

УДК 519.7



ИНТЕРПРЕТАЦИИ АЛГЕБРЫ ИДЕЙ

М.Ф. Бондаренко¹, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко², Ю.П. Шабанов-Кушнаренко³

^{1, 2, 3} ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

В статье разработан абстрактный эквивалент алгебры конечных предикатов – алгебра идей. Рассмотрена формальная числовая интерпретация алгебры идей для разных размерностей. В алгебре идей введен частичный порядок. Разработано несколько содержательных интерпретаций алгебры идей – смысловая, ситуационно-предикатная и ситуационно-кодвая.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ РАВЕНСТВА, ТЕОРИЯ ИНТЕЛЛЕКТА, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1]. В этих работах рассматривается задача построения абстрактного эквивалента алгебры конечных предикатов, которая, в свою очередь, используется для формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности. Этот абстрактный эквивалент, названный нами алгеброй идей, необходим для дальнейшего развития теории интеллекта. В роли прототипа алгебры идей в работе использована алгебра одноместных k -ичных предикатов первого порядка. Разработана аксиоматика алгебры идей.

1. Числовая интерпретация алгебры идей

В [1] был рассмотрен ряд интерпретаций алгебры идей. В этой статье описывается еще одна интерпретация алгебры идей, называемая нами *алгеброй чисел*. К алгебре чисел приходим, заменяя элементы канонической алгебры идей их номерами. В табл. 1 представлены в виде примера операции дизъюнкции идей (в данной интерпретации – натуральных чисел) при $n=1, 2$ и 3 .

Таблица 1

		y							
		0	1	2	3	4	5	6	7
x	0	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	1	1	3	3	5	5	7	7
	2	2	3	2	3	6	7	6	7
	3	3	3	3	3	7	7	7	7
	4	4	5	6	7	4	5	6	7
	5	5	5	7	7	5	5	7	7
	6	6	7	6	6	6	7	6	7
	7	7	7	7	7	7	7	7	7

Можно, если угодно, считать, что таблицей 1 заданы некоторые функции 2-, 4-, и 8-значной логики [2, с. 35]. При $n=1$ приходим к такой алгебре чисел, для которой роль дизъюнкции идей выполняет операция дизъюнкции двузначной логики. Однако при любом $n>1$ операция дизъюнкции идей в алгебре чисел не совпадает с дизъюнкцией 2^n -значной логики $x \vee y = \max(x, y)$, поскольку в алгебре чисел любой размерности $n>1$ $1 \vee 2=3$, а в

2^n -значной логике $1 \vee 2=2$. Имеется важное отличие семейства всех алгебр чисел от семейства всех многозначных логик с операцией дизъюнкции. Оно состоит в том, что алгебры чисел могут быть заданы лишь на множествах, состоящих из 2^n элементов. Многозначные же логики могут быть заданы на множестве с любым числом элементов k .

Опишем на языке алгебры конечных предикатов в форме неявного задания [3, с. 68] операцию дизъюнкции идей для n -мерной алгебры чисел. С этой целью введем предикат

$$P_0(x, y, z) = x^0 y^0 z^0 \quad (1)$$

и предикат $P_k(x, y, z)$, соответствующий отношению $x \vee y = z$. Символом $\vee$ обозначена операция дизъюнкции идей в алгебре чисел размерности k ($k=1, 2, \dots$). Предикат $P_{k+1}(x, y, z)$ соответствует отношению $x \vee y = z$. Символ $\vee$ обозначает операцию дизъюнкции идей в алгебре чисел размерности $k+1$. Аргументы $P_k(x, y, z)$ предиката $P_k(x, y, z)$ заданы на множестве $\{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$. Предикат P_{k+1} можно выразить через предикат P_k с помощью следующей зависимости:

$$P_{k+1}(x, y, z) = P_k(x, y, z) \vee P_k(x, y - 2^k, z - 2^k) \vee \vee P_k(x - 2^k, y, z - 2^k) \vee P_k(x - 2^k, y - 2^k, z - 2^k). \quad (2)$$

Первое слагаемое, стоящее в правой части равенства (2), задает значения операции $z = x \vee y$, содержащиеся в левой верхней четверти ее таблицы. Второе слагаемое задает правую верхнюю четверть таблицы. Появление разностей $y - 2^k$ и $z - 2^k$ на месте второго и третьего аргументов предиката P_k обусловлено тем, что все значения переменных y и z , связанные с ячейками правой верхней четверти таблицы, возрастают на величину 2^k по сравнению со значениями тех же переменных для соответствующих ячеек левой верхней четверти таблицы. Третье слагаемое задает значения операции дизъюнкции идей для нижней четверти таблицы, а четвертое – для правой нижней. Появление

разностей на месте аргументов предиката P_k в этих слагаемых обусловлено ростом значений соответствующих переменных на величину 2^k по сравнению с их значениями для левой верхней четверти таблицы. Неявное задание операции дизъюнкции идей для n -мерной алгебры чисел получаем, выражая по формуле (2) предикат P_n через предикат P_{n-1} , предикат P_{n-1} — через предикат P_{n-2} и т.д. до тех пор, пока не дойдет до предиката P_0 . Предикат же P_0 выражаем по формуле (1).

В качестве примера найдем описанным способом формулы, задающие в неявном виде операцию дизъюнкции идей для одномерной и двумерной алгебр чисел. Принимая $k=0$ по формулам (2) и (1) находим:

$$\begin{aligned} P_1(x, y, z) &= P_0(x, y, z) \vee P_0(x, y-2^0, z-2^0) \vee \\ &\vee P_0(x-2^0, y, z-2^0) \vee P_0(x-2^0, y-2^0, z-2^0) = \\ &= x^0 y^0 z^0 \vee x^0 (y-1)^0 (z-1)^0 \vee (x-1)^0 y^0 (z-1)^0 \vee \\ &\vee (x-1)^0 (y-1)^0 (z-1)^0. \end{aligned}$$

В алгебре конечных предикатов при любых натуральных значениях x, a, b имеет место следующее равенство:

$$(x-a)^b = x^{a+b} \quad (3)$$

Действительно, если $(x-a)^b = 1$, то $x-a=b$, $x=a+b$, $x^{a+b} = 1$; если же $(x-a)^b = 0$, то $x-a \neq b$, $x \neq a+b$, $x^{a+b} = 0$. Пользуясь зависимостью (3), получаем окончательное выражение, задающее в неявном виде операцию дизъюнкции идей для одномерной алгебры чисел:

$$P_1(x, y, z) = x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^1.$$

Используя только что полученную формулу для предиката P_1 , с помощью равенств (2) и (3) найдем неявное задание операции дизъюнкции идей для двумерной алгебры чисел:

$$\begin{aligned} P_2(x, y, z) &= P_1(x, y, z) \vee P_1(x, y-2^1, z-2^1) \vee P_1(x-2^1, y, \\ &z-2^1) \vee P_1(x-2^1, y-2^1, z-2^1) = x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^1 z^1 \vee \\ &x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^1 \vee x^0 (y-2)^0 (z-2)^0 \vee x^0 (y-2)^1 (z-2)^1 \vee \\ &\vee x^1 (y-2)^1 (z-2)^1 \vee (x-2)^0 y^1 (z-2)^1 \vee (x-2)^1 y^0 (z-2)^1 \vee \\ &\vee (x-2)^1 y^1 (z-2)^1 \vee (x-2)^0 (y-2)^0 (z-2)^0 \vee (x-2)^0 \wedge \\ &\wedge (y-2)^1 (z-2)^1 \vee (x-2)^1 (y-2)^0 (z-2)^1 \vee (x-2)^1 (y-2)^1 \wedge \\ &\wedge (y-2)^1 (z-2)^1 = x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^1 \vee \\ &\vee x^0 y^2 z^2 \vee x^0 y^3 z^3 \vee x^1 y^2 z^3 \vee x^1 y^3 z^3 \vee x^2 y^0 z^2 \vee x^2 y^1 z^3 \\ &\vee x^3 y^0 z^3 \vee x^3 y^1 z^3 \vee x^2 y^2 z^2 \vee x^2 y^3 z^3 \vee x^3 y^2 z^3 \vee x^3 y^3 z^3. \end{aligned}$$

