УДК 62.506.2

В. М. БОНДАРЕВ, В. А. ЛОВИЦКИЙ

ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЙ КАК ПРОЦЕСС ПОСТРОЕНИЯ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

При создании совершенных систем искусственного интеллекта необходимо учитывать особенности человеческого мышления и, прежде всего, абстрактного мышления, в основе которого лежит процесс формирования абстрактных понятий [1].

Здесь рассматривается один из способов формирования понятий, характеризующих конечные множества объектов и позволяющих разбивать каждое из этих множеств на два подмножества. Каждый из объектов этих множеств задан конечным набором признаков, а признак, в свою очередь, может принимать только два значения. Такое задание объектов представляется довольно общим, так как все объекты с признаками, принимающими любое конечное число значений, могут быть сведены к объектам с двузначными признаками, путем применения следующего единого теста для признаков. «Имеет ли признак i значение j?» [1].

При постановке задачи будем использовать определения, предложенные Э. Хантом.

Объектами называются те реальные элементы, которые может наблюдать человек или искусственная система формирования по-

---

[1] Хант Э. Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине. М., «Мир», 1970. 302 с.

нятий. Объекты можно различать по тем значениям, которые принимают характеризующие их признаки.

Наименование — произвольная отметка, приписываемая объекту.

Понятие — решающее правило, применение которого к описанию объекта позволяет определить, принадлежит ли данный объект к тому множеству, которому соответствует рассматриваемое наименование.

Пусть задано конечное множество объектов

$$H = \{ A_1, A_2, \ldots, A_m \}. \qquad (1)$$

Каждый из этих объектов $A_i (A_i \in H)$, характеризуется упорядоченным набором одних и тех же признаков, число которых равно N. Любой признак может принимать только два значения: 0 или 1, поэтому каждому объекту можно поставить во взаимно-однозначное соответствие упорядоченную последовательность двоичных цифр длиной N, т. е. $A'_s = \{x_{ij}\}$, где x_{ij} обозначает j-е значение i-го признака.

В дальнейшем не будем различать объект A_s и соответствующую ему последовательность A'_s, там, где это не вызовет затруднений в понимании. Под равенствами $x_{ij}=1$ и $x_{ij}=0$ условимся подразумевать тот факт, что j-е значение i-го признака некоторого объекта характеризуется 1 или 0.

Необходимо заметить, что каждый признак объекта может принять лишь одно из возможных значений, т. е.

$$\forall i \, ((x_{ij} = 1) \oplus (x_{ij} = 0)), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \qquad (2)$$

Знак $\oplus$ обозначает операцию «разделительное или».

Пусть на множестве H задано такое его разбиение на два подмножества H_1 и H_2, что

$$H_1 \cup H_2 = H; \qquad (3)$$
$$H_1 \cap H_2 = \varnothing.$$

При этом все объекты $A_s (A_s \in H_1)$ обладают некоторым наименованием, а объекты $A_i (A_i \in H_2)$ не обладают. Тогда задача формирования понятия сводится к построению такой функции, что

$$\underset{A_i \in H}{\forall A_i} \, ((F(A_i) = 1) \oplus (F(A_i) = 0)), \qquad (4)$$

$$\forall A_i \forall A_j \, (((A_i \in H_1) \Rightarrow (F(A_i) = 1)) \wedge ((A_j \in H_2) \Rightarrow (F(A_j) = 0))), \qquad (5)$$

где F — логическая функция от N переменных, а переменная — суть признак.

Выше было показано, что задача формирования понятия для объектов из множества H сводится к задаче построения логической функции, определенной на элементах этого множества и использующей признаки объектов в качестве своих аргументов. Перейдем к описанию способа построения такой функции.

Отметим девять возможных ситуаций для каждого признака объектов из множества H.

Ситуация 1. i-й признак принимает значение 1 для всех объектов из H:

$$\exists i \underset{A_s \in H}{\forall A_s} (x_i = 1). \tag{6}$$

Ситуация 2. i-й признак принимает значение 0 для всех объектов из H:

$$\exists i \underset{A_s \in H}{\forall A_s} (x_i = 0). \tag{7}$$

Ситуация 3. i-й признак принимает значение 1 для всех объектов из H_1 и значение 0 для всех объектов из H_2:

$$\exists i \, (\underset{A_s \in H_1}{\forall A_s} (x_i = 1) \wedge \underset{A_s \in H_2}{\forall A_s} (x_i = 0)). \tag{8}$$

Ситуация 4. i-й признак принимает значение 0 для всех объектов из H_1 и значение 1 для всех объектов из H_2:

$$\exists i \, (\underset{A_s \in H_1}{\forall A_s} (x_i = 0) \wedge \underset{A_s \in H_2}{\forall A_s} (x_i = 1)). \tag{9}$$

Ситуация 5. i-й признак принимает значение 1 для всех объектов из H_1, а во множестве H_2 имеются такие объекты, для которых $x_i = 1$ и такие, для которых $x_i = 0$:

$$\exists i \, (\underset{A_s \in H_1}{\forall A_s} (x_i = 1) \wedge \underset{A_s \in H_2}{\exists A_s} (x_i = 1) \wedge \underset{A_s \in H_2}{\exists A_s} (x_i = 0)). \tag{10}$$

