

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Розробка алгоритму відновлення розривних функцій за умови
диференційовності нерозривної складової цих функцій

(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи САУМ-22-1

Пучкін М. О.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Литвин О.Г.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2024 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 06 ” листопада 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Пучкіну Миколі Олександровичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Розробка алгоритму відновлення розривних функцій за умови диференційовності нерозривної складової цих функцій

затверджена наказом по університету від 2 листопада 2023 р. № 1277 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель задачі відновлення розривних функцій двох змінних на основі проєкційних даних

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	6 – 12 листопада 2023 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	13 – 26 листопада 2023 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	27 листопада – 10 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	11 грудня – 24 грудня 2023 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	25 грудня 2023 р. – 5 січня 2024 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	7 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання 6 листопада 2023 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Литвин О.Г. _____
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 85 с., 11 табл., 48 рис., 1 дод., 8 джерел.

КОМП'ЮТЕРНА ТОМОГРАФІЯ, ПРОЦЕС ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЙ, РЕКОНСТРУКЦІЯ ЗОБРАЖЕНЬ, РОЗРИВНА ФУНКЦІЯ, ЛІНІЯ РОЗРИВУ, РОЗРИВНИЙ СПЛАЙН, ЯВИЩЕ ГІББСА.

Об'єкт дослідження – процес відтворення внутрішньої структури тіла на основі проєкційних даних, що надходять з комп'ютерного томографа.

Мета роботи – дослідити та протестувати алгоритм відновлення розривних функцій на основі подання цих функцій у вигляді суми розривного сплайна та нерозривної складової цих функцій. Дослідити вплив явища Гіббса на результати дослідження.

Методи дослідження – створення тестових розривних функцій, що моделюють дані комп'ютерного томографа. Наближення функцій розривними сплайнами. Також використовуються розривні сплайни для наближення функцій та метод скінченних сум Фур'є для їх відновлення. Уникнення явища Гіббса при наближенні функцій досягається за допомогою відновлення диференційовних функцій, отриманих з використанням сплайнів.

У даній роботі підтверджено обчислюваним експериментом основні переваги розглянутого методу – можливості наближення розривної функції з високою точністю за допомогою розривного сплайна, скінченної суми Фур'є та проєкцій без явища Гіббса.

ABSTRACT

Introductory note: 85 pages, 11 tables, 48 figures, 1 appendix, 8 sources.

COMPUTER TOMOGRAPHY, FUNCTIONS RECOVERY PROCESS, IMAGE RECONSTRUCTION, RUPTURE FUNCTIONS, BREAK LINE, BREAKING SPLINE, GIBBS PHENOMENON.

Object of research – the process of restoring the internal structure of the body based on projection data received from a computer tomograph.

Purpose of work – research and test the algorithm for restoring discontinuous functions based on the representation of these functions in the form of the sum of a discontinuous spline and a non-discontinuous component of these functions. Investigate the influence of the Gibbs phenomenon on the results of the research.

Methods of research – creation of test discontinuous functions simulating computer tomography data. Approximation of functions by discontinuous splines. Discontinuous splines are also used to approximate functions and the method of finite Fourier sums to restore them. Avoiding the Gibbs phenomenon when approximating functions is achieved by restoring differential functions obtained using splines.

In this work, the main advantages of the considered method are confirmed by a calculated experiment – the possibility of approximating a discontinuous function with high accuracy using a discontinuous spline, a finite Fourier sum, and projections without the Gibbs phenomenon.

ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів	8
Вступ	9
1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження	11
1.1 Системний аналіз задачі відновлення функцій в комп'ютерній томографії	11
1.1.1 Вербальний опис об'єкту	11
1.1.2 Морфологічний опис об'єкту	11
1.1.3 Функціональний опис об'єкту	12
1.1.4 Формалізований опис системи	14
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі пов'язаною з системою «Державний кардіологічний центр»	16
1.2.1 Модель аналізу проблеми	16
1.2.2 Модель рішення проблеми	25
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	30
1.3.1 Змістовна постановка задачі	30
1.3.2 Формальна постановка задачі	32
1.4 Постановка задач дослідження	33
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	35
2.1 Математична модель відновлення розривних функцій за умови диференційовності нерозривної складової цих функцій	35
2.1.1 Загальна постановка задачі	35
2.1.2 Побудова розривного сплайна	36
2.1.3 Використання сплайна для побудови диференційовної функції	39
2.2 Загальні теоретичні відомості	41
2.2.1 Кратні ряди Фур'є	41
2.2.2 Модель відновлення функцій методом скінченних сум Фур'є	42
2.2.3 Відновлення розривних функцій з відомими лініями розриву	43

	7
2.2.4 Явище Гіббса	44
Висновки за розділом 2	46
3 Програмна реалізація	47
3.1 Система комп'ютерної математики Mathcad	47
3.2 Алгоритм розв'язання задачі відновлення розривних функцій за умови диференційовності нерозривної складової цих функцій	47
3.3 Опис програми	48
Висновки за розділом 3	49
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	50
4.1 Обчислювальний експеримент відновлення розривної функції з однією лінією розриву	50
4.1.1 Лінією розриву є границя квадрата	50
4.1.2 Лінією розриву є границя прямокутника	53
4.2 Обчислювальний експеримент відновлення розривної функції з двома лініями розриву	56
4.2.1 Лініями розриву є границі двох прямокутників з відновлюваною функцією типу 1	56
4.2.2 Лініями розриву є границі двох прямокутників з відновлюваною функцією типу 2	59
Висновки за розділом 4	62
Висновки	63
Перелік джерел посилання	64
Додаток А Лістинг програми	65

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

N – порядок суми Фур'є;

NN – число для підрахунку інтервалів розбиття відрізка при використанні проєкційних даних;

2^{NN+1} – число інтервалів розбиття відрізка при використанні проєкційних даних;

$2N + 1$ – порядок матриці коефіцієнтів Фур'є;

$(2N + 1)^2$ – число доданків у сумі Фур'є;

P_1 – відносна похибка;

P_2 – середньо-квадратична похибка;

P_3 – середня абсолютна похибка;

Time – Час роботи у хвилинах;

КТ – комп'ютерна томографія;

МАІ – метод аналізу ієрархій;

ТРФ – тригонометричний ряд Фур'є.

ВСТУП

Актуальність теми. КТ – це техніка неруйнівного пошарового дослідження внутрішньої структури об'єкта. Цей метод був розроблений у 1972 році Годфрі Хаунсфілдом і Алланом Кромаком, які були нагороджені Нобелівською премією за це досягнення. Її принцип ґрунтується на вимірюванні та складній обробці відмінностей у поглинанні рентгенівського випромінювання різними тканинами з різною щільністю. КТ є ефективним методом вивчення внутрішньої структури об'єктів у різних галузях, таких як медицина, астрономія, фізика та інші. Ці технології дозволяють отримувати деталізовані томографічні зображення з численними перевагами, включаючи високу якість передачі низько контрастних об'єктів. Не зважаючи на ці переваги, високі витрати комп'ютерної томографії зумовлюють використання альтернатив – рентгенівських симуляторів для планування променевої терапії, що мають схожі риси та застосовуються в онкологічному лікуванні.

Сучасні комп'ютерні томографи забезпечують можливість створювати докладні томографічні зображення об'єктів без їх пошкодження. Однак, при апроксимації розривних функцій може виникати явище Гіббса, що спотворює отримані зображення. Для зменшення цього впливу застосовуються методи обробки зображень та алгоритми реконструкції, що поліпшують якість томографічних зображень.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є дослідження та розробка алгоритму відновлення розривних функцій на основі подання цих функцій у вигляді суми розривного сплайна та нерозривної складової цих функцій. У даній роботі нерозривна складова є диференційовною функцією [1].

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «Відновлення розривних функцій»;
- вибрати і обґрунтувати метод розв'язання задачі.

Об'єктом дослідження є процес відтворення внутрішньої структури тіла на основі проєкційних даних, що надходять з комп'ютерного томографа.

Предмет дослідження – математична модель відновлення внутрішньої структури тіла за допомогою проєкційних даних, а також методи чисельної реалізації цієї математичної моделі.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовується методи побудови розривних сплайнів та метод скінченних сум Фур'є [1]. У кваліфікаційній роботі використовується методи дослідження внутрішньої структури об'єктів, які включають аналіз кратних рядів Фур'є та використання методу скінченних сум Фур'є. Аналіз кратних рядів Фур'є дозволяє нам розкрити складові елементи об'єкта шляхом розкладу його характеристик на базові компоненти. Використання методу скінченних сум Фур'є є важливим етапом у розробці методів відновлення розривних функцій, дозволяючи нам наближено описати їх поведінку. Під час досліджень важливо враховувати відомі лінії розриву, які можуть бути використані для точного відновлення розривних функцій та покращення точності результатів. Методи відновлення розривних функцій двох змінних без впливу явища Гіббса дозволяють уникнути спотворень та поліпшити точність отриманих даних. Використання цих методів дослідження дозволяє докладно вивчати внутрішню структуру об'єктів та аналізувати їх характеристики без спотворень через вплив явища Гіббса.

Публікації. Результати, отримані у роботі, було представлено на 27-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 2023 р.) [2].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі відновлення функцій в комп'ютерній томографії

1.1.1 Вербальний опис об'єкту

Кардіологічний центр – це медичний і науково-дослідний центр, організований у формі некомерційного громадського фонду. Центр спеціалізується на лікуванні серцево-судинних захворювань, а також на трансплантації серця і легень.

Центр складається з наступних підрозділів:

- клініка серцево-судинної і грудної хірургії;
- клініка внутрішніх хвороб – кардіологія;
- клініка вроджених вад серця / дитяча кардіологія;
- інститут анестезіології;
- амбулаторний центр.

1.1.2 Морфологічний опис об'єкту

Об'єктом нашого дослідження є «Державний кардіологічний центр» як система. Головною метою цієї системи є створення сприятливих умов для проведення наукових досліджень і надання лікувальної допомоги у внутрішній медицині, кардіології та спеціалізованій інтенсивній терапії внутрішніх захворювань.

Почнемо опис системи «Державний кардіологічний центр» з дослідження її зовнішнього середовища. Зовнішнє середовище – це сукупність всіх об'єктів, які знаходяться за межами системи і можуть впливати на неї через зміну своїх

властивостей. Воно також включає в себе об'єкти, чії властивості можуть змінюватися внаслідок взаємодії з системою. Модель зовнішнього середовища системи «Державний кардіологічний центр» зображено на рис. 1.1.

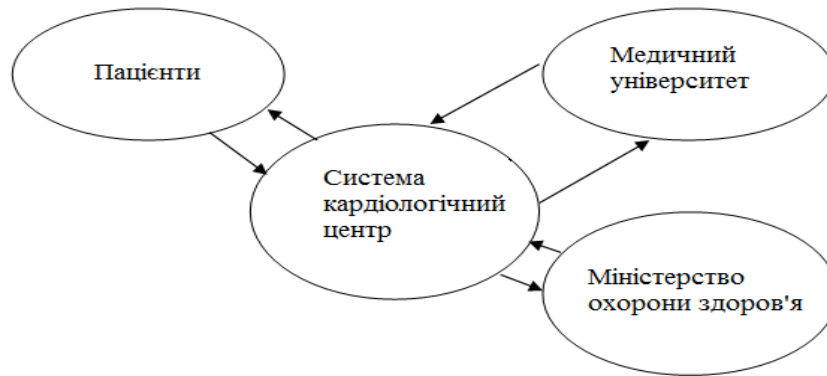


Рисунок 1.1 – Модель зовнішнього середовища системи

Об'єкти зовнішнього середовища:

а) у ролі пацієнтів у цьому контексті виступають індивіди, які страждають від серцево-судинних захворювань. Крім того, до цієї категорії входять різні організації та підприємства, що здійснюють науково-дослідницьку діяльність в галузі кардіології;

б) медичний університет має кафедру кардіології і функціональної діагностики, і кардіологічний центр виступає як науково-дослідна база для цієї кафедри;

в) Міністерство охорони здоров'я створює законодавчий, організаційний, економічний та соціальний фундамент для забезпечення нормального функціонування кардіологічного центру в галузі охорони здоров'я.

1.1.3 Функціональний опис об'єкту

Давайте розглянемо функціональну модель з точки зору аналітика, тобто фахівця, який безпосередньо відповідає за управління цим окремим елементом

системи. Метою функціонального моделювання є визначення найбільш оптимального стаціонарного режиму функціонування кардіологічного центру.

Перша діаграма в ієрархії діаграм – IDEF0 (рис. 1.2). Вона зображує функціонування системи в цілому. Ця діаграма називається контекстною.