Понятие алгебры идей ранее было определено для размерностей $n=1, 2, \dots$. Случай нулевой размерности, как вырожденный, не рассматривался. Однако, при математическом описании операции дизъюнкции идей в алгебре чисел, являющейся одним из вариантов алгебры идей, нам пришлось

ввести никак не интерпретируемый предикат P_0 . Все остальные предикаты P_k ($k=1, 2, \dots$) были проинтерпретированы как операции дизъюнкции идей в алгебре чисел размерности k . Более естественным было бы рассматривать предикат P_0 в одном ряду с остальными предикатами $P_1, P_2, \dots$ и интерпретировать его как операцию дизъюнкции идей в алгебре чисел нулевой размерности. Таким образом, обнаруживается практическая необходимость введения алгебры идей нулевой размерности. Ниже приведено определение такой алгебры. Оно получено из текста определения алгебры идей размерности $n=1, 2, \dots$ подстановкой вместо символа n числа 0.

Любую алгебраическую систему P_0 , которая состоит из множества S_0 , содержащего $2^0=1$ элемент, отношения равенства $x=y$ и операции $x \vee y$ ($x, y, x \vee y \in S_0$), назовем *алгеброй идей нулевой размерности*, если для нее выполняются следующие условия:

- 1) для любого $x \in S_0$ $x \vee x = x$;
- 2) для любых $x, y \in S_0$ $x \vee y = y \vee x$;
- 3) для любых $x, y, z \in S_0$ $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
- 4) в множестве S_0 содержится элемент 0 такой, что для любого $x \in S_0$ $0 \vee x = x$;
- 5) из элемента 0 можно получить с помощью операции $\vee$ любой элемент множества S_0 .

Приведенная формулировка определения алгебры идей нулевой размерности допускает существенное упрощение. В самом деле, на множестве $\{0\}$ можно определить лишь двуместную операцию. Она характеризуется равенством $0 \vee 0 = 0$. Только эта операция может быть принята в роли дизъюнкции идей алгебры L_0 . Эта операция обладает свойствами идемпотентности ($x \vee x = 0 \vee 0 = 0 = x$), коммутативности ($x \vee y = 0 \vee 0 = y \vee x$), ассоциативности ($((x \vee y) \vee z) = (0 \vee 0) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0 \vee (0 \vee 0) = x \vee (y \vee z)$) и нуля ($0 \vee x = 0 \vee 0 = 0 \vee x$). Поэтому требования 1)–4) нет необходимости включать в определение алгебры идей нулевой размерности. Требование 5) также вытекает из только что полученного прямого определения операции дизъюнкции идей, согласно которому $0=0 \vee 0$. Таким образом, алгебру идей нулевой размерности можно определить просто как любое одноэлементное множество с заданными на нем отношениями равенства и бинарной операцией. Ясно, что такая алгебра существует. Для построения формул алгебры L_0 используется единственный образующий символ 0, базисные символы в алгебре идей нулевой размерности отсутствуют. Очевидно, что все алгебры идей нулевой размерности изоморфны друг другу. Таким образом, алгебра L_0 единственна (с точностью до изоморфизма).

Отметим, что формулировку общего определения алгебры идей можно упростить и для одномерного случая, однако это не удастся сделать

Таблица 2

	y			
x	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	0
2	2	3	2	0
3	3	0	0	3

$x \vee y$

столь радикально, как при $n=0$. Любая двуместная операция, заданная на двухэлементном множестве $S_1 = \{0, 1\}$, полностью определяется аксиомами идемпотентности, коммутативности и нуля. Действительно, по аксиоме нуля находим $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1$. Из аксиомы коммутативности следует $1 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1$. Аксиома же идемпотентности дает $1 \vee 1 = 1$. Мы пришли к операции дизъюнкции двоичных знаков, которая как известно, ассоциативна. Аксиома одномерности, очевидно, также выполняется. Таким образом, при $n=1$ аксиомы ассоциативности и одномерности логически выводимы из остальных аксиом, фигурирующих в определении понятия алгебры идей произвольной размерности. Следовательно, эти две аксиомы можно исключить из определения одномерной алгебры идей. Мы приходим к следующему определению. *Одномерной алгеброй идей* называем любую алгебраическую систему, состоящую из двухэлементного множества S_1 , отношения равенства $x = y$ и операции $x \vee y$ ($x, y, x \vee y \in S_1$), если для нее при любом $x \in S_1$ $x \vee x = x$, $0 \vee x = x$ и при любых $x, y \in S_1$ $x \vee y = y \vee x$.

Оказывается, что аксиомы идемпотентности, коммутативности и нуля, фигурирующие в только что сформулированном определении, логически не зависят друг от друга. Докажем это. Принимаем $S_1 = \{0, 1\}$. Определим операцию дизъюнкции идей как неравнозначность двоичных знаков $x \vee y = x \oplus y$. Такая операция не удовлетворяет аксиоме идемпотентности ($1 \oplus 1 = 0$), но подчиняется аксиоме коммутативности ($x \oplus y = y \oplus x$) и аксиоме нуля ($0 \oplus x = x$). Далее, определяя операцию дизъюнкции идей как функцию $x \vee y = y$, видим, что она некоммутативна ($0 \vee 1 = 1$, $1 \vee 0 = 0$), но идемпотентна ($x \vee x = x$) и удовлетворяет аксиоме нуля ($0 \vee y = y$). Наконец, принимая в роли операции дизъюнкции идей конъюнкцию двоичных знаков $x \vee y = xy$, находим, что она идемпотентна ($xx = x$) и коммутативна ($xy = yx$), но не подчиняется аксиоме нуля ($0 \cdot 1 = 0$). Итак, мы доказали независимость аксиом идемпотентности, коммутативности и нуля друг от друга. Поэтому ни одна из этих аксиом не может быть исключена из приведенного выше определения одномерной алгебры идей.

В двумерном случае ни одну из пяти аксиом невозможно исключить из определения алгебры идей. Нельзя обойтись в определении двумерной алгебры идей и без требования четырехэлементности множества S_2 . Докажем это. Для доказательства независимости аксиомы ассоциативности определим операцию дизъюнкции идей табл. 2. Для нее аксиома ассоциативности не выполняется, поскольку $(1 \vee 2) \vee 3 = 3 \vee 2 = 0$, но $1 \vee (2 \vee 3) = 1 \vee 2 = 3$. Вместе с тем, аксиомы идемпотентности, коммутативности и нуля, как явствует из табл. 2, выполняются.

Выберем в качестве базисных идей элементы 1 и 2. Так как $1 \vee 2 = 3$, то аксиома двумерности выполняется. Множество S_2 четырехэлементно. Итак, аксиома ассоциативности невыводима из остальных свойств двумерной алгебры идей.

Для доказательства независимости аксиомы двумерности принимаем в роли операции дизъюнкции идей дизъюнкцию четырехзначной логики $x \vee y = \max(x, y)$. Как известно, она коммутативна, ассоциативна и идемпотентна. Для нее выполняется и аксиома нуля. Множество S_2 четырехэлементно. Однако, аксиома двумерности не выполняется. Это обусловлено тем фактором, что в каждой дизъюнкции четырехзначной логики $a = x \vee y$, выражающей произвольно выбранный элемент $a \in S_2$, хотя бы одно из слагаемых x или y обязательно должно совпадать с элементом a . Например, элемент 3 можно представить только следующими дизъюнкциями четырехзначной логики: $3 = 0 \vee 3 = 3 \vee 0 = 1 \vee 3 = 3 \vee 1 = 2 \vee 3 = 3 \vee 2 = 3 \vee 3$. В каждой из этих дизъюнкций обязательно присутствует элемент 3. Таким образом, в данном случае существует единственный базис $\{1, 2, 3\}$, число элементов которого не совпадает с числом 2, как того требует аксиома двумерности.