Ситуация 6. i-й признак принимает значение 0 для всех объектов из H_1, а во множестве H_2 имеются такие объекты, для которых $x_i = 1$ и такие, для которых $x_i = 0$:

$$\exists i \, (\underset{A_s \in H_1}{\forall A_s} (x_i = 0) \wedge \underset{A_s \in H_2}{\exists A_s} (x_i = 1) \wedge \underset{A_s \in H_2}{\exists A_s} (x_i = 0)). \tag{11}$$

Ситуация 7. i-й признак принимает значение 1 для всех объектов из H_2, а во множестве H_1 имеются такие объекты, для которых $x_i = 1$, и такие, для которых $x_i = 0$:

$$\exists i \, (\underset{A_s \in H_2}{\forall A_s} (x_i = 1) \wedge \underset{A_s \in H_1}{\exists A_s} (x_i = 1) \wedge \underset{A_s \in H_1}{\exists A_s} (x_i = 0)). \tag{12}$$

Ситуация 8. i-й признак принимает значение 0 для всех объектов из H_2, а во множестве H_1 имеются такие объекты, для которых $x_i = 0$ и такие, для которых $x_i = 1$:

$$\exists i \, (\underset{A_s \in H_2}{\forall A_s} (x_i = 0) \wedge \underset{A_s \in H_1}{\exists A_s} (x_i = 1) \wedge \underset{A_s \in H_1}{\exists A_s} (x_i = 0)). \tag{13}$$

Ситуация 9. И во множестве H_1, и во множество H_2 имеются объекты с различным значением признака x_i:

$$\exists i \, (\underset{A_s \in H_1}{\exists A_s} (x_i = 1) \wedge \underset{A_s \in H_1}{\exists A_s} (x_i = 0) \wedge \underset{A_s \in H_2}{\exists A_s} (x_i = 1) \wedge \underset{A_s \in H_2}{\exists A_s} (x_i = 0)). \tag{14}$$

Совершенно очевидно, что понятие, которое рассматривается нами как решающее правило, не может зависеть от признака, имеющего одинаковые значения для всех без исключения объектов. Другими словами, если в данной задаче по признаку x_i имеется ситуация 1 или 2, то понятие должно описываться логической функцией, не зависящей от переменной x_i:

$$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N). \tag{15}$$

Если все объекты, имеющие данное наименование, отличаются от объектов, не имеющих этого наименования по признаку x_i, то решающее правило тривиально, а логическая функция принимает вид

$$F = x_i \tag{16}$$

— для ситуации 3,

$$F = \overline{} x_i \tag{17}$$

— для ситуации 4.

Более сложным является случай, когда объекты из множества H_1 характеризуются одним и тем же значением признака x_i, например 1, а объекты из множества H_2 могут иметь в качестве значения признака x_i как 1, так и 0. Этот случай соответствует ситуации 5 по признаку x_i.

Решающее правило в ситуации 5 можно выразить следующим образом; если $x_i = 0$, то объект принадлежит к H_2; если $x_i = 1$, то решающее правило можно формализовать в виде функции, которая принимает значение 1 на всех объектах из H_1 и значение 0 на тех объектах из H_2, для которых $x_i = 1$. Или

$$F = \begin{cases} 0, \text{ если } x_i = 0 \\ F_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N), \text{ если } x_i = 1. \end{cases} \tag{18}$$

Следует подчеркнуть, что значение F_1 на объектах из множества H_2, для которых $x_i = 0$, несущественно и их можно не учитывать при отыскании функции F_1.

Поскольку F и F_1 — логические функции, принимающие лишь два значения, то на основании (18) можно составить таблицу истинности, по которой определим операцию, связующую F, F_1 и x_i:

$$\begin{array}{ll} x_i & 0011 \\ F_1 & 0101 \\ \hline F & 0001 \end{array}$$

$$F = F_1 \wedge x_i \tag{19}$$

Ситуация 6 получается из ситуации 5, если просто поменять двоичные символы, обозначающие значения признаков. Поэтому, не повторяя рассуждений, можно написать

$$F = F_1 \wedge \overline{} x_i. \tag{20}$$

для ситуации 6.

Ситуация 7 сходна с ситуацией 5. Решающее правило для ситуации 1 может быть записано так: 1) если $x_i = 0$, то объект принадлежит к H_1; 2) если $x_i = 1$, то решающее правило можно формализовать в виде функции, которая принимает значение 0 на всех объектах из H_2 и значение 1 на тех объектах из H_1, для которых $x_i=1$, т. е.

$$F=\begin{cases}1, \text{ если } x_i=0\\ F_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N), \text{ если } x_i=1.\end{cases} \tag{21}$$

Составим таблицу истинности и определим операцию:

$$\begin{array}{l} x_i\ 0011\\ F_1\ 0101\\ \hline F\ 1101\end{array}$$

$$F=F_1 \vee \neg x_i \tag{22}$$

Между ситуациями 7 и 8 существует такая же связь, как между ситуациями 5 и 6. Это позволит нам утверждать, что

$$F=F \vee \neg\neg x_i=F_1 \vee x_i \tag{23}$$

для ситуации 8.