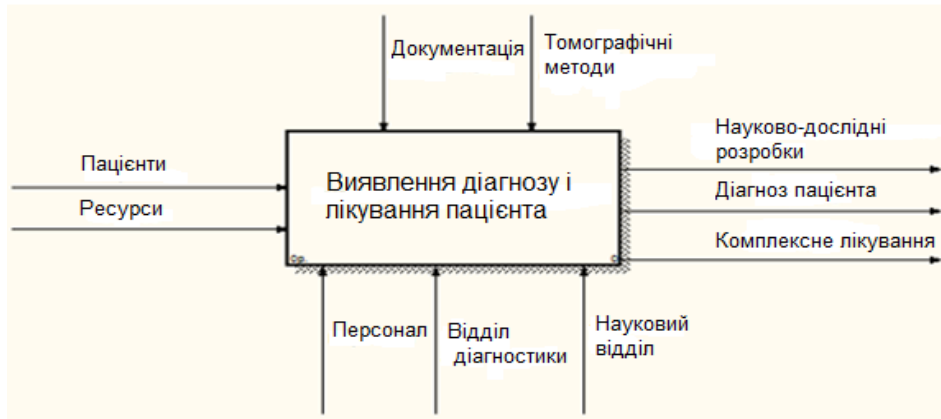


Рисунок 1.2 – Контекстна діаграма IDEF0

Після опису контексту проводиться побудова подальших діаграм в ієрархії. Кожна наступна діаграма надає більш детальний опис однієї з робіт, яку було показано на попередній діаграмі. У даному випадку ми досліджуємо функціонування системи «Державний кардіологічний центр». Друга діаграма визначає основні функції цієї системи (рис. 1.3).

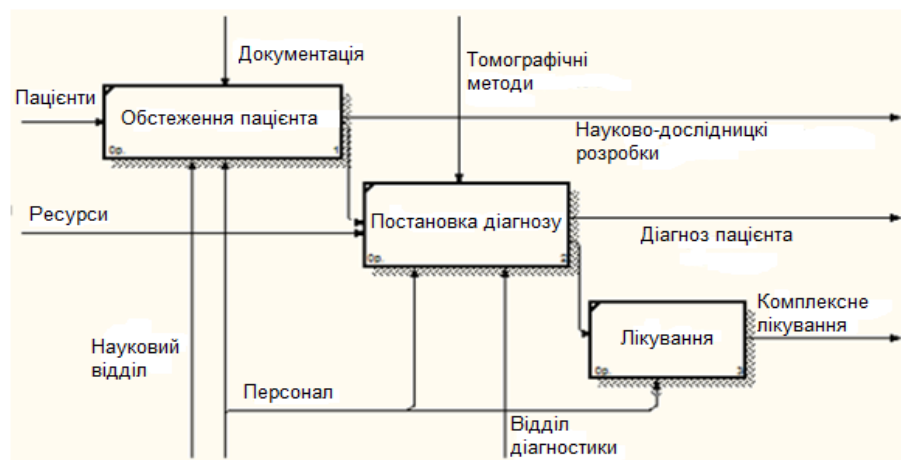


Рисунок 1.3 – Основні функції системи

Діаграма потоків даних (DFD) є ключовим інструментом для структурного аналізу та проектування інформаційних систем. У даному випадку ми використовуємо DFD для системи «Державний кардіологічний центр» вона зображена на рис. 1.4.

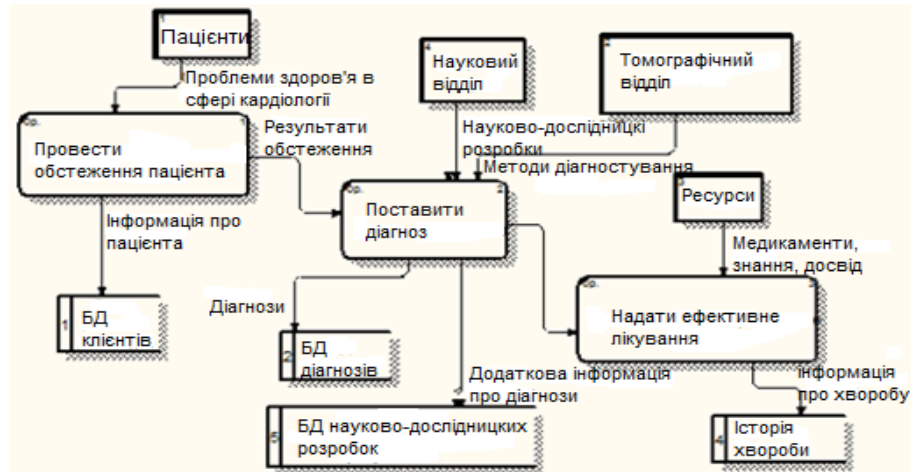


Рисунок 1.4 – DFD-діаграма

1.1.4 Формалізований опис системи

Модель «чорний ящик» системи «Державний кардіологічний центр» (рис. 1.5) представляє собою початковий погляд, який допомагає зосередити увагу на взаємодії системи з навколишнім середовищем при створенні моделі складної системи. У цій моделі вихідними даними системи є її цільові результати, а вхідними – вплив навколишнього середовища на систему. Сутність «чорного ящика» залишається нерозкритою, оскільки основна увага зосереджується на кордоні системи. Кордон, в свою чергу, відзначає повністю систему, її відокремленість від зовнішнього середовища та взаємодію системи з цим середовищем.

У моделі типу «білий ящик» (рис. 1.6) описаний «склад системи», вказані взаємозв'язки між елементами системи.

Дана система А складається з двох підсистем: А1 і А2.

A1 – Керуюча система, яка включає в себе:

а) A11 – суб’єкт управління, маючи доступ до засобів управління, може впливати на керовану систему;

б) A12 – Нормативно-правова і технічна документація, яка стосується засобів управління.

A2 – Керована система, що складається з:

а) A21 – Бухгалтерія;

б) A22 – Відділ кадрів;

в) A23 – Персонал.



Рисунок 1.5 – Модель типу «чорний ящик»

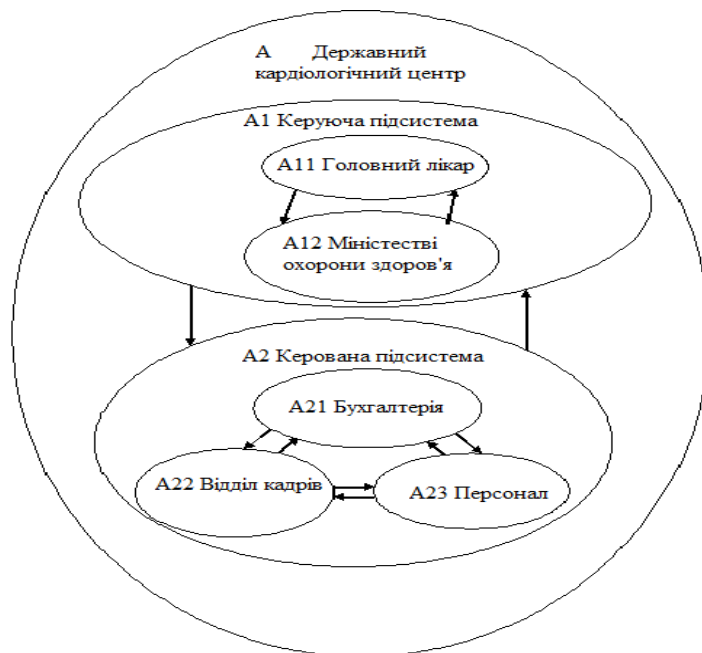


Рисунок 1.6 – Модель типу «білий ящик»

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі пов'язаною з системою «Державний кардіологічний центр»

1.2.1 Модель аналізу проблеми

У процесі аналізу системи потрібно формалізувати проблему, виділивши ряд незадоволеності в системі.

Ці незадоволеності розбиваються на три групи:

а) небажані:

- 1) застаріле обладнання;
- 2) брак фахівців у сфері кардіології;
- 3) неефективний розподіл фінансів;
- 4) неефективний розподіл повноважень керівництва;
- 5) недостатнє наукове співробітництво;
- 6) відсутність впровадження інноваційних технологій;
- 7) висока вартість обладнання;

б) критичні:

- 1) низька якість послуг;
- 2) низький рівень фінансування;
- 3) низький рівень кваліфікації співробітників-управлінців;

в) бажані:

- 1) відсутність премій для співробітників;
- 2) відсутність аналізу задоволеності споживачів наданими послугами;
- 3) недостатнє залучення молодих фахівців.

Оцінимо пріоритети невдоволь і оцінку стану.

Оцінка пріоритетів невдоволь. Побудуємо ієрархічну структуру цих невдоволь і застосуємо метод аналізу ієрархій, використовуючи шкалу Саати. За допомогою методу парних порівнянь оцінимо ступінь впливу кожної з груп невдоволь на напруженість проблеми в цілому (рис.1.7). Далі за допомогою

методу парних порівнянь оцінимо ступінь впливу кожної з бажаних, небажаних і критичних невдоволень на напруженість проблеми (рис. 1.8 – 1.13).

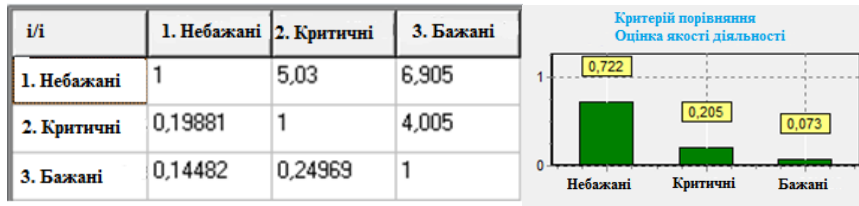


Рисунок 1.7 – Матриця парних порівнянь і вектор пріоритетів для груп невдоволень



Рисунок 1.8 – Матриця парних порівнянь і вектор пріоритетів для бажаних невдоволень

i/i	1. застаріле	2. брак фахівців	3. неефективні	4. неефективні	5. недостатнє	6. відсутність	7. висока вартість
1. застаріле	1	2,435	5,03	4,03	2,205	0,2649	1,41
2. брак фахівців	0,41068	1	3,95	3,08	1,515	1,95	0,39761
3. неефективні	0,19881	0,25316	1	3,9	0,18382	0,19194	0,16653
4. неефективні	0,24814	0,32468	0,25641	1	3,44	0,23753	0,35398
5. недостатнє	0,45351	0,66007	5,44	0,2907	1	0,34483	0,31153
6. відсутність	3,775	0,51282	5,21	4,21	2,9	1	0,48077
7. висока вартість	0,70922	2,515	6,005	2,825	3,21	2,08	1

Рисунок 1.9 – Матриця парних порівнянь для небажаних невдоволень

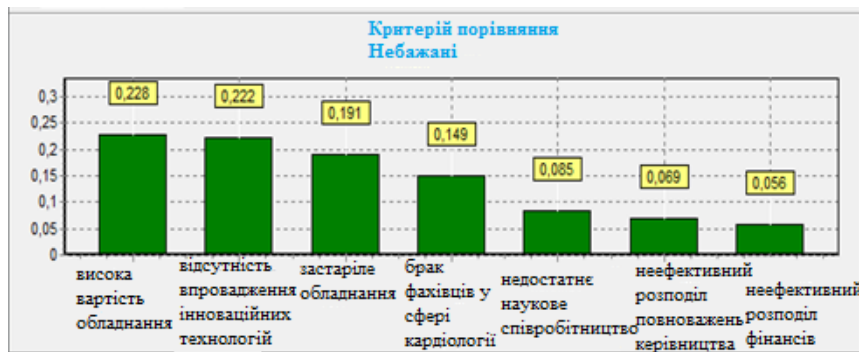


Рисунок 1.10 – Вектор пріоритетів для небажаних невдоволень

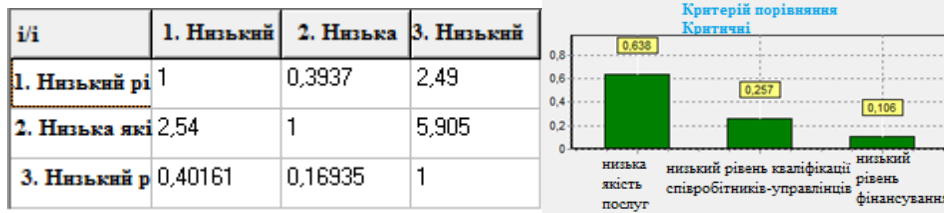


Рисунок 1.11 – Матриця парних порівнянь і вектор пріоритетів для критичних невдоволень