Четырехэлементность носителя S_2 двумерной алгебры идей не вытекает из совокупности всех остальных свойств этой алгебры. Чтобы доказать это утверждение, определим операцию дизъюнкции идей табл. 3.

Таблица 3

	y		
x	0	2	3
0	0	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

$x \vee y$

Нетрудно убедиться в том, что все пять аксиом в данном случае выполняются, однако число элементов в множестве S_2 не равно четырем. Независимость аксиом идемпотентности, коммутативности и нуля непосредственно вытекает из их независимости в одномерной алгебре идей. Итак, мы доказали, что при $n=2$ все шесть рассмотренных выше условий независимы друг от друга, и поэтому их число не может быть уменьшено в рассматриваемом определении алгебры идей. Полученный результат непосредственно распространяется на лю-

бые алгебры идей произвольной размерности $n > 2$. Отметим, что формулировка аксиомы n -мерности допускает некоторое упрощение, а именно, из нее можно исключить требование попарного различия образующих идей $0, e_1, e_2, \dots, e_n$. Дело в том, что, согласно теореме о стандартной форме, число всех идей в множестве S_n не может превысить величины 2^t , где t — число всех различных ненулевых базисных идей. Если бы некоторые из базисных идей, фигурирующих в определении n -мерной алгебры идей совпали друг с другом или с нулем, то оказалось бы, что $t < n$. Но этот вывод противоречит требованию 2^n -элементности множества S_n . Таким образом, условие попарного различия образующих идей вытекает из совокупности всех остальных свойств, присутствующих в определении n -мерной алгебры идей. С учетом сказанного аксиома n -мерности может быть записана в следующей более простой формулировке: "В множестве S_n содержатся такие элементы $e_1, e_2, \dots, e_n$, что из них и из элемента 0 можно с помощью операции $\vee$ получить любой элемент множества S_n ".

Опишем на языке алгебры конечных предикатов в форме неявного задания операцию k -значной дизъюнкции ($k = 1, 2, \dots$). С этой целью введем предикат $Q_k(x)$, задающий область определения k -значных переменных $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Предикат Q_{k+1} выражается через предикат Q_k следующим образом:

$$Q_{k+1}(x) = Q_k(x) \vee x \vee k. \quad (4)$$

Полагаем, что

$$Q_1(x) = x^0. \quad (5)$$

Введем, кроме того, предикат $R_k(x, y, z)$, соответствующий отношению $x \vee_k y = z$. Символ $\vee_k$ обозначает операцию k -значной дизъюнкции: $x \vee_k y = z$. Предикат R_{k+1} выражается через предикат $R_k(x, y, z)$ следующим образом:

$$R_{k+1}(x, y, z) = R_k(x, y, z) Q_{k+1}(x) y^k z^k \vee \vee x^k Q_{k+1}(y) z^k. \quad (6)$$

Полагаем, что

$$R_1(x, y, z) = x^0 y^0 z^0. \quad (7)$$

Сравнивая между собой формулы (1) и (2), описывающие операцию идей для алгебры чисел, с формулами (4)-(7), описывающими операцию дизъюнкции чисел для многозначной логики, мы обнаруживаем, что эти операции сильно отличаются друг от друга по своему строению. Этот факт свидетельствует о существенном отличии алгебры идей от любой алгебры многозначной логики, в которой дизъюнкция используется в роли базисной операции (например, алгебра Россера-Тьюкетта,

алгебра Поста). И, несмотря на то, что операция многозначной дизъюнкции подчиняется аксиомам идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, следовательно, любая такая алгебра многозначной логики, так же как и алгебра идей, относится к коммутативным полугруппам идемпотентов.

На самом деле степень родства между этими двумя алгебрами еще большая, поскольку и дизъюнкция алгебры идей и дизъюнкция многозначной логики подчиняются также и аксиоме нуля. Кроме того, в обеих алгебрах имеется система образующих элементов. Единственное "маленькое" отличие между алгебрами состоит в том, что базис алгебры идей минимален по числу составляющих его элементов, чего не скажешь о базисе алгебры, основанной на операции многозначной дизъюнкции. Так, при общем числе элементов, равном 2^n , базис алгебры идей состоит из n элементов, а базис многозначной логики — из $2^n - 1$ элементов. Минимальность базиса алгебры идей непосредственно следует из того ранее доказанного факта, что попарное различие образующих элементов вытекает из совокупности всех остальных свойств, заключенных в определении алгебры идей. Достаточно было бы изъять из аксиомы n -мерности ограничение на число базисных элементов, и любая алгебра 2^n -значной логики с операцией дизъюнкции подошла бы под определение n -мерной алгебры идей.

2. Частичный порядок в алгебре идей

Пусть L_n — произвольно выбранная алгебра идей размерности n , заданная на носителе S_n , для которой определена операция дизъюнкции идей $\vee$. Введем на множестве S_n бинарное отношение $\leq$, определив его следующим условием: для любых $x, y \in S_n$ утверждение $x \leq y$ равносильно равенству $x \vee y = y$. Докажем, что отношение $\leq$ есть *частичный порядок* [4, с.30]. По аксиоме идемпотентности для любого $x \in S_n$ имеем $x \vee x = x$. Это означает, что $x \leq x$, т.е. отношение $\leq$ рефлексивно. Предположим, что $x, y, z \in S_n$ таковы, что $x \leq y$ и $y \leq z$. Это означает, что $x \vee y = y$ и $y \vee z = z$. Согласно аксиоме ассоциативности $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$, откуда $x \vee z = z$. Мы получили, что $x \leq z$. Таким образом, отношение $\leq$ транзитивно. Пусть $x, y \in S_k$ таковы, что $x \leq y$ и $y \leq x$. Это означает, что $x \vee y = y$ и $y \vee x = x$. Пользуясь законом коммутативности, получаем $x = y \vee x = x \vee y = y$. Мы вывели равенство $x = y$, а это означает, что отношение $\leq$ антисимметрично. Итак, мы доказали, что отношение $\leq$ удовлетворяет всем свойствам, определяющим отношение частичного порядка.

Для примера построим отношение частичного порядка $\leq$ на множестве S_3 в канонической алгеб-

ре идей L_3 . Множество S_3 состоит из восьми идей $0, e_1, e_2, e_1e_2, e_3, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3$. По таблице 4 находим: $0 \vee e_1 = e_1, e_1 \vee 0 \neq 0$, следовательно $0 \leq e_1, e_1 \not\leq 0$. Испытывая таким способом всевозможные пары идей, приходим к следующему отношению частичного порядка $\leq$ на множестве S_3 : $\{(0, 0), (0, e_1), (0, e_2), (0, e_1e_2), (0, e_3), (0, e_1e_3), (0, e_2e_3), (0, e_1e_2e_3), (e_1, e_1), (e_1, e_1e_2), (e_1, e_1e_3), (e_1, e_1e_2e_3), (e_2, e_2), (e_2, e_1e_2), (e_2, e_2e_3), (e_2, e_1e_2e_3), (e_1e_2, e_1e_2), (e_1e_2, e_1e_2e_3), (e_3, e_3), (e_3, e_1e_3), (e_3, e_2e_3), (e_3, e_1e_2e_3), (e_1e_3, e_1e_3), (e_1e_3, e_1e_2e_3), (e_2e_3, e_2e_3), (e_2e_3, e_1e_2e_3), (e_1e_2e_3, e_1e_2e_3)\}$. В табл. 4 представлены значения предиката $\leq(x, y)$, соответствующего только что построенному отношению $x \leq y$.

