y, z) \vec{A}_{em}^{f*}.$$

Из (16) и (17) следует формула Рэлея для нормальных мод $k_{em}^2 = H_{em} / \tilde{H}_{em}$.

Применяя к (17) первую формулу Грина с учетом однородности или периодичности ГУ для составляющих потенциала на границе гиперрезонатора, приходим к выражению для единичной функции Лагранжа L_{em} четырехвекторного потенциала m -й нормальной моды, Дж:

$$L_{em}(t) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V^f} dx dy dz \left(\left| \partial \vec{A}_{em}^f / \partial t \right|^2 - \left| \partial \vec{A}_{em}^f / \partial x \right|^2 - \left| \partial \vec{A}_{em}^f / \partial y \right|^2 - \left| \partial \vec{A}_{em}^f / \partial z \right|^2 \right),$$

согласующемуся с точностью до знака с третьим слагаемым (3). Единичную энергию W_{em} , Дж, и составляющие единичного импульса \vec{P}_{em} , Дж·с/м четырехвекторного потенциала этой же моды определим как:

$$W_{em}(t) = \frac{1}{2\mu_0} \int dx dy dz \left(\left| \partial \vec{A}_{em}^f / \partial t \right|^2 + \left| \partial \vec{A}_{em}^f / \partial x \right|^2 + \left| \partial \vec{A}_{em}^f / \partial y \right|^2 + \left| \partial \vec{A}_{em}^f / \partial z \right|^2 \right);$$

$$P_{em\xi}(t) = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int dx dy dz (\partial \vec{A}_{em}^f / \partial t) \cdot (\partial \vec{A}_{em}^{f*} / \partial \xi).$$

Тогда функция Лагранжа L^S , энергия W^S и импульс \vec{P}^S колебательной системы, в которой возбуждена только m -я нормальная мода [третьи слагаемые в (3), (14) и (15)], записываются как $L^S(t) = -u_m^2 L_{em}(t)$; $W^S(t) = -u_m^2 W_{em}(t)$; $\vec{P}^S(t) = -u_m^2 \vec{P}_{em}(t)$. Выбор знаков объясняется желанием сохранить одинаковый вид выражений для единичных величин (16), (17) и др. в трех- и четырехмерном потенциальных формализмах.

Некоторые физические следствия

Определение функции Лагранжа в виде (3) влечет за собой несколько иную трактовку ряда физических объектов и явлений, чем в полевом формализме. Перечислим основные отличия.

1. В полевом формализме энергия замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля и заряженных частиц, рассматривается как сумма положительной «механической» энергии частиц (включая их энергию покоя) и положительных энергий электрического и магнитного полей. В потенциальном формализме энергия замкнутой распределенной электромагнитной колебательной системы состоит из положительной «механической» энергии частиц (включая их энергию покоя), положительной или отрицательной энергии взаимодействия заряженных частиц с составляющей A_t четырехвектора потенциала, отрицательной энергии изменяющейся в пространстве-времени составляющей A_t и положительной энергии изменяющихся в пространстве-времени составляющих A_ξ этого четырехвектора.

2. В полевом формализме вклад градиентов составляющих четырехвектора потенциала по направлениям этих составляющих в общую плотность электромагнитной энергии-импульса тождественно равен нулю. В потенциальном формализме данные градиенты вносят определенную добавку в плотность энергии-импульса.

3. В полевом формализме не рассматриваются колебательные решения волнового уравнения для составляющей A_t и дивергентных составляющих A_ξ четырехвектора потенциала в пространстве, свободном от заряженных частиц (продольные электромагнитные волны). В потенциальном формализме такие решения учитываются. При этом волны составляющей A_t обладают отрицательными энергией и импульсом, составляющих A_ξ – положительными. Вдали от зарядов и токов данные составляющие «подавляют» друг друга (т.е. силовое воздействие их на другие заряды тождественно равно нулю), вблизи зарядов и токов этот баланс нарушается [6]. Таким образом, волны в свободном пространстве и колебания ограниченных объемов типа $ZM(P)$ могут рассматриваться как некая физическая возможность, которая, однако, не реализуется (по крайней мере, с позиций классической электродинамики) вследствие ограничения, накладываемого законом сохранения заряда.

4. В полевом формализме кванты электромагнитного поля (фотоны) трактуются как обычные частицы. В потенциальном формализме квантуется энергия распределенной электромагнитной колебательной системы. Поэтому фотоны здесь рассматриваются как квазичастицы (аналогичные, например, фононам). Наиболее полная аналогия достигается при разложении электромагнитных колебаний в решетку связанных парциальных осцилляторов [3].

Отрицательную плотность энергии и импульса, создаваемую четырехмерным градиентом временной составляющей четырехвектора потенциала, можно попытаться физически интерпретировать с позиций квантовой электродинамики [5]. Вакуум в ней рассматривается как множество квантованных осцилляторов с нулевыми уровнями энергии $\hbar k_{et} / 2\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Уменьшение суммарной нулевой энергии осцилляторов при наличии градиента составляющей A_t относительно значения этой энергии при отсутствии данного градиента можно рассматривать как появление «отрицательной» энергии физического вакуума. Вопрос о физических механизмах такого явления, если оно имеет место, остается открытым.

Перечисленные отличия, по-видимому, не создают каких-либо противоречий с общепринятыми, экспериментально подтвержденными положениями электродинамики (по крайней мере, классической). Тем не менее, окончательно подтвердить или опровергнуть возможность существования логически замкнутого потенциального формализма можно лишь после оценки возможности применения данного выражения в квантовой теории поля.

Выводы

Как полевой, так и потенциальный формализм в описании электромагнитных взаимодействий не являются на сегодняшний день взаимно независимыми (логически замкнутыми). Поэтому вопрос, можно ли сделать хотя бы один из них таковым, имеет принципиальное значение.

В описанном варианте логически замкнутого потенциального формализма постулируется выражение для функции Лагранжа электромагнитной колебательной системы (пространства-времени Минковского), не содержащее тензор электромагнитного поля. Уравнение Лагранжа для электромагнитного потенциала и плотность электромагнитной энергии-импульса получаются затем путем подстановки данной функции (или ее объемной плотности) в известные из теории колебаний соответствующие общие выражения для распределенных динамических систем.

Предложенное выражение для функции Лагранжа электромагнитной колебательной системы, судя по всему, не противоречит общепризнанным положениям классической электродинамики. Однако окончательное заключение о его правомочности можно сделать лишь после теоретического исследования на его основе электромагнитных явлений в различных физических системах.

Список литературы: 1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с. 2. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: «Мир», 1977. 352 с. 3. Грицунов А.В. Разложение нестационарных электромагнитных потенциалов по парциальным функциям электродинамической системы // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. 2006. Т. 49, № 7. С. 10-20. 4. Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов. Т. IV. Лекции по колебаниям. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 512 с. 5. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 728 с. 6. Грицунов А.В. Методы расчета нестационарных негармонических полей в направляющих электродинамических системах // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 6. С. 645-661. 7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с. 8. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.