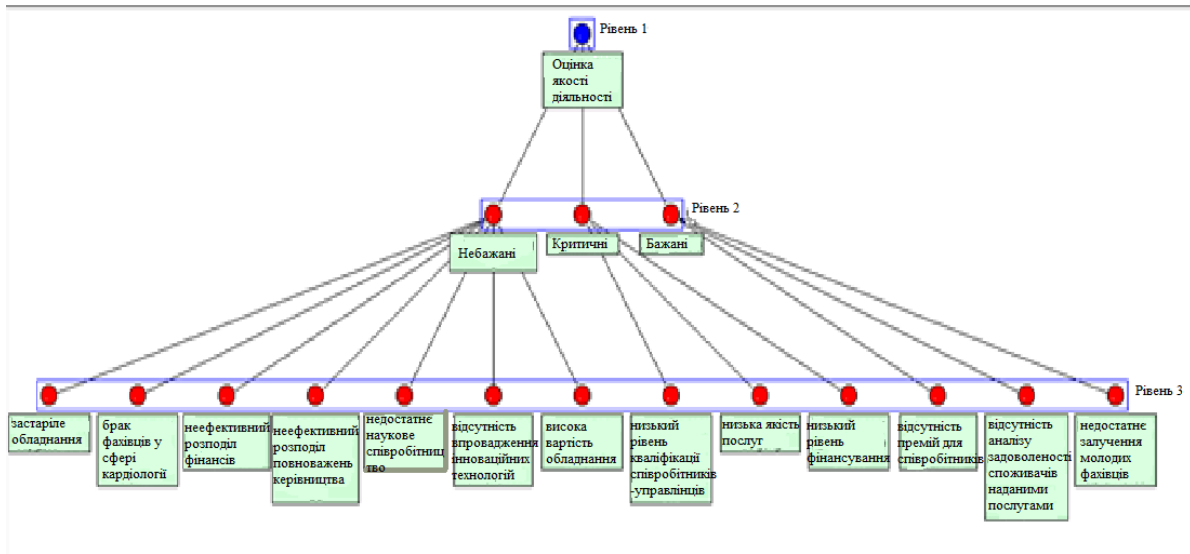


Рисунок 1.12 – Ієрархічна структура невдоволень системи

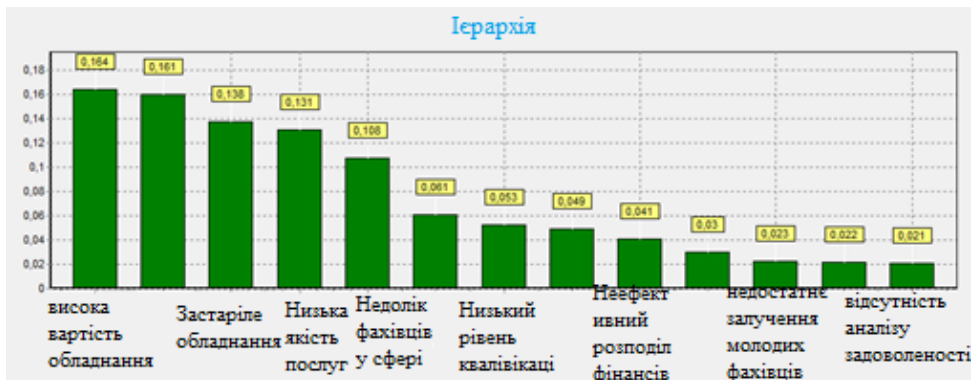


Рисунок 1.13 – Глобальний вектор пріоритетів невдоволень

Застосовуючи принцип Парето, виділимо найбільш значимі незадоволеності (рис. 1.14). Для цього ранжируємо вектор глобальних пріоритетів і залишимо ті незадоволеності, сума пріоритетів яких не перевищить 0,9 (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1 – Глобальні пріоритети невдоволень

Висока вартість обладнання	0,164
Відсутність впровадження інноваційних технологій	0,161
Застаріле обладнання	0,138
Низька якість послуг	0,131
Брак фахівців у сфері кардіології	0,108
Недостатнє наукове співробітництво	0,061
Низький рівень кваліфікації співробітників-управлінців	0,053
Неефективний розподіл повноважень керівництва	0,049
Неефективний розподіл фінансів	0,041
Відсутність премій для співробітників	0,03
Недостатнє залучення молодих фахівців	0,023
Низький рівень фінансування	0,022
Відсутність аналізу задоволеності споживачів наданими послугами	0,021

Виберемо найбільш значущі незадоволеності і розрахуємо відповідні їм нормовані значення (таблиця 1.2).

Таблиця 1.2 – Нормовані пріоритети найбільш значущих невдоволень

Висока вартість обладнання	0,207
Відсутність впровадження інноваційних технологій	0,207
Застаріле обладнання	0,175
Низька якість послуг	0,11
Брак фахівців у сфері кардіології	0,138
Недостатнє наукове співробітництво	0,054
Низький рівень кваліфікації співробітників-управлінців	0,043
Неефективний розподіл повноважень керівництва	0,065

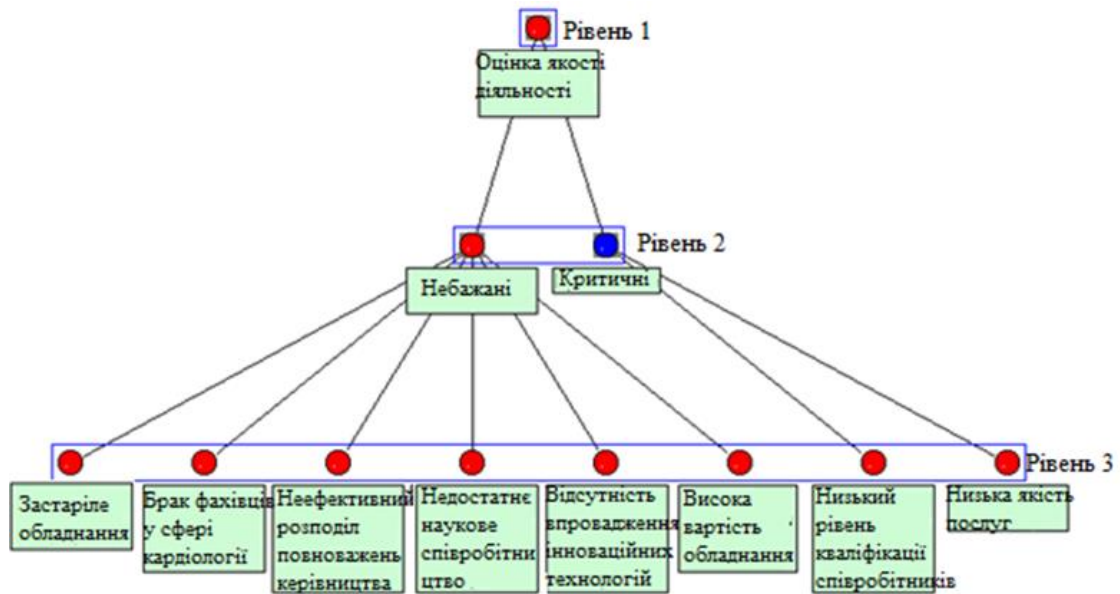


Рисунок 1.14 – Ієрархічна структура невдоволень після застосування принципу Парето

Після формалізованого аналізу можна зробити висновок про те, що найбільший вплив на напруженість проблеми надають небажані і критичні незадоволеності. Саме з цим і необхідно боротися, а перш за все з відсутністю впровадження інноваційних технологій (таблиця 1.3).

Таблиця 1.3 – Матриця досяжності

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1		1	1		1	
2	1	1		1	1		1	
3			1					
4	1	1		1	1		1	
5	1	1		1	1		1	
6	1	1		1	1	1	1	
7	1	1		1	1		1	
8	1	1	1	1	1		1	1

Побудуємо вихідний спрямований граф (рис. 1.15).

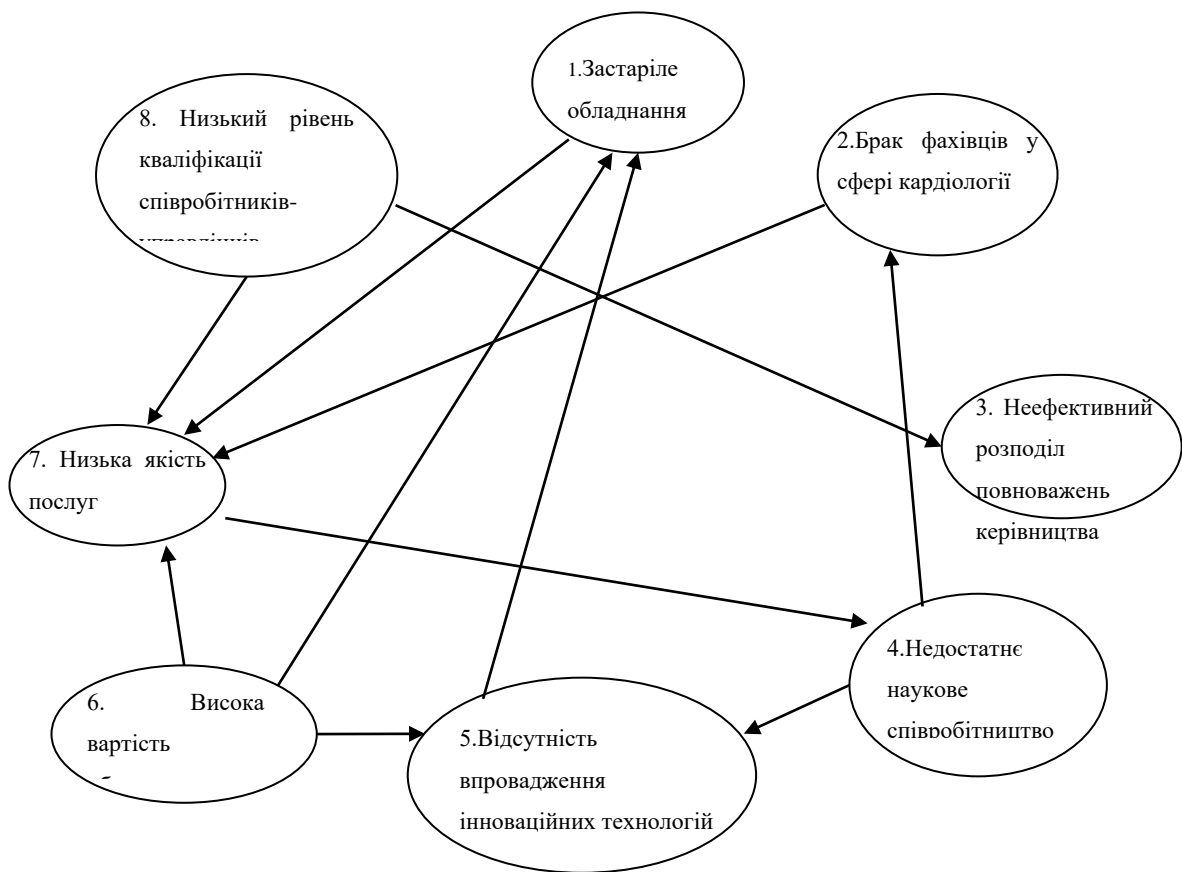


Рисунок 1.15 – Вихідний спрямований граф

Тепер заповнимо таблицю виходів $R(h_i)$, входів $A(h_i)$ і перетину виходів і входів $A(h_i) \cup R(h_i)$ (таблиця 1.4).

Після викреслювання рядків 6 та 8, отримуємо перший рівень графа (рис. 1.16).



Рисунок 1.16 – Перший рівень ієрархічної структури вихідного графа

Таблиця 1.4 – Виходи $R(h_i)$, входи $A(h_i)$, перетини входів
та виходів $A(h_i) \cup R(h_i)$

N	$R(h_i)$	$A(h_i)$	$A(h_i) \cup R(h_i)$
1	1,2,4,5,7	1,2,4,5,6,7,8	1,2,4,5,7
2	1,2,4,5,7	1,2,4,5,6,7,8	1,2,4,5,7
3	3	3,8	3
4	1,2,4,5,7	1,2,4,5,6,7,8	1,2,4,5,7
5	1,2,4,5,7	1,2,4,5,6,7,8	1,2,4,5,7
6	1,2,4,5,6,7	6	6
7	1,2,4,5,7	1,2,4,5,6,7,8	1,2,4,5,7
8	1,2,3,4,5,7,8	8	8

Таблиця 1.5 – Входи $R(h_i)$, входи $A(h_i)$ і перетини входів
та виходів $A(h_i) \cup R(h_i)$

N	$R(h_i)$	$A(h_i)$	$A(h_i) \cup R(h_i)$
1	1,2,4,5,7	1,2,4,5,7	1,2,4,5,7
2	1,2,4,5,7	1,2,4,5,7	1,2,4,5,7
3	3	3	3
4	1,2,4,5,7	1,2,4,5,7	1,2,4,5,7
5	1,2,4,5,7	1,2,4,5,7	1,2,4,5,7
6	1,2,4,5,7	1,2,4,5,7	1,2,4,5,7

Викреслюючи все рядки, отримуємо другий рівень структури вихідного графа (рис. 1.17).

Таке уявлення вихідної моделі є найбільш науковим з точки зору аналізу залежності одних елементів від інших. Результат ієрархічної структуризації дозволяє зробити висновки, що найбільш критичними проблемами є висока вартість обладнання і низький рівень кваліфікації співробітників-управлінців.