Таблица 4

	0	e_1	e_2	e_1e_2	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
0	1	1	1	1	1	1	1	1
e_1	0	1	0	1	0	1	0	1
e_2	0	0	1	1	0	0	1	1
e_1e_2	0	0	0	1	0	0	0	1
e_3	0	0	0	0	1	1	1	1
e_1e_3	0	0	0	0	0	1	0	1
e_2e_3	0	0	0	0	0	0	1	1
$e_1e_2e_3$	0	0	0	0	0	0	0	1

$\leq(x, y)$

Опишем общие правила определения принадлежности или не принадлежности пары (x, y) идей x, y отношению $\leq$ в канонической алгебре идей L_n .

1) При любом $x \in S_n$ ($n \in \{1, 2, \dots\}$) пара $(0, x)$ принадлежит отношению $\leq$. Правило непосредственно следует из аксиомы нуля $0 \vee x = x$.

2) При любой ненулевой идее $x \in S_n$ пара $(x, 0)$ не принадлежит отношению $\leq$. Правило непосредственно следует из равенства $x \vee 0 = x$, вытекающего из аксиомы нуля и коммутативности.

3) Пусть $x = e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}, y = e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_q}$, где $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда пара (x, y) принадлежит отношению $\leq$ в том и только том случае, если $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}\} \subseteq \{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_q}\}$. Правило означает, что при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ любая пара (x, y) принадлежит отношению $\leq$ в том и только том случае, когда все базисные символы, входящие в состав идеи x , входят также и в состав идеи y .

Справедливость третьего правила можно продемонстрировать на материале только что рассмотренного примера. Так например, $e_1e_3 \leq e_1e_2e_3$, но $e_2e_3 < e_1e_3$, вместе с тем $\{e_1e_3\} \subseteq \{e_1e_2e_3\}$, но $\{e_2e_3\} \not\subseteq \{e_1e_3\}$.

Для доказательства третьего правила достаточно установить, что: а) оно выполняется в алгебре L_1 , б) из предположения, что третье правило вы-

полняется в алгебре L_{k-1} , вытекает его выполнение также и в алгебре L_k . В алгебре L_1 имеется всего лишь одна пара (e_1, e_2) ненулевых идей. Поскольку $e_1 \vee e_1 = e_1$, то $e_1 \leq e_1$. Вместе с тем, $\{e_1\} \subseteq \{e_1\}$. Таким образом, третье правило в алгебре L_1 выполняется. Предположим, что в алгебре L_{k-1} третье правило выполняется. Это означает, что для любых $x = e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}$ и $y = e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_q}$ ($x, y \in S_{k-1}$) условие $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_q}\}$ равносильно утверждению $x \leq y$. Чтобы доказать выполнение третьего правила в алгебре L_k , достаточно проверить его справедливость для пар вида $(x, y), (e_k, e_k), (x, e_k), (e_k, x), (e_k, xe_k), (xe_k, e_k), (x, ye_k), (xe_k, y), (xe_k, ye_k)$. Здесь имеется в виду, что x, y — произвольные ненулевые идеи, принадлежащие множеству S_{k-1} .

Для пары (x, y) третье правило выполняется по индуктивному предположению. Пара (e_k, e_k) принадлежит отношению $\leq$, поскольку $e_k \vee e_k = e_k$. Вместе с тем, $\{e_k\} \subseteq \{e_k\}$. Пары (x, e_k) и (e_k, x) не принадлежат отношению $\leq$, поскольку $x \vee e_k = e_k \vee x = xe_k$ и $e_k \neq xe_k, x \neq xe_k$. Вместе с тем, $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}\} \not\subseteq \{e_k\}$ и $\{e_k\} \not\subseteq \{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}\}$. Пара (e_k, xe_k) принадлежит отношению $\leq$, а пара (xe_k, e_k) — нет, поскольку $e_k \vee xe_k = xe_k \vee e_k = xe_k$ и $e_k \neq xe_k$. Вместе с тем, $\{e_k\} \subseteq \{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}, e_k\}$, а $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}, e_k\} \not\subseteq \{e_k\}$. Пара (xe_k, y) не принадлежит отношению $\leq$, поскольку $xe_k \vee y = (x \vee y)e_k \neq y$. Вместе с тем, $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}, e_k\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_q}\}$.

Если $x \leq y$, то $x \vee y = y$, и тогда пары $(x, ye_k), (xe_k, ye_k)$ принадлежат отношению $\leq$, поскольку $e_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = ye_k, xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = ye_k$. Вместе с тем, $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_q}\}$, откуда $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}, e_k\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_q}, e_k\}, \{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}, e_k\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_q}, e_k\}$. Если же $x \not\leq y$, то $x \vee y \neq y$ и тогда пары $(x, ye_k), (xe_k, ye_k)$ не принадлежат отношению $\leq$, поскольку $x \vee ye_k = (x \vee y)e_k \neq ye_k, xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k \neq ye_k$. Вместе с тем, $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}\} \not\subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_q}\}$, откуда $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}\} \not\subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_q}, e_k\}, \{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}, e_k\} \not\subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_q}, e_k\}$. Итак, справедливость третьего правила доказана.

Описанные выше правила, по которым можно определить, выполняется или нет отношение $x \leq y$ для произвольных идей x и y , легко переводятся с языка канонической алгебры идей на язык формул произвольной алгебры идей. Будем говорить, что нулевая стандартная форма является *частью* любой стандартной формы. Будем, кроме того, считать, что ненулевая стандартная форма $f = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$ ($p \geq 1$) является частью ненулевой стандартной формы $g = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_q}$ ($q \geq 1$), если все базисные символы, входящие в состав стандартной формы f , входят также в состав стандартной формы g , иначе говоря, если $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p}\} \subseteq \{e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_q}\}$. Тогда отношение $x \leq y$ будет выполняться в том и только в том случае, когда стандартная форма идеи x является частью стандартной формы идеи y . Например, если $x = e_1 \vee e_3$

и $y = e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4$, то $x \leq y$, если же $x = e_2 \vee e_4$ и $y = e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_4$, то $x \leq y$.

Если $x \leq y$, то будем говорить, что идея x *меньше или равна* идее y . Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то будем писать $x < y$ и говорить, что x *меньше* y . Стандартную форму f будем называть *собственной частью* стандартной формы g , если f является частью g и, кроме того, f и g не совпадают друг с другом. Тогда соотношение $x < y$ будет выполняться в том и только том случае, когда стандартная форма идеи x является собственной частью стандартной формы идеи y . Например, если $x = e_1 \vee e_2$ и $y = e_1 \vee e_2 \vee e_4$, то $x < y$, если же $x = e_2 \vee e_3$, $y = e_2 \vee e_3$, то $x \leq y$.

Опишем на языке алгебры конечных предикатов в форме неявного задания отношение $\leq$ n -мерной алгебры чисел. С этой целью введем предикат $T_k(x, y)$, соответствующий отношению $x \leq y$. Символом $\leq$ обозначено отношение “меньше или равно” в алгебре чисел размерности k ($k=0, 1, 2, \dots$). Аргументы x, y предиката $T_k(x, y)$ заданы на множестве $\{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$. Поскольку соотношения $x \leq y$ и $x \vee y = y$ равносильны, то при любых $x, y \in S_k$

$$T_k(x, y) = P_k(x, y, y). \quad (8)$$

Из равенства (8) и равенства (1) выводим:

$$T_0(x, y) = x^0 y^0. \quad (9)$$

Из равенства (2) и равенства (8) получаем:

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x, y) &= P_{k+1}(x, y, y) = P_k(x, y, y) \vee \\ &\vee P_k(x, y - 2^k, y - 2^k) \vee P_k(x - 2^k, y, y - 2^k) \vee \\ &\vee P_k(x - 2^k, y - 2^k, y - 2^k). \end{aligned}$$