Остается проанализировать последнюю, девятую ситуацию.

Разобьем все объекты множества H_1 на два подмножества H_{11} и H_{12}, таких, что: 1) $x_i=1$, для всех объектов из H_{11}; 2) $x_i=0$, для всех объектов из H_{12}.

Множество H_2 разделим таким же образом на подмножества H_{21} и H_{22} соответственно. Сгруппируем четыре полученных подмножества попарно: H_{11} с H_{21}, а H_{12} с H_{22}. Для каждой пары подмножеств может быть сформулировано свое решающее правило, которое не зависит от x_i.

Пусть решающее правило для подмножеств H_{11} и H_{21} описывается функцией F_1, а правило для подмножеств H_{12} и H_{22} — F_2. Общее понятие, как правило, отличающее объекты из H_1 от объектов из H_2, можно сформулировать следующим образом:

1) если $x_i=1$, руководствоваться правилом для подмножеств H_{21} и H_{11} (F_1);

2) если $x_i=0$, руководствоваться правилом для подмножеств H_{12} и H_{22} (F_2).

Составляем таблицу истинности:

$$\begin{array}{l} x_i\ 00001111\\ F_1\ 00110011\\ F_2\ 01010101\\ \hline F\ 01010011\end{array}$$

Формула, связующая x_i, F_1, F_2 и F, может иметь вид

$$F=x_i \wedge F_1 \vee x_i \wedge F_2. \tag{24}$$

Если после очередного шага процесс поэтапного определения вида логической функции не заканчивается (ситуация 3 или ситуация 4), то на следующем шаге приходится отыскивать функцию от меньшего числа переменных. Это говорит о том, что построение логической функции можно завершить за M шагов, причем $M<N$.

После сказанного выше можно в общих чертах наметить процесс формирования понятия как построения логической функции. Изобразим его блок-схемой (рис. 1). Блок *1* служит для представления объектов в виде упорядоченной последовательности двоичных цифр. Блок *2* осуществляет выбор одного из признаков для данного шага в формировании логической функции. Блок *3* связывает выбранный признак с логической функцией от еще не связанных признаков. Блок *4* определяет множество объектов, для классификации которых отыскивается логическая функция (решающее правило) на очередном шаге. Блок *5* — блок условного перехода. Если в формулу, выражающую искомую функцию, входят только

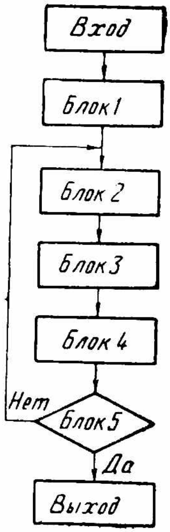

Рис. 1.

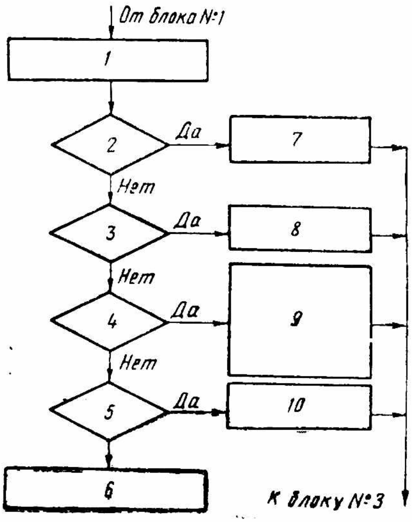

Рис. 2.

простые переменные типа x_i, то окончить работу. Если нет, перейти к блоку *2*.

Неясным остается, как выбирать очередной признак. Очевидно это можно делать различными способами. Простейшими из них являются случайный выбор признаков или выбор по порядку их следования.

Здесь предлагается один из способов выбора, который, по нашему мнению, может сократить процесс построения логической функции. Представим его в виде блок-схемы, на которой обозначено: *1* — определение ситуаций для всех признаков; *2* — имеется ситуация 3; *3* — имеется ситуация 4; *4* — имеются ситуации 5, 6, 7 или 8; *5* — имеется ситуация 9; *6* — выдача сообщения о некорректности задачи; *7* — произвольно выбрать признак в ситуации 3; *8* — произвольно выбрать признак в ситуации 4; *9* — выбрать признак, разрешение ситуации которого оставит наименьшее число объектов для последующего поиска решающего правила; *10* — произвольно выбрать признак в ситуации 9 (рис. 2).

Выбор очередного признака существенно влияет на вид логической функции и трудоемкость процесса формирования понятия в этом смысле предложенный способ выбора, вероятно, не является оптимальным. По-видимому, можно улучшить алгоритм выбора, применив, например, некоторый критерий для определения одного из нескольких признаков, находящихся в ситуации 9. Однако вычисление значений такого критерия не должно быть слишком сложным, ибо это перечеркнет выигрыш от его использования. Авторами ведется работа по улучшению алгоритма выбора.