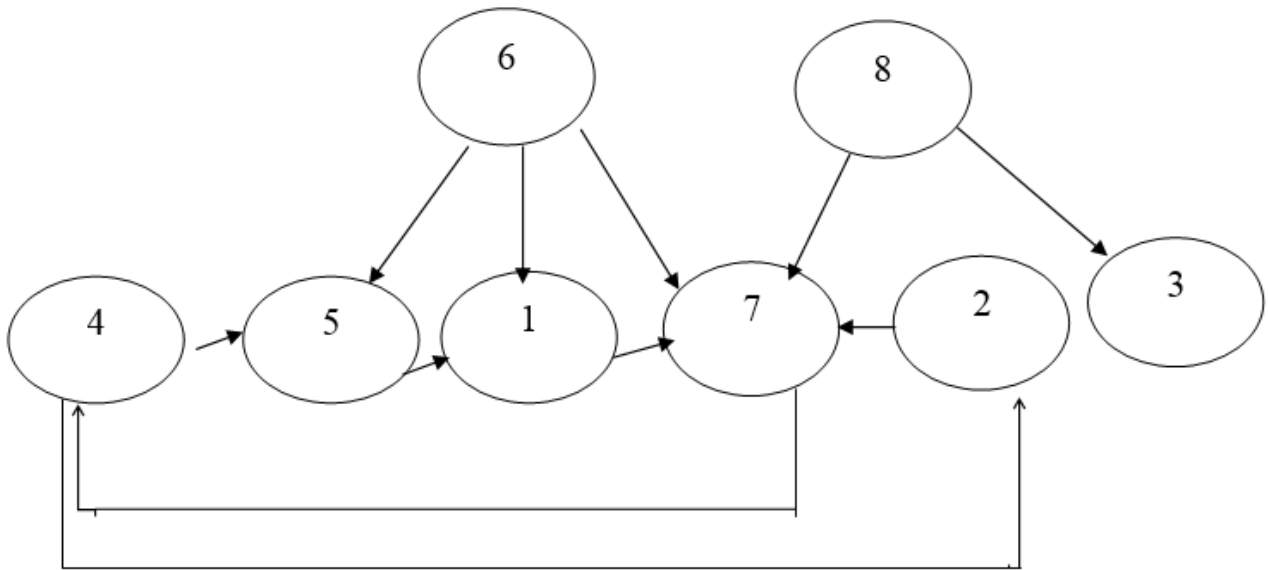


Рисунок 1.17 – Ієрархічна структура вихідного графа

Оцінка необхідного стану.

Для оцінки наявного, можливого чи бажаного станів аналізованої системи виділяються її сутнісні характеристики, і для кожного з них вводиться деякий кваліметрірований показник. Залежно від ситуації сукупність значень цих показників в загальному випадку змінюється. Ця зміна показників є результатом поточної взаємодії середовища і системи, і можуть мати тенденцію, як до зростання, так і до зменшення.

Для проведення аналізу проблеми і вибору способу її вирішення американським системологом Томасом Сааті був розроблений метод, що отримав назву МАІ. Т. Сааті запропонував агрегувати зазначені компоненти в деяку ієрархічну структуру, аналіз якої з точки зору пріоритетів їх взаємодії дозволяє виробити пропозиції щодо вирішення проблеми, тобто намітити мету, засоби і способи досягнення намічених цілей.

Виберемо показники, які дозволять оцінити стан системи:

- витрати на обслуговування;
- корупція;
- кваліфікація співробітників;

- кількість дефектів;
- умови праці;
- плинність кадрів;
- мотивація співробітників;
- заробітна плата;
- поліпшення обслуговування;
- якість управління;
- науковий ступінь фахівців.

Однак, можна помітити, що найбільш значущими є якість послуг і фінансові витрати. Грунтуючись на цих показниках можна сформулювати такі логічні можливі сценарії.

Сценарії можливого впливу на проблему:

- С1 – Положення не зміниться;
- С2 – Нові технології;
- С3 – Оптимізація роботи кардіологічного центру.

Сценарій «Положення не зміниться». Існуючі проблемоорієнтовані чинники протягом аналізованого відрізка часу не змінюються.

Сценарій «Нові технології». Зміна економічної політики уряду і прийняття цілої низки законів призведуть до суттєвого зростання обсягів зовнішніх інвестицій. Це сприятиме поліпшенню якості обладнання, впровадженню обладнання нового часу.

Результатом цього буде зниження проблеми якості послуг, збільшення надійності та безпеки обслуговування клієнтів, поліпшення якості контролю за технічними процесами і як наслідок, підвищення точності прийнятих рішень. Сценарій «Оптимізація роботи кардіологічного центру». За сукупністю контрастних сценаріїв можна агрегувати узагальнений сценарій, який являє собою деяку середньозважену суміш контрастних сценаріїв.

У таблиці 1.6 представлена таблиця калібрування показників, пов'язаної з розглянутою проблемою і містить результати експертного оцінювання тенденцій зміни показників властивостей об'єкта.

Таблиця 1.6 – Таблиця калібрування

№	Показники стану системи	C1 $f=0,087$	C2 $f=0,696$	C3 $f=0,216$	Обоб.сц
1	Витрати на обслуговування	2	-1	1	-0,306
2	Корупція	1	1	2	1,215
3	Кваліфікація співробітників	2	2	4	2,43
4	Кількість дефектів	-2	2	-1	1,002
5	Умови праці	1	2	0	1,479
6	Плинність кадрів	1	-1	2	-0,177
7	Мотивація співробітників	1	2	3	2,127
8	Заробітна плата	2	3	1	2,478
9	Поліпшення обслуговування	2	4	0	2,958
10	Якість управління	0	0	2	0,436
11	Науковий ступінь фахівців	2	3	2	2,694

1.2.2 Модель рішення проблеми

Для того щоб оцінити логічно можливі взаємні пріоритети цих сценаріїв необхідно за методом МАІ агрегувати структуру ієрархічної моделі, яка б пов'язала такі компоненти (рівні) моделі проблеми:

- фокус ієрархії – єдиний елемент самого верхнього рівня, який визначається (формулюється) як «логічне майбутнє системи» (нульовий рівень ієрархії);

- чинники, які з тієї чи іншої інтенсивністю впливають на проблему, тобто формують проблему (1-й, 2-й рівень);

- актори системи, які за допомогою сил впливають на чинники (3-й рівень);

– мети акторів, які визначають мотивацію активної діяльності акторів і через сили впливають на динаміку чинників, взаємодія яких і породжує деяку логічно обґрунтовану динаміку проблеми (4-й рівень);

– контрастні сценарії можливого логічного майбутнього стану системи (5-й рівень);

– узагальнений сценарій логічного майбутнього системи (6-й рівень).

Після розробки моделей контрастних сценаріїв агрегується ієрархічна модель прямого процесу аналізу проблеми (рис. 1.18, 1.19).

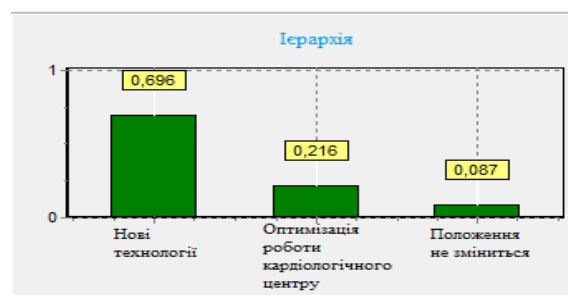


Рисунок 1.18 – Вектор пріоритетів сценаріїв вирішення проблеми

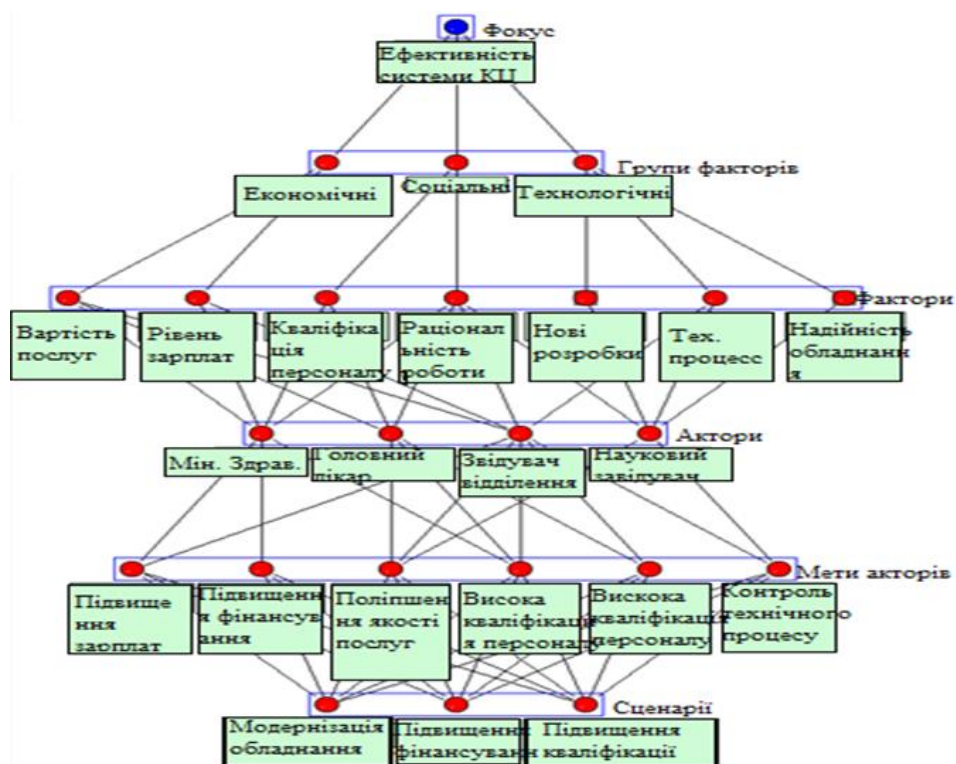


Рисунок 1.19 – Змістовна ієрархічна модель прямого процесу аналізу проблеми

Будуємо дві змістовні моделі, одна з яких дозволяє ранжувати бажані сценарії за критерієм «вигода», а друга – за критерієм «збиток» (рис. 1.20 – 1.23).

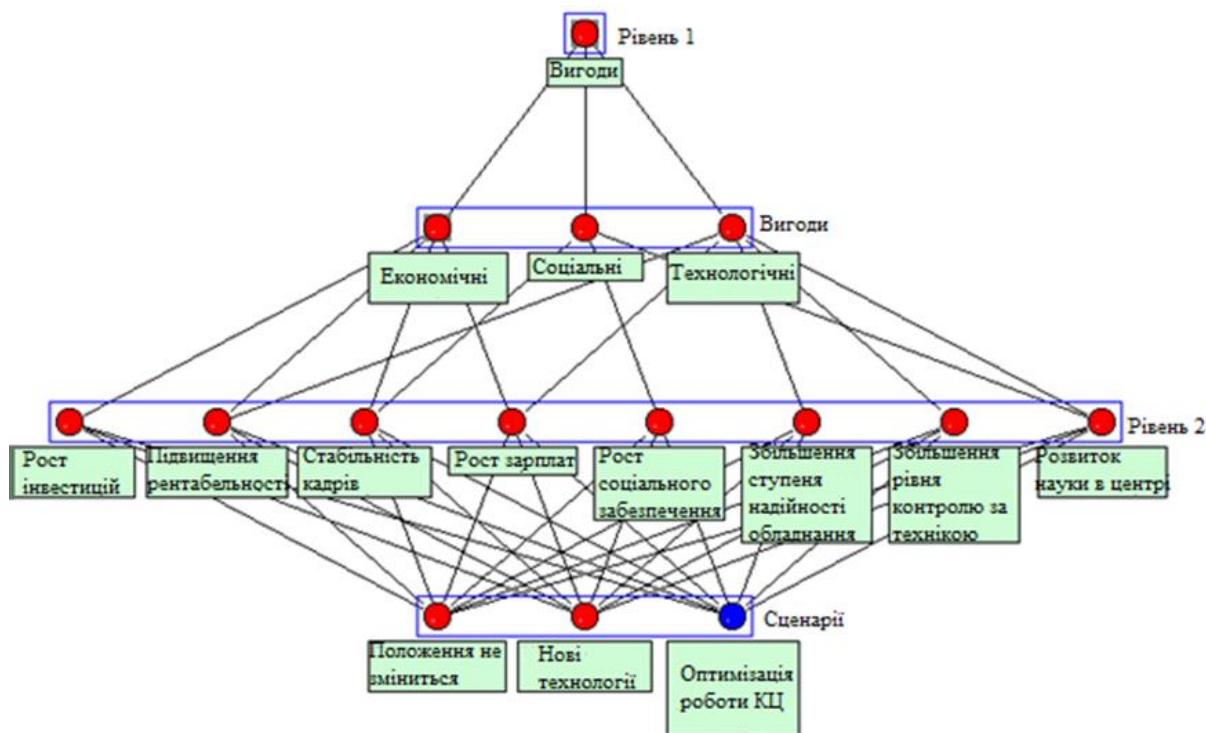


Рисунок 1.20 – Змістовна модель оцінки вектора пріоритетів технологічних проєктів за критерієм «вигода»