Числа y и $y - 2^k$ никогда вместе не принадлежат множеству S_k , поэтому при любом значении переменной y

$$P_k(x - 2^k, y, y - 2^k) = 0.$$

Сказанное приводит к следующему окончательному выражению для предиката T_{k+1} :

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x, y) &= T_k(x, y) \vee T_k(x, y - 2^k) \vee \\ &\vee T_k(x - 2^k, y - 2^k). \end{aligned} \quad (10)$$

В качестве примера найдем с помощью зависимостей (9) и (10) формулы, задающие отношение $x \leq y$ для одномерной и двумерной алгебр чисел. Принимая $k=0$, находим

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= T_0(x, y) \vee T_0(x, y - 2^0) \vee T_0(x - 2^0, y - 2^0) = \\ &= x^0 y^0 \vee x^0 (y - 1) \vee (x - 1) (y - 1)^0. \end{aligned}$$

Пользуясь зависимостью (3), получаем окончательное выражение, задающее в неявном виде отношение $x \leq y$ в одномерной алгебре чисел:

$$T_1(x, y) = x^0 y^0 \vee x^0 y^1 \vee x^0 y^1.$$

Полагая $k=1$ и рассуждая аналогично, приходим к следующей формуле, задающей отношение “меньше или равно” для двумерной алгебры чисел:

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= x^0 y^0 \vee x^0 y^1 \vee x^0 y^2 \vee x^0 y^3 \vee x^1 y^1 \vee \\ &\vee x^1 y^3 \vee x^2 y^2 \vee x^2 y^3 \vee x^3 y^3. \end{aligned}$$

Заметим, что отношению $\leq$, введенное в алгебре чисел, не совпадает с одноименным отношением, используемым в арифметике натуральных чисел. В самом деле, в арифметике утверждение $1 \leq 2$ является истинным высказыванием, а в логической алгебре чисел это утверждение, как явствует из только что записанной формулы, ложно.

Согласно закону нуля для любого $x \in S_n$ $0 \vee x = x$, следовательно $0 \leq x$. Таким образом, идея 0 в множестве S_n — *наименьшая*. В любой алгебре идей L_n при $n=1, 2, \dots$ можно ввести *единичную идею* или единицу, обозначаемую символом 1 , стандартная форма которой, по определению, содержит все базисные символы:

$$1 = e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n. \quad (11)$$

В алгебре идей нулевой размерности L_0 единичная идея не существует, ввиду отсутствия в множестве S_0 базисных идей. Для любого $x \in S_n$ ($n=1, 2, \dots$) выполняется равенство

$$x \vee 1 = 1, \quad (12)$$

называемое законом единицы. Действительно, если $x=0$, то, согласно аксиоме нуля, $0 \vee 1 = 1$. Если же x — ненулевая идея, то она может быть представлена в форме $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$, где $p \in \{1, 2, \dots, n\}$. Используя аксиомы идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, а также определение единичной идеи (11), получаем:

$$\begin{aligned} x \vee 1 &= e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p} \vee e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n = \\ &= e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n = 1. \end{aligned}$$

Равенство (12) означает, что $x \leq 1$ при любом $x \in S_n$ ($n=1, 2, \dots$). Таким образом, единичная идея в множестве S_n — *наибольшая*. Поскольку $0 \neq 1$, то $0 \leq 1$.

Заметим, что из аксиом нуля и коммутативности вытекает единственность нулевой идеи. Действительно, предположим, что существуют идеи 0_1 и 0_2 , удовлетворяющие аксиоме нуля: $0_1 \vee x = x$ и $0_2 \vee y = y$. Полагая $x = 0_2$ и $y = 0_1$, выводим равенство идей 0_1 и 0_2 : $0_1 = 0_2 \vee 0_1 = 0_1 \vee 0_2 = 0_2$. Из закона единицы и аксиомы коммутативности вытекает единственность единичной идеи. Действительно, предположим, что существуют идеи 1_1 и 1_2 , удовлетворяющие закону единицы, $x \vee 1_1 = 1_1$, $y \vee 1_2 = 1_2$. Полагая $x = 1_2$ и $y = 1_1$, выводим равенство идей

1_1 и 1_2 : $1_1 = 1_2 \vee 1_1 = 1_1 \vee 1_2 = 1_2$. Сказанное позволяет нуль алгебры идей L_n однозначно определить как любую идею $x \in S_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$), удовлетворяющую условию: “для всех $x \in S_n$ $a \vee x = x$ ”. Единицу алгебры идей L_n можно однозначно определить как любую идею $b \in S_n$ ($n=1, 2, \dots$), удовлетворяющую условию: “для всех $x \in S_n$ $x \vee b = b$ ”.

Представление идеи z в виде дизъюнкции $z = x \vee y$ идей x и y в случае, когда $x \neq z$ и $y \neq z$, назовем *разложением* идеи z на идеи x и y . Идеи x и y назовем *членами разложения* идеи z . Докажем, что в разложении $z = x \vee y$ всегда $x < z$ и $y < z$. Согласно аксиомам ассоциативности и идемпотентности $x \vee z = x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y = z$, откуда $x \vee z = z$, т.е. $x \leq z$. Т.к. $x \neq z$, то $x < z$. Пользуясь аксиомами коммутативности, ассоциативности и идемпотентности, получаем: $y \vee z = y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y) = x \vee y = z$, откуда следует $y \vee z = z$, т.е. $y \leq z$. Поскольку $y \neq z$, то $y < z$. Докажем, далее, что идеи x и y в разложении $z = x \vee y$ всегда различны. Для этого предположим, что $x = y$, тогда, согласно аксиоме идемпотентности, $z = x \vee y = x \vee x = x$, что невозможно, следовательно, $x \neq y$. Наконец, докажем, что каждый из членов x и y разложения $z = x \vee y$ всегда ненулевой. Действительно, пусть $x = 0$, тогда, согласно аксиоме нуля, $z = x \vee y = 0 \vee y = y$. Но $y \neq z$, поэтому $x = 0$. Аналогично доказывается, что $y \neq 0$.

Любую идею z алгебры L_n ($n=0, 1, 2, \dots$), которую можно разложить в сумму $z = x \vee y$, назовем *разложимой*, остальные идеи назовем *неразложимыми*. Установим, какие именно идеи разложимы, а какие — нет. Нулевая идея неразложима. Действительно, если предположить, что нулевая идея имеет разложение $0 = x \vee y$, то окажется, что $x < 0$ и $y < 0$. Но это невозможно, поскольку нулевая идея — наименьшая в множестве S_n . Идеи $e_1, e_2, \dots, e_n$ неразложимы. В самом деле, собственной частью стандартных форм идей $e_1, e_2, \dots, e_n$ является лишь стандартная форма нулевой идеи. Значит, идеи $e_1, e_2, \dots, e_n$ — это наименьшие ненулевые идеи множества S_n . Предположим, что существует разложение $z = x \vee y$ какой-нибудь из идей $e_1, e_2, \dots, e_n$. Отсюда вытекает, что $x \neq 0$ и $x < z$. Последнее же невозможно. Все остальные идеи множества S_n разложимы. Действительно, любая такая идея может быть представлена стандартной формой $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$, в которой имеется, по крайней мере, два слагаемых ($p \geq 2$).

Согласно приведенному ранее определению, базисом алгебры идей S_n может служить любое подмножество S_n множества S_n , удовлетворяющее следующим условиям: а) множество S_n состоит из n идей; б) нулевая идея не содержится в множестве S_n ; в) из нулевой идеи и из идей множества S_n можно с помощью операции дизъюнкции идей

получить любую идею множества S_n . Множество $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ является базисом, поскольку оно удовлетворяет условиям а) - в). Других базисов в алгебре идей S_n не существует. Действительно, ни один базис не может обойтись без всех наименьших ненулевых идей множества S_n , так как каждую из этих идей невозможно представить в виде логической суммы отличных от нее идей, а это ведет к невыполнению условия в). Добавление каких-либо иных идей в множество всех наименьших ненулевых идей недопустимо, поскольку число идей в множестве, полученном таким способом, превысит величину n , а это, в свою очередь, приведет к невыполнению условия а). Итак, в алгебре идей L_n существует единственный базис, и им является множество $L_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ всех наименьших ненулевых идей $e_1, e_2, \dots, e_n$ множества L_n . Отсюда непосредственно следует, что в множестве L_n содержится всего n наименьших ненулевых идей.