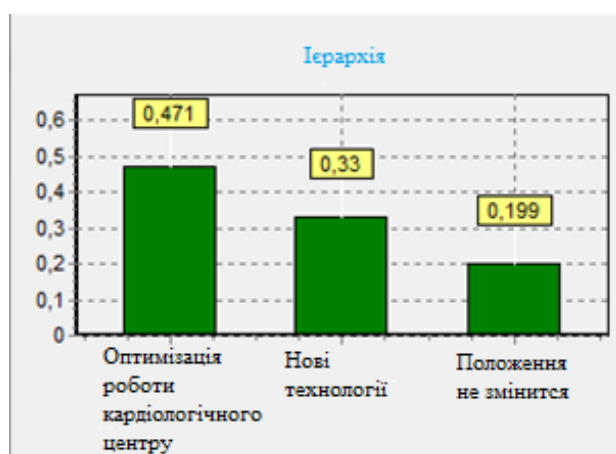


Рисунок 1.21 – Вектор пріоритетів за критерієм «вигода»

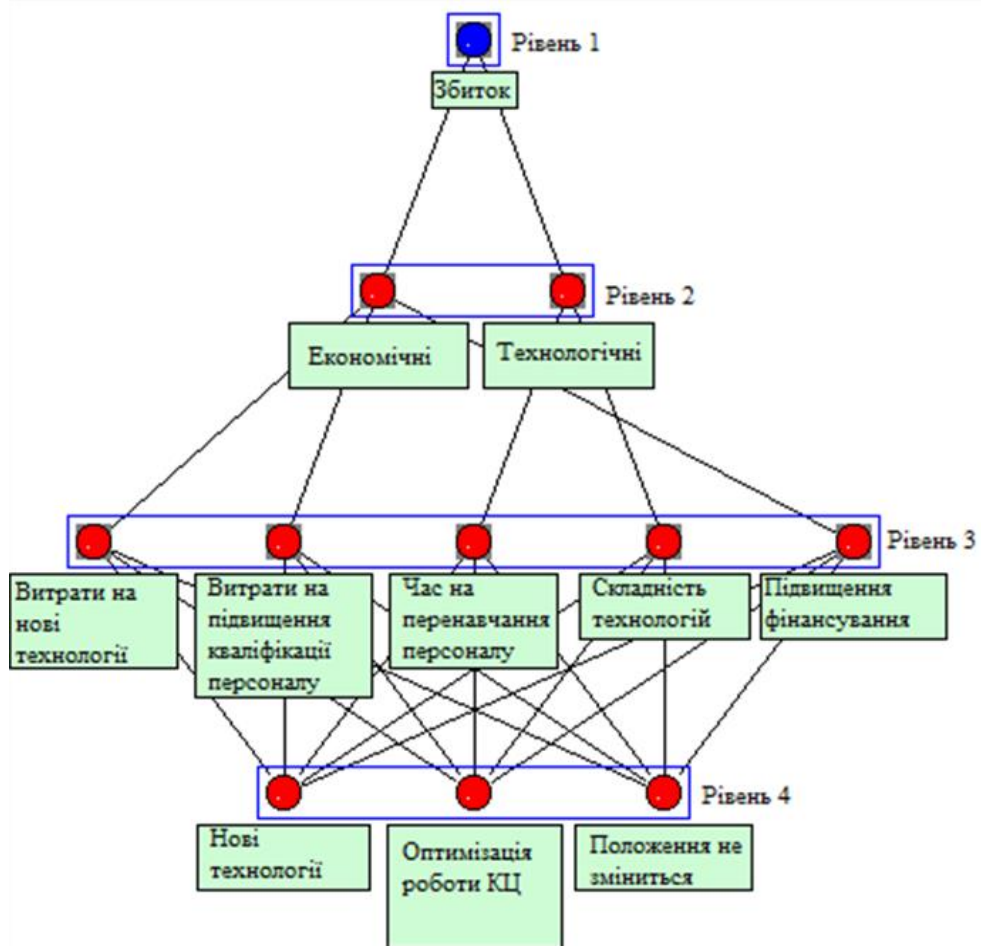


Рисунок 1.22 – Змістовна модель оцінки вектора пріоритетів технологічних проектів за критерієм «збиток»

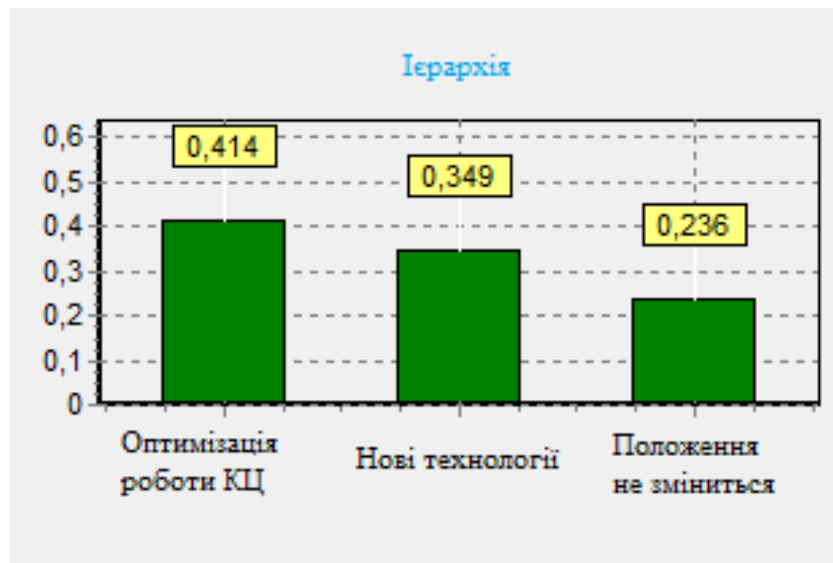


Рисунок 1.23 – Вектор пріоритетів за критерієм «збиток»

Результати аналізу заносимо в таблицю 1.7.

Таблиця 1.7 – Результати аналізу сценаріїв за критеріями «вигода»
і «збиток»

Сценарій	Положення не зміниться	Нові технології	Оптимізація роботи КЦ
Критерій “вигода”, V	0,199	0,33	0,471
Критерій “збиток” ,U	0,236	0,349	0,414
Відношення “вигода / збиток”, V/U	0,843	0,945	1,137

Вибираємо сценарій з максимальним значенням величини V/U; в нашому випадку це сценарій «Оптимізація роботи кардіологічного центру», для якого відношення V/U=1,137, тобто це необхідний (нормативний) сценарій.

Після формування експертних матриць парних порівнянь і оцінки локальних пріоритетів елементів всіх рівнів, розраховується вектор глобальних пріоритетів альтернативних програм досягнення необхідного стану системи. Для реалізації вибирають програму з максимальним коефіцієнтом значущості.

Опишемо докладніше всі рівні ієрархії.

Несприятливі чинники (небажані властивості системи або зовнішнього середовища): відсутність інвестування, відсутність нового технічного оснащення, брак кваліфікованого персоналу. Ці небажані властивості бар'єром реалізації даного сценарію.

Актори системи: Міністерство охорони здоров'я, головний лікар, завідувач відділенням, завідувач по науці. Вони можуть впливати на несприятливі фактори різними способами, що б забезпечити виконання бажаного сценарію.

Цілі акторів: ефективне керівництво розвиток технічної політики, точна оцінка стану пацієнтів, підвищення кваліфікації, зайнятість, ефективна експлуатація, впровадження нових технологій.

Альтернативні програми: фінансування впровадження інноваційних технологій, фінансування на навчання співробітників. Вони використовуються акторами для досягнення запланованих цілей.

На рисунку 1.24 зображена змістовна ієрархічна модель зворотного процесу аналізу проблеми.

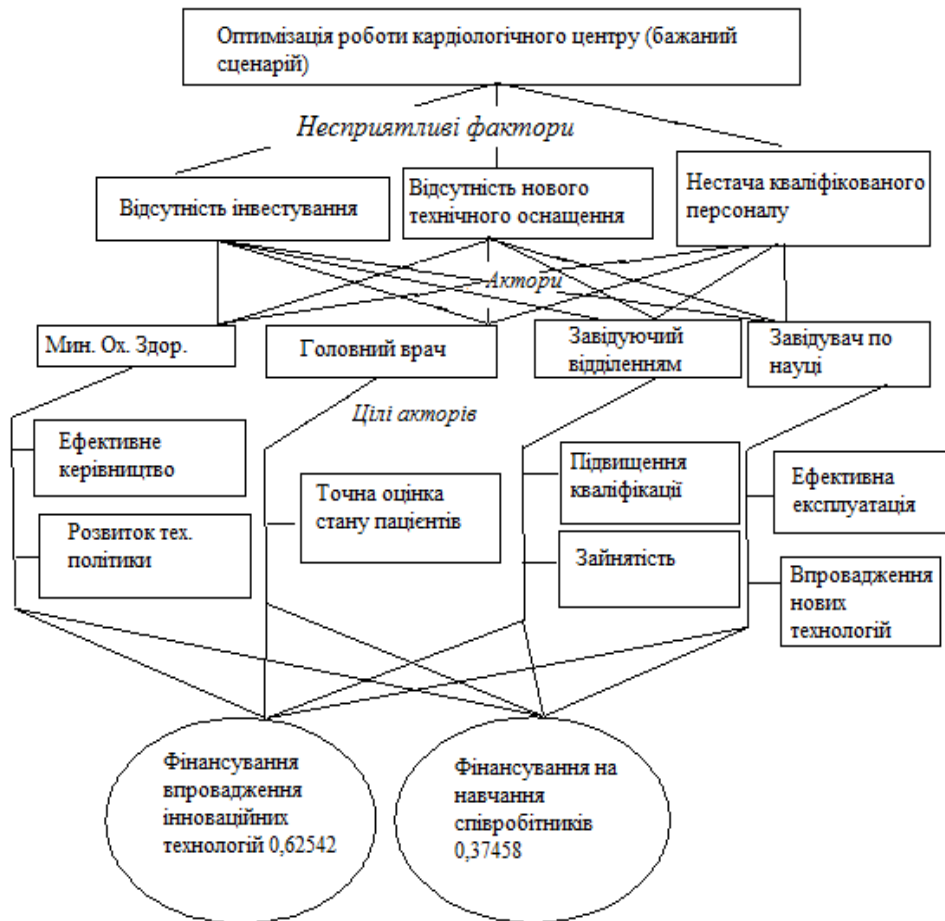


Рисунок 1.24 – Змістовна ієрархічна модель зворотного процесу аналізу проблеми

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Термін «КТ» використовується для обчислюваного відтворення функцій, ґрунтуючись на їх лінійних або площинних інтегралах. Основна мета полягає у відтворенні внутрішньої структури об'єкта на основі даних, отриманих під час

томографічного експерименту. Іншими словами, завдання полягає в отриманні зображення внутрішньої будови об'єкта на основі проєкційних даних [3].

Трансмисійна обчислювальна томографія є математичною моделлю фізичного процесу ослаблення випромінювання в речовині. Розглянемо основні співвідношення.

Нехай тонкий промінь випромінювання з інтенсивністю I_0 потрапляє на шар речовини з розподілом лінійного коефіцієнта поглинання (ослаблення) $f(x)$ вздовж поширення промені. Джерело випромінювання проходить дискретно уздовж об'єкта.

Синхронно з джерелом з іншого боку об'єкта рухається детектор випромінювання. Набір відліків, отриманий таким чином, визначає одновимірну функцію, звану проєкцією.

Потім система «джерело – детектор» повертається щодо об'єкта на деякий кут φ , і знімає новий набір відліків, що визначає наступну проєкцію. Таку схему вимірів називають круговою геометрією вимірювань, а проєкції називають паралельними проєкціями.

$$\frac{dI(x)}{dx} = -f(x)I(x). \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) – це стаціонарне рівняння переносу випромінювання в чисто поглинає неоднорідному середовищі, яке описує процес ослаблення випромінювання в речовині, і являє собою баланс частинок або енергії.

Проінтегрував обидві частини (1.1), отримали наступне співвідношення:

$$\int_{I_0}^{I_1} \frac{dI}{I} = -\int_L f(x)dx,$$

$$-\ln \frac{I_1}{I_0} = -\int_L f(x)dx.$$

Позначимо $-\ln \frac{I_1}{I_0} = \gamma$ отримаємо:

$$\int_L f(x) dx = \gamma, \quad (1.2)$$

де I_0, I_1 – задані величини.

Оскільки I_0, I_1 – задані, вважаємо, що права частина (1.2) – також задана.

Таким чином, в результаті сканування виходять лінійні інтеграли функції f по кожній з прямих L_k . За сукупністю цих інтегралів потрібно відновити f

$$\int_{L_k} f(x) dx = \gamma_k. \quad (1.3)$$

Формула (1.3) називається перетворенням Радону.

Розглядаємо f , як функцію від двох змінних. Отримуємо:

$$\int_{L_k} f(x) ds = \gamma_k. \quad (1.4)$$

Завдання полягає в тому, що б за сукупністю проєкцій γ_k відновити функцію $f(x, y)$.

1.3.2 Формальна постановка задачі

В даному методі шукана функція $f(x, y)$ представлена у вигляді скінченної суми Фур'є

$$f(x, y) \approx S_{N,N}(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}. \quad (1.5)$$

Коефіцієнти Фур'є представляються в наступному вигляді:

$$F_{k,l} = \iint_D \varphi(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy. \quad (1.6)$$

При визначенні коефіцієнтів Фур'є використовується інформація, отримана з проєкційних даних, які відповідають різним напрямкам сканування та задаються при різних значеннях індексів у сумі Фур'є. В даному методі використовується інформація проєкційних даних (1.4), для визначення коефіцієнтів Фур'є. Процес обчислення цих коефіцієнтів ділиться на два етапи:

- зведення інтеграла до повторного з урахуванням індексів k та l , а також їх взаємного розташування;
- врахування проєкційних даних.

1.4 Постановка задач дослідження

Вважаємо, що функція $f(x, y)$ є розривною з відомими лініями розриву. Відомі проєкційні дані γ_k вздовж прямих L_k :

$$\int_{L_k} f(x, y) dl = \gamma_k, \quad k = \overline{1, Q}.$$

Треба відновити цю функцію без впливу явища Гіббса. Для цього виконуємо наступні етапи:

- Етап 1. Формуємо тестову розривну функцію для відновлення.
- Етап 2. Будуємо сплайн-функцію, яка наближує задану тестову функцію і

має на вказаних лініях такі ж розриви першого роду, як і наближувана функція. Використовуємо метод побудови розривного сплайна, викладений у роботі [4].

Етап 3. Формуємо функцію $\varphi(x, y)$.

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y).$$

В роботі [4] доведено, що ця функція диференційовна.

Етап 4. Відновлюємо функцію $\varphi(x, y)$ методом скінченних сум Фур'є.

$$\tilde{\varphi}_N(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)},$$

$$F_{k,l} = \iint_D \varphi(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy.$$

У цьому методі шляхом введення заміни змінних обчислення коефіцієнтів Фур'є зводиться до обчислення повторних інтегралів, залежних від індексів в сумі Фур'є, в яких використані задані проєкційні дані.

Етап 5. Наближувану функцію $f(x, y)$ подаємо у вигляді

$$\tilde{f}(x, y) = Sp(x, y) + \tilde{\varphi}_N(x, y).$$

Етап 6. Проводимо аналіз отриманого розв'язку шляхом підрахунку відповідних похибок.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Математична модель відновлення розривних функцій за умови диференційованості нерозривної складової цих функцій

2.1.1 Загальна постановка задачі

Вважаємо, що область, в якій задана розривна функція $f(x, y)$, належить квадрату $D = [0, 1]^2$ і розбивається на $M + 1$ підобластей D_k , $k = \overline{1, M + 1}$:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \{(x, y) : 0.5 - t_1 \leq x \leq 0.5 + t_1, 0.5 - t_1 \leq y \leq 0.5 + t_1\}, \\
 D_k &= \{(x, y) : 0.5 - t_k \leq x \leq 0.5 + t_k, 0.5 - t_k \leq y \leq 0.5 + t_k\} \setminus \\
 &\setminus \{(x, y) : 0.5 - t_{k-1} \leq x \leq 0.5 + t_{k-1}, 0.5 - t_{k-1} \leq y \leq 0.5 + t_{k-1}\}, k = \overline{2, M}, \\
 D_{M+1} &= D \setminus \{(x, y) : 0.5 - t_M \leq x \leq 0.5 + t_M, 0.5 - t_M \leq y \leq 0.5 + t_M\}, \\
 0 &< t_1 < t_2 < \dots < t_M < t_{M+1} = 0.5, \\
 x_{k,1} &= 0.5 - t_k, x_{k,2} = 0.5 + t_k, k = \overline{1, M}, \\
 x_{M+1,1} &= 0, x_{M+1,2} = 1; \\
 y_{l,1} &= 0.5 - t_l, y_{l,2} = 0.5 + t_l, l = \overline{1, M}, \\
 y_{M+1,1} &= 0, y_{M+1,2} = 1.
 \end{aligned}$$

Позначимо через Γ_k , $k = \overline{1, M + 1}$, лінії розриву функції $f(x, y)$.

Вважаємо, що тестова розривна функція $f(x, y)$ задана відомими виразами в кожній області, на які розбивається квадрат

$$f(x, y) = f_k(x, y), (x, y) \in \overline{D_k}, k = \overline{1, M + 1}.$$

Вважаємо також, що функції $f_k(x, y) \in C^2(\overline{D_k})$, $k = \overline{1, M + 1}$.

Введемо до розгляду функцію

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y).$$

Далі будемо будувати розривний сплайн [3] $Sp(x, y)$ таким чином, щоб функція $\varphi(x, y)$ була неперервною ($r = 0$) або диференційованою ($r = 1$). Звідси виникає два випадки при побудові розривного сплайна. Розглянемо випадок побудови розривного сплайна де функція $\varphi(x, y)$ буде диференційовною ($r = 1$).

2.1.2 Побудова розривного сплайна

Покладемо $r = 1$. Задача полягає у побудові розривного сплайна $Sp(x, y)$, який має такі властивості:

- а) має такі самі лінії розриву, що й функція $f(x, y)$;
- б) має такі самі односторонні границі (а отже, і стрибки) на лініях розриву, що й функція $f(x, y)$;
- в) похідна за нормаллю до ліній розриву від сплайна має такі самі односторонні границі (стрибки), що й похідна за нормаллю до ліній розриву від наближуваної функції.

Це похідні

$$\frac{\partial}{\partial x} Sp(x, y), \frac{\partial}{\partial y} Sp(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y),$$

бо лініями розриву є границі квадратів.

Далі введемо базисні поліноми третього степеня двоточної ермітової інтерполяції функцій однієї змінної.

$$H_{0,0}(t) = (t-1)^2(1+2t),$$

$$H_{0,1}(t) = t(t-1)^2,$$

$$H_{1,0}(t) = t^2(3-2t),$$

$$H_{1,1}(t) = (t-1)t^2.$$

Перші похідні від цих поліномів в точках $t = 0$, $t = 1$ мають властивості:

$$H_{k,s}^{(p)}(q) = \delta_{k,q} \cdot \delta_{p,s}, \quad k, s, p, q \in \{0,1\},$$

$$H_{k,s}^{(p)}(t) = \frac{\partial^p}{\partial t^p} H_{k,s}(t).$$

Надалі будемо вважати, що

$$f_k^{(s,0)}(x_{l,i}, y) = \frac{\partial^s}{\partial x^s} f_k(x, y) \Big|_{x=x_{l,i}},$$

$$f_k^{(0,p)}(x, y_{l,j}) = \frac{\partial^p}{\partial y^p} f_k(x, y) \Big|_{y=y_{l,j}},$$

$$i, j = 1, 2; k, l = \overline{1, M+1}.$$

Побудуємо розривний сплайн $Sp(x, y)$ у вигляді:

$$Sp(x, y) = \psi_k(x, y), (x, y) \in \overline{D_k}, k = \overline{1, M+1}.$$

Для побудови функцій $\psi_k(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D_k}$, $k = \overline{1, M+1}$, використовувались оператори інтерлінації функцій на системі попарно взаємно перпендикулярних прямих, що було введено у роботі [5]:

$$\begin{aligned}\psi_1(x, y) &= O_1 f_1(x, y) + O_2 f_1(x, y) - O_1 O_2 f_1(x, y), \\ O_1 f_1(x, y) &= \sum_{s=0}^1 H_{0,s} \left(\frac{x - x_{1,1}}{x_{1,2} - x_{1,1}} \right) \cdot (x_{1,2} - x_{1,1})^s f_1^{(s,0)}(x_{1,1}, y) + \\ &+ \sum_{s=0}^1 H_{1,s} \left(\frac{x - x_{1,1}}{x_{1,2} - x_{1,1}} \right) \cdot (x_{1,2} - x_{1,1})^s f_1^{(s,0)}(x_{1,1}, y), \quad x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2}, \\ O_2 f_1(x, y) &= \sum_{p=0}^1 H_{0,p} \left(\frac{y - y_{1,1}}{y_{1,2} - y_{1,1}} \right) \cdot (y_{1,2} - y_{1,1})^p f_1^{(0,p)}(x, y_{1,1}) + \\ &+ \sum_{p=0}^1 H_{1,p} \left(\frac{y - y_{1,1}}{y_{1,2} - y_{1,1}} \right) \cdot (y_{1,2} - y_{1,1})^p f_1^{(0,p)}(x, y_{1,2}), \quad y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2}.\end{aligned}$$

Зауваження. Для функції $\psi_1(x, y) = O_1 f_1(x, y) + O_2 f_1(x, y) - O_1 O_2 f_1(x, y)$, задає інтерлінацію функції $f_1(x, y)$ оператор O_1 між двома паралельними вертикальними прямими (функція $O_1 f_1(x, y)$ таким чином співпадає з функцією $f_1(x, y)$ на двох прямих $x = x_{1,2}, x = x_{1,1}, 0 \leq y \leq 1$); оператор O_2 задає інтерлінацію функції $f_1(x, y)$ між двома паралельними горизонтальними прямими (функція $O_2 f_1(x, y)$ таким чином співпадає з функцією $f_1(x, y)$ на двох прямих $y = y_{1,2}, y = y_{1,1}, 0 \leq x \leq 1$); оператором інтерполяції функції $f_1(x, y)$ є оператор $O_1 O_2$ у чотирьох вершинах квадрата D_1 . На межі квадрата D_1 різниця функцій $\psi_1(x, y) - f_1(x, y) = 0$. Аналогічні міркування можна провести для функцій

$$\begin{aligned}\psi_k(x, y) &= O_{1,k} f_k(x, y) + O_{2,k} f_k(x, y) - O_{1,k} O_{2,k} f_k(x, y), \quad k = \overline{2, M+1}; \\ O_{1,k} f_k(x, y) &= \sum_{s=0}^1 H_{0,s} \left(\frac{x - x_{k,1}}{x_{k-1,1} - x_{k,1}} \right) \cdot (x_{k-1,1} - x_{k,1})^s f_k^{(s,0)}(x_{k,1}, y) + \\ &+ \sum_{s=0}^1 H_{1,s} \left(\frac{x - x_{k,1}}{x_{k-1,1} - x_{k,1}} \right) \cdot (x_{k-1,1} - x_{k,1})^s f_k^{(s,0)}(x_{k-1,1}, y), \\ &x_{k,1} \leq x \leq x_{k-1,1}, O_{1,k} f_k(x, y) = 0, \quad x_{k-1,1} < x < x_{k-1,2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_{1,k} f_k(x, y) &= \sum_{s=0}^1 H_{0,s} \left(\frac{x - x_{k-1,2}}{x_{k,2} - x_{k-1,2}} \right) \cdot (x_{k,2} - x_{k-1,2})^s f_k^{(s,0)}(x_{k-1,2}, y) + \\
&+ \sum_{s=0}^1 H_{1,s} \left(\frac{x - x_{k-1,2}}{x_{k,2} - x_{k-1,2}} \right) \cdot (x_{k,2} - x_{k-1,2})^s f_k^{(s,0)}(x_{k,2}, y), \\
&x_{k-1,2} \leq x \leq x_{k,2}, k = \overline{2, M+1}; \\
O_{2,k} f_k(x, y) &= \sum_{p=0}^1 H_{0,p} \left(\frac{y - y_{k,1}}{y_{k-1,1} - y_{k,1}} \right) \cdot (y_{k-1,1} - y_{k,1})^p f_k^{(0,p)}(x, y_{k,1}) + \\
&+ \sum_{p=0}^1 H_{1,p} \left(\frac{y - y_{k,1}}{y_{k-1,1} - y_{k,1}} \right) \cdot (y_{k-1,1} - y_{k,1})^p f_k^{(0,p)}(x, y_{k-1,1}), y_{k,1} \leq y \leq y_{k-1,1}, \\
O_{2,k} f_k(x, y) &= 0, \quad y_{k-1,1} < y < y_{k-1,2}, \\
O_{2,k} f_k(x, y) &= \sum_{p=0}^1 H_{0,p} \left(\frac{y - y_{k-1,2}}{y_{k,2} - y_{k-1,2}} \right) \cdot (y_{k,2} - y_{k-1,2})^p f_k^{(0,p)}(x, y_{k-1,2}) + \\
&+ \sum_{p=0}^1 H_{1,p} \left(\frac{y - y_{k-1,2}}{y_{k,2} - y_{k-1,2}} \right) \cdot (y_{k,2} - y_{k-1,2})^p f_k^{(0,p)}(x, y_{k,2}), y_{k-1,2} \leq y \leq y_{k,2}, \\
&k = \overline{2, M+1}; O_{1,k} O_{2,k} f_k(x, y) = O_{1,k}(O_{2,k} f_k(x, y)).
\end{aligned}$$

Розривний сплайн для випадку $r = 1$ побудовано.