Рассмотрим условие: “Для всех $x, y \in S_n$ из $x \vee y = c$ следует $x = y = c$ ” (*). Условию (*) удовлетворяет единственный элемент множества L_n $c = 0$. Действительно, вектор $c = 0$ условию (*) удовлетворяет: если $x \vee y = 0$, то с необходимостью $x = y = 0$, иначе оказалось бы, что $x < 0$ или $y < 0$, что невозможно. Пусть c — любой ненулевой элемент множества L_n . Согласно аксиоме нуля, $0 \vee c = c$. Таким образом, имеет место случай, когда $x \vee y = c$, но $x \neq c$, что противоречит условию (*). Итак, мы доказали, что все ненулевые векторы множества L_n не подчиняются условию (*). Сказанное позволяет принять условие (*) в качестве еще одного определения нулевого вектора алгебры L_n : *нулевым вектором логической алгебры L_n назовем любой элемент $c \in S_n$ удовлетворяющий условию (*)*.

Из этого определения следует, что нулевой вектор встречается в таблице операции сложения любой логической алгебры L_n ($n=0, 1, 2, \dots$) только один раз. Любой же иной вектор $x \in S_n$ встречается в этой таблице более одного раза, поскольку, согласно аксиомам нуля и идемпотентности, $0 \vee x = x$ и $0 \vee x = x$. Пользуясь этим признаком, всегда можно распознать нулевой вектор среди всех векторов при любом способе их обозначения и расположения. В качестве примера найдем нулевой вектор с помощью табл. 5, задающей операцию сложения в одной из трехмерных логических алгебр.

Таблица 5

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	2	2	0	0	0	2	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	0	1	2	3	0	3	2	1
4	0	2	2	0	4	4	6	6
5	0	1	2	3	4	5	6	7
6	2	2	2	2	6	6	6	6
7	2	1	2	1	6	7	6	7

 $x \vee y$

Изучая таблицу, видим, что элемент, обозначенный символом 0, на самом деле нулевым вектором не является, поскольку встречается в таблице более одного раза. Один раз встречается в этой таблице только элемент 5, следовательно, именно он играет роль нулевого вектора в алгебре с так заданной операцией логического сложения.

3. Содержательная интерпретация алгебры идей

Выше была описана алгебра идей и ее *формальные интерпретации*. В этом разделе рассматриваются *содержательные интерпретации* алгебры идей. Первую из них назовем *смысловой интерпретацией* алгебры идей. В ней элементы множества S_n интерпретируем как мысли или идеи, возникающие в уме данного человека. Именно этой интерпретации алгебра идей обязана своим названием. Конкретного человека, интеллектуальная деятельность которого подвергается изучению, будем называть *испытуемым*. Того, кто производит опыты над испытуемым, называем *исследователем*. Множество S_n интерпретируем как совокупность всевозможных мыслей, которые исследователь может возбудить в уме испытуемого. Желаемую мысль исследователь может возбудить в сознании испытуемого, предъявляя ему специально подобранный *текст*. Мысль, возникающую в уме испытуемого в результате понимания предъявленного ему текста, назовем *смыслом* этого текста.

Каждый текст, используемый исследователем, должен быть *понятным* испытуемому, т.е. должен вызывать в его уме вполне определенную *мысль*. Это требование назовем *условием смысловой определенности текста*. Оно может не выполняться, если предъявить испытуемому невнятно произнесенные фразы, неразборчиво написанные тексты, тексты на незнакомом ему языке, тексты с неизвестными знаками, словами или словесными оборотами, тексты с неправильной или непонятной испытуемому грамматической структурой. Исследователь не должен допускать, чтобы испытуемый вынужден был гадать, что же именно означает предъявленный ему текст. Однако тексты, имеющие несколько различных *смысловых значений*, допускаются. В этом случае под *смыслом* текста понимается совокупность всех возможных его смысловых значений. Примером *двусмысленного текста* может служить фраза “Дочь бранит мать”.

Каждая мысль, возбуждаемая исследователем в уме испытуемого, должна однозначно определяться порождающим ее текстом. Это требование назовем *условием смысловой однозначности текста*. Оно означает, что при повторном предъявлении текста в уме испытуемого должна возникнуть та же самая мысль. Этого можно достичь, если каждый текст, предъявленный испытуемому, будет восприниматься им как *изолированный*. Такой текст не должен связываться испытуемым с каким бы то

ни было контекстом, вообще — с какой-либо информацией, которая могла бы изменить его смысл. Невыполнение указанных условий приводит к потере исследователем контроля над мыслями испытуемого. В этом случае эффективное изучение механизма мыслительной деятельности человека становится невозможным.

Отношение равенства, заданное на множестве S_n , интерпретируем как способность испытуемого устанавливать совпадение или различие любых мыслей, возникающих в его уме. Пользуясь этой способностью испытуемого, исследователь всегда может проверить выполнение условий смысловой определенности и однозначности текста. Эти условия будут выполняться, если любые две мысли, возбуждаемые одним и тем же текстом в уме испытуемого, всегда воспринимаются им как идентичные. Существуют различные тексты, обладающие одним и тем же смыслом. Тексты, имеющие один и тот же смысл, будем называть *тождественными*. Примером текстов с одинаковым смыслом могут служить предложения “Идет дождь, или светит солнце” и “Светит солнце, или идет дождь”. Вместе с тем, существуют тексты, имеющие разные смыслы. Например, для любого человека, владеющего русским языком, фразы “Идет дождь” и “Светит солнце” имеют различный смысл.

Возьмем предложение A «Идет дождь» и предложение B «Светит солнце» и образуем из них предложение C “Идет дождь, или светит солнце”. Смысл последнего предложения представляет собой множество трех смысловых значений, выражаемых фразами “Идет дождь”, “Светит солнце” и “Идет дождь, и светит солнце”. Продемонстрированный на этом примере способ образования мысли c , заданной текстом C , из произвольно взятых мыслей a и b , заданных текстами A и B , рассматриваем как операцию дизъюнкции $c = a \vee b$ алгебры идей. Смысл предложения C рассматриваем как логическую сумму смыслов предложений A и B . Нетрудно убедиться в том, что так заданная *операция дизъюнкции мыслей* подчиняется аксиомам идемпотентности, коммутативности и ассоциативности. Союз *или* рассматриваем как *имя* операции дизъюнкции мыслей. Смысл любого *противоречивого текста*, например, фразы “Идет дождь, и не идет дождь”, рассматриваем как нулевую идею. Такой смысл, как нетрудно убедиться, удовлетворяет аксиоме нуля. Смысл любого *бессодержательного* текста, например, фразы “Идет дождь, или не идет дождь”, рассматриваем как единичную идею. Такой смысл подчиняется закону единицы.

Переходим к рассмотрению второй содержательной интерпретации алгебры идей, называемой нами ситуационно-предикатной. Будем формально представлять испытуемого в виде вполне конечного автомата, задаваемого *функцией переходов* [5, с. 58]

$$U(t) = G(U(t-1), V(t-1)) \quad (13)$$

и функцией выходов

$$V(t) = H(U(t-1), V(t-1)). \quad (14)$$

Здесь t — текущее значение *дискретного времени*, т.е. тот момент, в который исследователь производит очередной опыт над испытуемым. Моменты дискретного времени, следующие непосредственно друг за другом, обозначаем числами натурального ряда $0, 1, 2, \dots, m$. Момент 0 называем *начальным*, момент m — *конечным*. В роли m принимаем достаточно большое натуральное число. Переменная t определена на множестве $\{0, 1, 2, \dots, m\}$. Число $t-1$ обозначает момент дискретного времени, непосредственно предшествовавший моменту t . В роли *такта* времени, т.е. интервала физического времени между соседними моментами дискретного времени, принимаем достаточно малую величину.