2.1.3 Використання сплайна для побудови диференційовної функції

Подемо функцію $\varphi(x, y)$ у вигляді

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \varphi_k(x, y), \\
\varphi_k(x, y) &= f_k(x, y) - \psi_k(x, y), \\
(x, y) &\in \overline{D_k}, k = \overline{1, M+1}.
\end{aligned}$$

Теорема. Функція $\varphi(x, y)$ має такі властивості:

$$\text{а) } \varphi_1(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma_1,$$

$$\varphi_k(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma_{k-1},$$

$$(x, y) \in \Gamma_k, k = \overline{2, M+1};$$

$$\text{б) } \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(x, y) = 0, x = x_{1,1}, x = x_{1,2}, y_{1,1} \leq y \leq y_{1,2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \varphi_1(x, y) = 0, y = y_{1,1}, y = y_{1,2}, x_{1,1} \leq x \leq x_{1,2};$$

$$\text{в) } \frac{\partial}{\partial x} \varphi_k(x, y) = 0,$$

$$x = x_{k,1}, x = x_{k,2},$$

$$y_{k,1} \leq y \leq y_{k,2},$$

$$x = x_{k-1,1}, x = x_{k-1,2},$$

$$y_{k-1,1} \leq y \leq y_{k-1,2},$$

$$k = \overline{2, M+1};$$

$$\text{г) } \frac{\partial}{\partial y} \varphi_k(x, y) = 0,$$

$$y = y_{k,1}, y = y_{k,2},$$

$$x_{k,1} \leq x \leq x_{k,2},$$

$$y = y_{k-1,1}, y = y_{k-1,2},$$

$$x_{k-1,1} \leq x \leq x_{k-1,2},$$

$$k = \overline{2, M+1};$$

$$\text{д) } \varphi(x, y) \in C^1(\overline{D}), \text{ якщо } f_k(x, y) \in C^2(\overline{D}_k).$$

Таким чином, побудовано сплайн, з допомогою якого отримуємо функцію $\varphi(x, y) \in C^1(\overline{D})$ для випадку $r = 1$. Аналіз результатів обчислювального експерименту відновлення розривних функцій двох змінних за допомогою проєкцій та скінченних сум Фур'є без явища Гіббса наведено у роботі [4].

2.2 Загальні теоретичні відомості

2.2.1 Кратні ряди Фур'є

Нехай, функція $f(x, y)$ задана в прямокутнику $-l_1 \leq x \leq l_1$, $-l_2 \leq y \leq l_2$ та при кожному $y \in [-l_2, l_2]$ її можливо розкласти в ТРФ, як функції x на відрізку $[-l_1, l_1]$. Тоді отримаємо

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(y) e^{i \frac{n\pi x}{l_1}}, \quad (2.1)$$

де

$$c_n(y) = \frac{1}{2l_1} \int_{-l_1}^{l_1} f(\xi, y) e^{i \frac{n\pi \xi}{l_1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.2)$$

Нехай, кожна із функцій $c_n(y)$ можливо розкласти на відрізку $-l_2 \leq y \leq l_2$, в ТРФ, тобто

$$c_n(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} e^{i \frac{m\pi y}{l_2}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.3)$$

де

$$c_{nm}(y) = \frac{1}{2l_1} \int_{-l_1}^{l_1} c_n(\eta) e^{i \frac{n\pi \eta}{l_1}} d\eta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4)$$

Тоді, підставляючи (2.2) в (2.4) та (2.3) в (2.1), отримаємо

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{i\left(\frac{n\pi x}{l_1} + \frac{m\pi y}{l_2}\right)}, \quad (2.5)$$

де

$$c_{mn} = \frac{1}{4l_1 l_2} \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} f(\xi, \eta) e^{-i\left(\frac{n\pi\xi}{l_1} + \frac{m\pi\eta}{l_2}\right)} d\xi d\eta.$$

Таким чином, ми отримали розкладання функції двох змінних в ТРФ у комплексній формі.

2.2.2 Модель відновлення функцій методом скінченних сум Фур'є

Функція $f(x, y)$ відшукується у вигляді скінченної суми Фур'є:

$$f(x, y) \approx S_{N,N}(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)},$$

де коефіцієнти Фур'є подаються у вигляді:

$$F_{k,l} = \iint_D f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy. \quad (2.6)$$

Коефіцієнти Фур'є будуть наближено обчислюватися на основі проєкційних даних Радона. Важливо відзначити, що коефіцієнти k, l у розв'язку відповідають параметрам φ та s у перетворенні Радона.

Ідея полягає в тому, щоб отримати значення коефіцієнтів Фур'є, зводячи кратний інтеграл до послідовного. Внутрішній інтеграл можна інтерпретувати

як проєкцію невідомої функції двох змінних вздовж певного напрямку. На практиці, для отримання цих значень, проводять сканування комп'ютерним томографом вздовж цього самого напрямку [6].

У подвійному інтегралі (2.6) проводиться заміна вигляду:

$$kx + ly = t, \quad -lx + ky = v.$$

Відповідно до розташування значень k та l на числовій осі, область інтегрування буде розділена на три різних підобласті.

2.2.3 Відновлення розривних функцій з відомими лініями розриву

Розривні функції – це спеціальний клас функцій, які мають обмежену кількість точок розриву. Точки розриву – це місця, де функція не є неперервною, тобто відбувається різке зміння її значення. Наприклад, функція Хевісайда є типовим прикладом розривної функції, оскільки вона має розрив в точці $x = 0$.

Властивості розривних функцій включають наступне:

- розривні функції мають скінчену кількість точок розриву. Це відрізняє їх від неперервних функцій, які можуть бути неперервними на всьому проміжку;
- розривні функції визначаються своїми значеннями в точках розриву. Це означає, що функція може мати різні ліва і права границі в околі точок розриву;
- поза точками розриву розривні функції можуть бути неперервними та гладкими. Їх поведінка може визначатися на певних проміжках у вигляді звичайних аналітичних функцій;
- однією з ключових властивостей розривних функцій є їх можливість подання у вигляді ряду Фур'є. Це дозволяє апроксимувати такі функції за допомогою коефіцієнтів Фур'є та методів відновлення.

2.2.4 Явище Гіббса

Феномен Гіббса, вирішує проблему відновлення точкових значень функції з коефіцієнтів її розширення [7].

Маючи $2N + 1$ коефіцієнтів Фур'є функції \hat{f}_k , для $-N \leq k \leq N$ невідомої функції $f(x)$ визначеної скрізь на проміжку $-1 \leq x \leq 1$, побудувати точкові значення функції.

Прямий метод полягає в побудові класичної суми Фур'є:

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}_k e^{ik\pi x}.$$

Це спосіб відновлення точкових значень $f(x)$ за умови, що $f(x)$ є гладкою і періодичною. Насправді, якщо $f(x)$ аналітична і періодична, відомо, що ряд Фур'є сходиться експоненціально швидко:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - f_N(x)| \leq e^{-\alpha N}, \quad \alpha > 0.$$

Однак якщо $f(x)$ є переривчастою або неперіодичною, то $f_N(x)$ не є добрим наближення до $f(x)$. Само собою зрозуміло, що якість збіжності погана. Можна відзначити дві особливості апроксимації:

– далеко від розриву збіжність досить повільна. Якщо x_0 – нерухома точка в $(-1, 1)$, то

$$|f(x_0) - f_N(x_0)| \sim O\left(\frac{1}{N}\right);$$

– поблизу границі існує проскакування, яке не зменшується зі збільшенням N , таким чином:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - f_N(x)|$$

не прямує до нуля.

Феномен Гіббса – це неможливість відновити точкові значення неперіодичної, але в іншому випадку ідеально гладкої функції по її коефіцієнтам Фур'є.

Феномен Гіббса, швидше за все, вказує на те, що внаслідок своєї природи неможливо точно відтворити локальну інформацію (значення в окремих точках) на основі загальних властивостей (коефіцієнтів Фур'є) для кусково-гладких функцій [7].

Загальний висновок полягає в тому, що багато фізичних явищ можна описати за допомогою кусково-гладких функцій. Наприклад, в аеронавтиці і космонавтиці важливо вивчати потоки рідини з ударними хвилями, які включають розриви в полі тиску. Точне прогнозування погоди також вимагає урахування географічних особливостей, таких як гори зі значними градієнтами. Для вирішення цих завдань використовуються методи, які базуються на глобальних наближеннях і враховують феномен Гіббса [8].

Ще одним прикладом є стиснення даних. Для ефективного стиснення даних важливо мати чітке уявлення про їхню структуру і обрані методи стиснення. Потрібно враховувати, чи відповідає представлення Фур'є негладким сигналам.

Отримання і подальше видобування інформації з функцій має два етапи: зберігання і витяг. Зберігання коефіцієнтів розкладу є ефективним способом збереження інформації про функції. Проте, у випадку неперервних функцій, для видобування інформації після переривання слід використовувати більш чутливі методи, а не обмежуватися простим сумуванням ряду Фур'є.

У чисельному моделюванні задач, пов'язаних з ударними хвилями, важливо обчислити коефіцієнти Фур'є функції тиску, натомість обчислювати її точкові значення шляхом підсумовування прямих рядів Фур'є. Для стиснення даних також рекомендується зберігати коефіцієнти розкладання функцій, навіть якщо вони гладкі тільки в окремих частинах.

Ми розглянули явище Гіббса в контексті апроксимації Фур'є аналітичної, але неперіодичної функції. Зазначимо, що це явище проявляється в багатьох інших ситуаціях, не обмежуючись лише розглянутим прикладом.

Висновки за розділом 2

У даному розділі розглянуто математичну модель відновлення розривних функцій за умови диференційовності нерозривної складової цих функцій включає в себе загальну постановку задачі, де використовуються розривні сплайни для апроксимації розривних функцій. Побудова розривних сплайнів дозволяє створити неперервну складову, яка відображає нерозривну частину функції, та використовується для отримання диференційовної функції.

Загальні теоретичні відомості стосовно відновлення розривних функцій включають розгляд кратних рядів Фур'є та їх використання для методу скінченних сум Фур'є. Ці методи застосовуються як для відновлення розривних функцій з відомими лініями розриву, так і для аналізу явища Гіббса, що виникає при наближенні розривних функцій скінченними сумами Фур'є.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної математики Mathcad

Система Mathcad відзначається своєю унікальністю в наукових та інженерних розрахунках. Вона спрощує вивчення комп'ютерної роботи для фахівців у конкретній науково-технічній сфері та дозволяє реалізувати математичні моделі без глибокого вдавання в програмування на традиційних мовах.

Користувачі Mathcad – це науковці, інженери, студенти та інші фахівці, які займаються математичними розрахунками. Особливість Mathcad полягає в його власній довідниковій системі, яка містить електронні книги з корисними формулами, даними та графіками, доступними одним натисканням кнопки. Поєднуючи текст, графіки та математичні вирази на одному аркуші, Mathcad полегшує розуміння складних розрахунків. Основні можливості Mathcad включають комбінування тексту, математичних виразів та графіків в будь-якому місці екрану, вбудовані алгоритми для розв'язання систем рівнянь та нерівностей, обчислення сум рядів, інтегралів, роботу зі статистичними функціями, вектори та матриці, символічне інтегрування, диференціювання та інше.

Mathcad є простим у використанні для досліджень, оскільки не вимагає передбачення програми для виконання математичних розрахунків. Користувач може вводити математичні вирази за допомогою вбудованого редактора формул та отримувати результат у загальноприйнятому форматі

3.2 Алгоритм розв'язання задачі відновлення розривних функцій за умови диференційовності нерозривної складової цих функцій

Кроки алгоритму розв'язання задачі:

– введення вхідних даних;

– вибір відновлення розривної функції з наявністю або без наявності явища Гіббса за допомогою перемикача PR.

Крок 1. Алгоритм відновлення розривної функції $f(x, y)$ з наявністю явища Гіббса:

- використання методу скінченних сум Фур'є для відновлення функції $f(x, y)$ та отримання наближеного розв'язку $f_N(x, y)$;
- порівняння отриманих результатів для функції $f_N(x, y)$ з точним розв'язком.

Крок 2. Алгоритм відновлення розривної функції $f(x, y)$ без наявності явища Гіббса:

- побудова розривного сплайна $Sp(x, y)$;
- знаходження диференційовної функції $\varphi(x, y)$;
- використання методу скінченних сум Фур'є для відновлення функції $\varphi(x, y)$ та отримання наближеного розв'язку $\varphi_N(x, y)$;
- порівняння отриманих результатів для функції $\varphi(x, y)$ з точним розв'язком;
- формування функції $f(x, y) = Sp(x, y) + \varphi_N(x, y)$;
- порівняння отриманих результатів для функції $f(x, y)$ з точним розв'язком.

3.3 Опис програми

У якості вхідних даних до програми використовуються тестові задачі у вигляді функцій $f(x, y)$, які визначені на області D .

При виборі функції зі списку тестових задач за допомогою перемикача PR, проводиться побудова зображень поверхні та ліній рівня за використанням таблиці значень функції $z = f(x, y)$. Вибирається число N , що обмежує верхній та нижні індекси у сумі Фур'є.