Символом $U(t)$ обозначаем *состояние памяти* испытуемого в текущий момент дискретного времени. Символ $V(t)$ обозначает *состояние физического мира*, окружающего испытуемого, в текущий момент. Выражения $U(t-1)$ и $V(t-1)$ обозначают состояние памяти испытуемого и состояние физического мира в момент дискретного времени, непосредственно предшествовавший текущему моменту. Функция переходов G описывает закон, по которому память испытуемого переходит из состояния $U(t-1)$ в состояние $U(t)$ в результате действия на испытуемого физического мира, находившегося в состоянии $V(t-1)$. Функция выходов H описывает закон, по которому физический мир переходит из состояния $V(t-1)$ в состояние r в результате действий испытуемого, обусловленных состоянием его памяти $U(t-1)$.

Состояние $U(t)$ памяти испытуемого в заданный момент дискретного времени t будем характеризовать с помощью некоторого слова [5, с. 75] $T = y_1 y_2 \dots y_r$, представляющего собой последовательность букв $y_1 y_2 \dots y_r$, взятых из достаточно обширного алфавита R . Полагаем, что длина r слова T достаточно велика и не меняется с течением времени. Каждое слово будем формально представлять в виде бинарного предиката $T(x, y)$, где x — номер [5, с. 115] буквы y в слове T ($x \in \{1, 2, \dots, r\}$), y — буква, стоящая на x -том месте в слове T ($x \in R$). Полагаем, что предикат T удовлетворяет *условию определенности*

$$\forall x \exists y T(x, y) = 1 \quad (15)$$

и *условию однозначности*

$$\forall x \forall y' \forall y'' (T(x, y') \wedge T(x, y'') \supset (y' = y'')) = 1. \quad (16)$$

Встречающийся в выражении (16) символ $=$ обозначает *предикат равенства букв*, заданный на декартовом квадрате $R \times R$. Содержательно условия (15) и (16) означают, что на каждом месте в слове T стоит одна-единственная буква.

Предикат T можно выразить следующей формулой алгебры конечных предикатов [5, с. 113]:

$$T(x, y) = x^1(y = y_1) \vee x^2(y = y_2) \vee \dots \vee x^r(y = y_r). \quad (17)$$

Будем считать, что на части мест в слове T стоят *незначащие буквы* [5, с. 118], которые с течением времени могут замещаться значащими буквами по мере поступления в память испытуемого новой информации и *запоминания* ее. Полагаем, что, кроме запоминания, возможен и обратный процесс *забывания* (уничтожения [5, с. 110]) информации, когда по прошествии определенного времени некоторые значащие буквы замещаются незначащими. Мы считаем также возможной *замену* во времени одних значащих букв другими.

Поскольку буквы $y_1, y_2, \dots, y_r$ могут меняться во времени, будем записывать их, в случае необходимости, в виде $y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)$, подчеркивая этим тот факт, что они являются функциями времени. Так как предикат T зависит от букв $y_1, y_2, \dots, y_r$, то он меняется во времени. Желая отметить это обстоятельство, будем записывать предикат T в виде T_t . С учетом изменившейся символики формулы (17) можем переписать в виде:

$$T_t(x, y) \equiv x^1(y = y_1(t)) \vee x^2(y = y_2(t)) \vee \dots \vee x^r(y = y_r(t)). \quad (18)$$

Человек не может одновременно осознавать сразу всю информацию, хранящуюся в его памяти. В каждый момент времени ему доступна лишь некоторая часть содержимого памяти. В соответствии с этим введем предикат $Q_t(t)$, который выделяет [5, с. 107] в слове $T_t(x, y)$ *часть мест*, осознаваемых испытуемым в момент времени t . Воспринимаемая сознанием испытуемого *часть* [5, с. 121] $P_t(x, y)$ слова $T_t(x, y)$, стоящая на этих местах, определяется формулой [5, с. 123]:

$$P_t(x, y) \equiv Q_t(x) \wedge T_t(x, y). \quad (19)$$

Выделение части слова можно представить в виде процедуры, выполняемой с помощью *регулируемого селектора* [5, с. 105]. Воспринимаемую сознанием испытуемого часть $P_t(x, y)$ содержимого его памяти будем называть *ситуацией*. Задание испытуемому на восприятие им той или иной ситуации дает исследователь. Например, исследователь может предложить испытуемому посмотреть в окно на открывающийся вид на улицу, вспомнить одно из вчерашних событий или мотив какой-нибудь песни, обратить внимание на свое самочувствие или настроение. Мы полагаем, что образы предметов внешнего мира, формируемые органами чувств, непосредственно нашим сознанием не воспринимаются. Они сначала запоминаются и лишь после этого могут осознаваться.

Образует множество всевозможных ситуаций N и введем переменную X на этом множестве. Буквой Y будем обозначать идеи из множества S_n . Предположим, что исследователь предъявляет ис-

пытуемому ситуацию X и идею Y и предлагает ему определить, реализуется ли в ситуации X идея Y . Например, исследователь просит испытуемого взглянуть в окно на улицу и ответить на вопрос, идет ли там дождь. Если дождь действительно идет, то испытуемый должен отреагировать ответом «да», в противном случае — ответом «нет». Своим поведением испытуемый реализует некоторый предикат $Z = L(X, Y)$, заданный на декартовом произведении $N \times S_n$. В нашем примере в роли ситуации X выступает восприятие испытуемым улицы, роль идеи Y играет смысл фразы «Идет дождь». В роли нулевого значения $Z = 0$ предиката L выступает ответ испытуемого «нет», в роли единичного значения $Z = 1$ — ответ «да». Значение Z предиката L примем за *истинностное значение* высказывания, задающего идею Y . В нашем примере в роли такого высказывания выступает предложение «Идет дождь». Если $Z = 1$, то высказывание, задающее идею Y , считаем *истинным* для ситуации E , если же $Z = 0$, то — *ложным*. Предикат L называем *ситуационно-смысловым*.

При фиксированной идее $Y = A$ бинарный предикат $Z = L(X, Y)$ превращается в унарный. Обозначим этот предикат символом

$$L_A(X) \equiv L(X, A), \quad (20)$$

называя его *ситуационным предикатом*, соответствующим идее A . Очевидно, что разным идеям $A \neq B$ соответствуют различные предикаты L_A и L_B , $L_A(X) \neq L_B(X)$. Действительно, всегда можно подобрать такую ситуацию $X = C$, в которой идея A реализуется, а идея B — нет, т.е. $L_A(C) \neq L_B(C)$. Вместе с тем, реакции испытуемого на любую ситуацию X , соответствующие тождественным текстам, имеющим один и тот же смысл A , очевидно, всегда будут одинаковыми. Это означает, что между любой идеей $A \in S_n$ и соответствующим этой идее ситуационным предикатом $L_A(X)$ существует взаимно однозначное соответствие. Таким образом, предикат $L_A(X)$ может выступать в роли полной характеристики идеи A . Описанную интерпретацию алгебры идей назовем *ситуационно-предикатной*.

Мы получили вторую интерпретацию алгебры идей, тесно связанную с ранее рассмотренной смысловой интерпретацией. Теперь в роли множества S_n выступает множество всевозможных предикатов $L_A(X)$, причем каждой идее A взаимно однозначно соответствует ситуационный предикат $L_A(X)$. Так как множество всех ситуаций конечно, то множество S_n всех ситуационных предикатов $L_A(X)$ конечно. Это означает, что число всех идей, которыми может оперировать испытуемый, конечно. Операции дизъюнкции $A \vee B$ соответствует дизъюнкция $L_A(X) \vee L_B(X)$ ситуационных предикатов L_A и L_B . Очевидно, что операция дизъюнкции ситуационных предикатов идемпотентна, коммутативна и ассоциативна, так что в ситуационно-предикатной интерпретации аксиомы идем-

потентности, коммутативности и ассоциативности алгебры идей выполняются. Нулевой идее 0 соответствует тождественно ложный ситуационный предикат $L_0(X) \equiv 0$, единичной идее 1 соответствует тождественно истинный ситуационный предикат $L_1(X) \equiv 1$. Ясно, что аксиома нуля и закон единицы в ситуационно-предикатной интерпретации алгебры идей выполняются.

Если две идеи A и B находятся в отношении частичного порядка

$$A \leq B \quad (21)$$

то соответствующие им ситуационные предикаты удовлетворяют условию

$$\forall X (L_A(X) \supset L_B(X)) = 1. \quad (22)$$

Обратно, если выполнено условие (22), то будет также выполняться условие (21). Таким образом, отношение частичного порядка $A \leq B$ идей A и B интерпретируется как отношение включения $L_A(X) \subseteq L_B(X)$ соответствующих им ситуационных предикатов. Каждой ненулевой минимальной идее соответствует ситуационный предикат, обращающийся в единицу только на одной единственной ситуации.

Таким образом, каждой базисной идее A соответствует ситуационный предикат $L_A(X)$, удовлетворяющий условию

$$\exists! X L_A(X) = 1. \quad (23)$$

Ситуационный предикат L_A , удовлетворяющий условию (23), будем называть *базисным*. Очевидно, что дизъюнкция всех базисных ситуационных предикатов равна тождественно истинному ситуационному предикату, так что закон истинности ситуационно-предикатной интерпретации выполняется. Число n интерпретируем как число всех ситуаций, содержащихся в множестве N . Число всех ситуационных предикатов, заданных на множестве N , равно 2^n , что согласуется с соответствующим требованием в определении алгебры идей. Очевидно, что любой предикат $L_A(X)$ можно представить в виде дизъюнкции некоторых базисных предикатов, так что аксиома n -мерности выполняется.

Перейдем теперь к рассмотрению третьей содержательной интерпретации, которую назовем *ситуационно-множественной*. В этой интерпретации в роли элемента множества S_n , соответствующего идее A , принимаем множество M_A всех ситуаций, удовлетворяющих условию

$$L_A(X) = 1. \quad (24)$$

Дизъюнкции $A \vee B$ идей A и B в данной интерпретации соответствует объединение $M_A \cup M_B$ множеств M_A и M_B . Нулевой идее соответствует пустое множество ситуаций, единичной идее соответствует множество N всевозможных ситуаций. Отношению частичного порядка $A \leq B$ идей A и B соответствует отношение включения $M_A \subseteq M_B$ множеств M_A и M_B . Множество всех идей S_n интерпретируем как систему всех подмножеств

множества N . Базисным элементам множества S_n соответствуют множества, состоящие из единственной ситуации.

Последней рассмотрим *ситуационно-кодovou интерпретацию* алгебры идей. Пронумеруем в каком-нибудь порядке все ситуации множества N . Получаем ряд ситуаций $X_0, X_1, \dots, X_{2^n-1}$. Составим n -компонентный двоичный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, соответствующий идее A , по следующему правилу: если $X_i \in M_A$ ($x \in \{0, 1, \dots, 2^n-1\}$) то принимаем $\alpha_i = 1$, если же $X_i \notin M_A$, то принимаем $\alpha_i = 0$. Так составленный двоичный набор назовем *кодом идеи* A . Множество всех таких двоичных наборов обозначаем буквой K . Очевидно, что между двоичными наборами множества A и идеями множества S_n существует взаимно однозначное соответствие. Дизъюнкции идей соответствует поразрядная дизъюнкция двоичных наборов. Нулевой идее соответствует двоичный набор, составленный из одних нулей, единичной идее соответствует двоичный набор, составленный из одних единиц. Базисным идеям соответствуют двоичные наборы, в состав которых входит одна-единственная единица.

Выводы

Итак, мы видим, что мысли испытываемого поддаются математическому описанию и при том даже многими способами. При этом в сферу формального описания попадает также процесс мышления, представляющий собой ряд операций над мыслями. Мысли можно описывать *абстрактно* как элементы некоторого множества, на котором заданы отношение равенства и одна базисная бинарная операция, называемая дизъюнкцией идей и удовлетворяющая аксиомам идемпотентности, коммутативности, ассоциативности, нуля и n -мерности. Существуют, кроме того, три равносильных друг другу способа *конструктивного* формального описания идей в виде предикатов, множеств или двоичных наборов. Базисная операция над мыслями в этих описаниях представлена соответственно дизъюнкцией предикатов, объединением множеств и поразрядной дизъюнкцией двоичных наборов.

Осталось еще проинтерпретировать формулы алгебры идей. Содержательно формулы алгебры идей интерпретируем как тексты, предъявляемые исследователем испытываемому. Каждая формула алгебры идей обозначает некоторый элемент множества S_n . Соответственно этому каждый текст имеет свой смысл, выражает некоторую мысль. Понятию тождественности формул соответствует смысловая тождественность текстов. Знаку дизъюнкции, фигурирующему в формулах алгебры идей, соответствует союз «или», встречающийся в текстах. На этом, однако, возможности интерпретации формул алгебры идей исчерпываются. Для базисных символов, входящих в формулы алгебры идей, не удастся найти аналога в текстах естественного языка. Вместе с тем, обращаясь к реальным текстам, используемым при общении между людьми,

например, к предложениям, записанным на русском языке, мы обнаруживаем в них множество таких деталей, для которых нет прототипов в формулах алгебры идей.

Означает ли это, что структура текстов естественного языка не поддается формализации в терминах алгебры идей? Мы полагаем, что делать такой вывод было бы преждевременно. Дело в том, что базис алгебры идей, состоящий из базисных элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ и базисной операции $\vee$ дизъюнкции идей, был нами выбран по существу случайно и без учета особенностей структуры текстов естественного языка. Очевидно, что возможны многие различные варианты определений, задающих равносильные друг другу алгебры идей, основанных на иных базисных элементах и базисных операциях. Вероятность того, что в текстах естественного языка фактически реализовано именно то определение алгебры идей, которое было выбрано нами, весьма невелика. В свете сказанного представляется целесообразным проанализировать структуру текстов естественного языка на предмет выяснения того, какой конкретно набор базисных элементов и операций фактически в них используется. Если это удастся сделать, то можно будет в соответствии с полученными результатами разработать другой, равносильный исходному, вариант определения алгебры идей, допускающий более глубокую ее содержательную интерпретацию.

Литература: 1. Бондаренко М.Ф. Изоморфизмы алгебры идей [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Бионика интеллекта. — 2010. — № 2 (73). — С. 40-50. 2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука. 1979 — 395 с. 3. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Математические средства. — Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984 — 144 с. 4. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 476 с. 5. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Теория интеллекта. Технические средства. — Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. — 136 с.

Поступила в редколлегию 23.03.2010

УДК 519.7

Інтерпретації алгебри ідей / Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. — 2010. — № 2 (73). — С. 51—61.

Розвинутий абстрактний еквівалент алгебри кінцевих предикатів — алгебри ідей, необхідної для моделювання роботи механізму людського інтелекту. Розроблені формальна і декілька змістовних інтерпретацій алгебри ідей, які дозволяють розширити сферу її практичного застосування.

Бібліогр.: 5 найм.

UDC 519.7

The ideas algebra interpretations / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. — 2010. — № 2 (73). — С. 51—61.

The conceptual equivalent of the finite predicates algebra that is the ideas algebra that is needed to model the operation of the human intelligence has been developed. The formal algebra and a few intensional interpretations of the ideas algebra that allow to develop the sphere of the practical using have been designed.

Ref.: 5 items.