Далі визначаються коефіцієнти Фур'є, використовуючи проєкційні дані, та обчислюються наближені значення цих коефіцієнтів. Також проводиться розрахунок наближення без наявності явища Гіббса. Після цього програма порівнює точні та наближені значення відновленої функції і надає їх графічну інтерпретацію. Результатом роботи є напівтонові зображення, лінії рівня та графіки похибок, які виникають при заміні заданої функції відтвореною функцією.

Функції на вході нормуються так, щоб їх максимальне значення дорівнювало 1 для можливості порівняння похибок. Час роботи програми вимірюється лічильником, що фіксує час компіляції програми.

Оцінка точності відновлення проводиться порівнянням отриманих результатів з точним значенням функції за допомогою обчислення похибок: максимальної за модулем, середньоквадратичної та середньої абсолютної.

Висновки за розділом 3

У цьому розділі наведено опис системи комп'ютерної математики Mathcad, її позитивні чинники для використання, наведено алгоритм розв'язання поставленої в дипломі задачі, а також опис програми. Робиться наголос на тому, що нерозривна складова шуканої функції є диференційовною.

Описана система Mathcad представляє зручний та потужний інструмент для вирішення задачі відновлення розривних функцій. Програма оперує тестовими задачами у вигляді функцій, визначених на конкретній області, відображаючи зображення поверхні та лінії рівня для відновлюваних функцій. Використання методу скінченних сум Фур'є для знаходження коефіцієнтів Фур'є, обчислення наближених значень та подальше порівняння точних і наближених результатів відновлення дозволяє отримати графічну інтерпретацію відтворених функцій.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1. Обчислювальний експеримент відновлення розривної функції з однією лінією розриву

4.1.1 Лінією розриву є границя квадрата

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) \geq 0; \\ f_2(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) < 0; \end{cases}$$

$$f_1(x, y) = e^{\left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \right] \cdot (-1)} \cdot 10,$$

$$f_2(x, y) = 5 \sin \left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \right],$$

$$w_1(x, y) = 0.5 \cdot [(x-0.25) \cdot (0.75-x) + (y-0.25) \cdot (0.75-y) - \\ - |(x-0.25) \cdot (0.75-x) - (y-0.25) \cdot (0.75-y)|].$$

Результати досліджень відновлення розривної функції методом скінченних сум Фур'є без сплайна (з наявністю явища Гіббса), та зі сплайном (без наявності явища Гіббса) при $x_{11} = 0,25$; $x_{12} = 0,75$; $x_{21} = 0$; $x_{22} = 1$; $y_{11} = 0,25$; $y_{12} = 0,75$; $y_{21} = 0$; $y_{22} = 1$; для $N = 16$; $NN = 5$; наведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Результати досліджень при $N = 16$; $NN = 5$

N	NN	P_1	P_2	P_3	$Time$
З наявністю явища Гіббса					
16	5	0.636	0.765	0.332	0.339
Без наявності явища Гіббса					
16	5	$2.142 \cdot 10^{-5}$	$2.71 \cdot 10^{-5}$	$1.513 \cdot 10^{-5}$	44.6

Далі наведено графічні ілюстрації зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення заданої функції, відтвореної функції з наявністю явища Гіббса та відтвореної функції з без наявності явища Гіббса (рис. 4.1– 4.6).

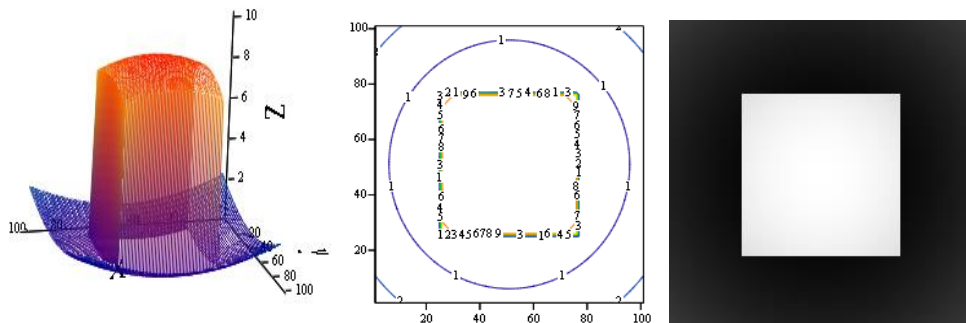


Рисунок 4.1 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення заданої функції

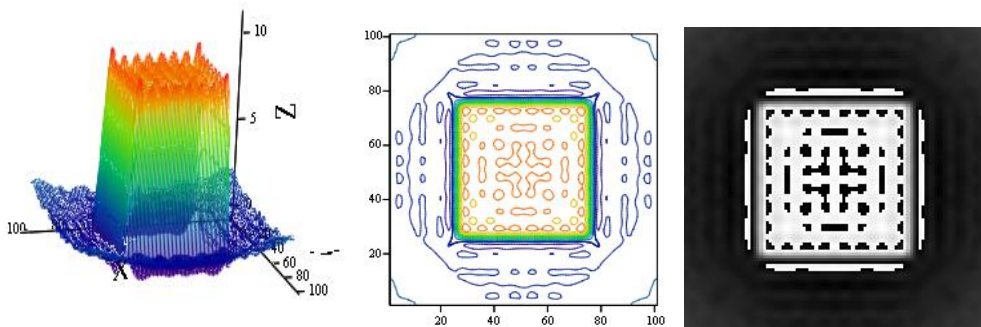


Рисунок 4.2 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення відтвореної функції з наявністю явища Гіббса

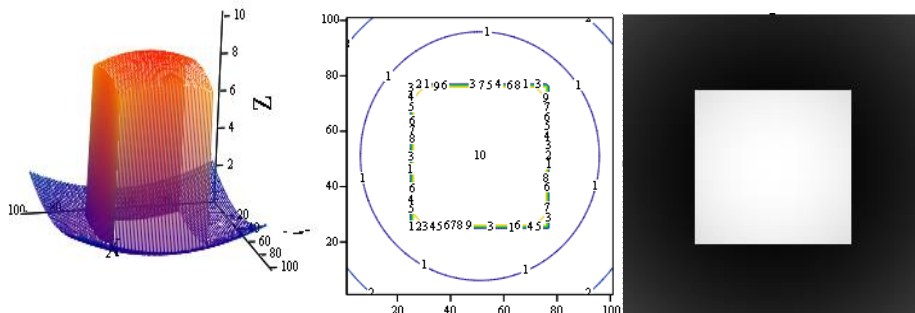


Рисунок 4.3 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення відтвореної функції без наявності явища Гіббса

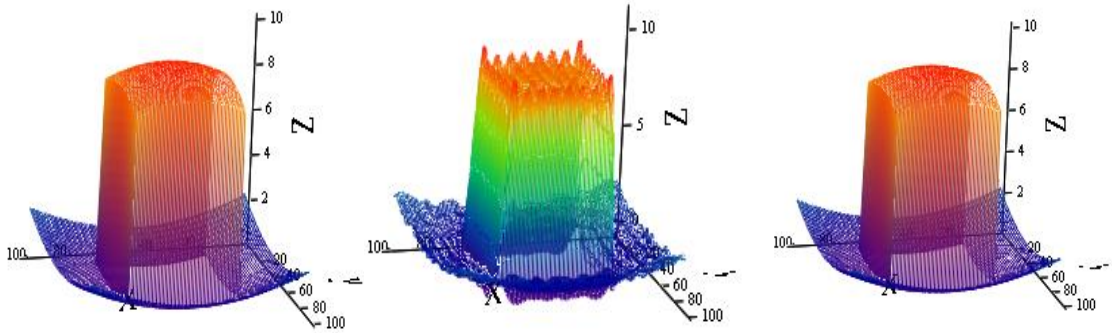


Рисунок 4.4 – Зображення поверхні заданої функції, та відтворених функцій з наявністю явища Гіббса та без наявності явища Гіббса

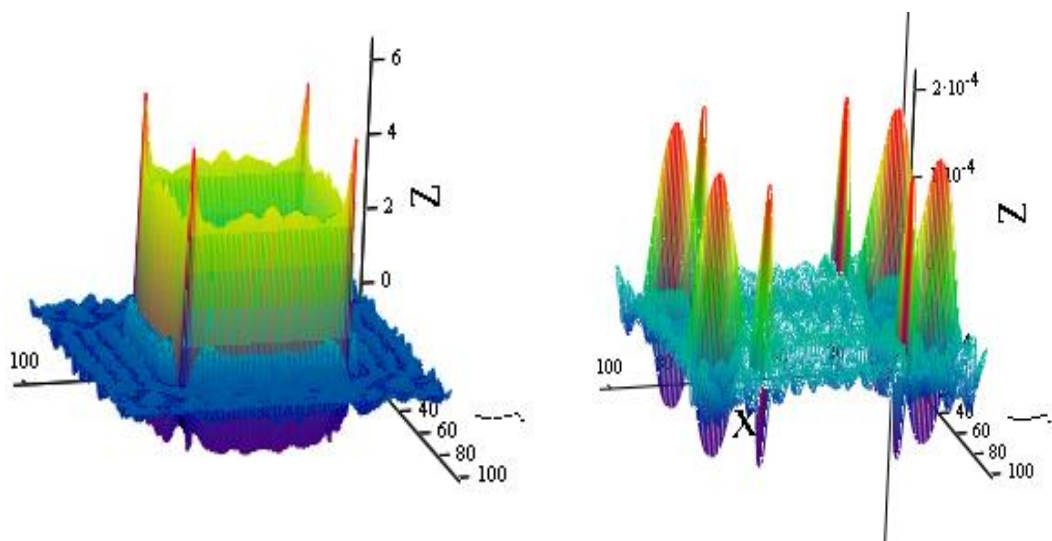


Рисунок 4.5 – Зображення похибок з наявністю явища Гіббса та без наявності явища Гіббса

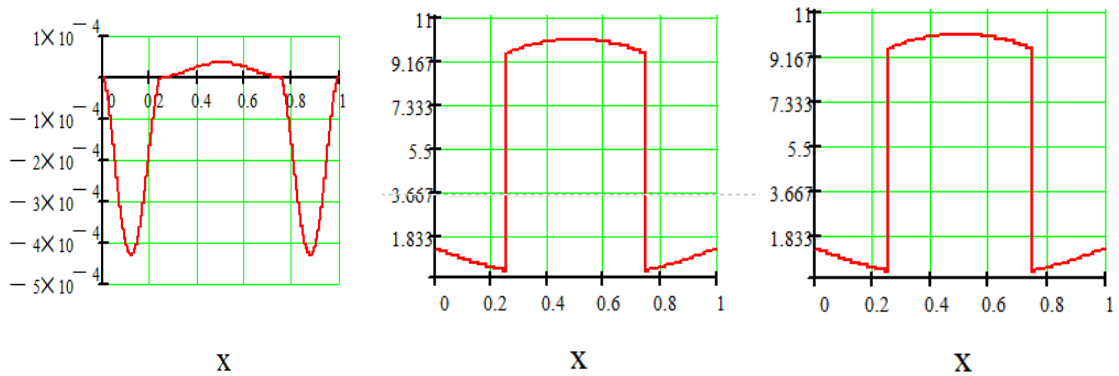


Рисунок 4.6 – Зображення функцій $\varphi(x,0.5)$, $f(x,0.5)$, $Sp(x,0.5)$

4.1.2 Лінією розриву є границя прямокутника

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) \geq 0; \\ f_2(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) < 0; \end{cases}$$

$$f_1(x, y) = e^{\left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \right] \cdot (-1)} \cdot 10,$$

$$f_2(x, y) = 5 \sin \left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \right],$$

$$w_1(x, y) = 0.5 \cdot [(x-0.25) \cdot (0.75-x) + (y-0.35) \cdot (0.65-y) - \\ - |(x-0.25) \cdot (0.75-x) - (y-0.35) \cdot (0.65-y)|].$$

Результати досліджень відновлення розривної функції методом скінченних сум Фур'є без сплайна (з наявністю явища Гіббса), та зі сплайном (без наявності явища Гіббса) при $x_{11} = 0,25$; $x_{12} = 0,75$; $x_{21} = 0$; $x_{22} = 1$; $y_{11} = 0,35$; $y_{12} = 0,65$; $y_{21} = 0$; $y_{22} = 1$; для $N = 16$; $NN = 5$; наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Результати досліджень при $N = 16$; $NN = 5$

N	NN	P_1	P_2	P_3	$Time$
З наявністю явища Гіббса					
16	5	0.668	0.724	0.29	0.446
Без наявності явища Гіббса					
16	5	$6.846 \cdot 10^{-5}$	$6.904 \cdot 10^{-5}$	$3.493 \cdot 10^{-5}$	53.3

Далі наведено графічні ілюстрації зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення заданої функції, відтвореної функції з наявністю явища Гіббса та відтвореної функції з без наявності явища Гіббса (рис. 4.7–4.12).

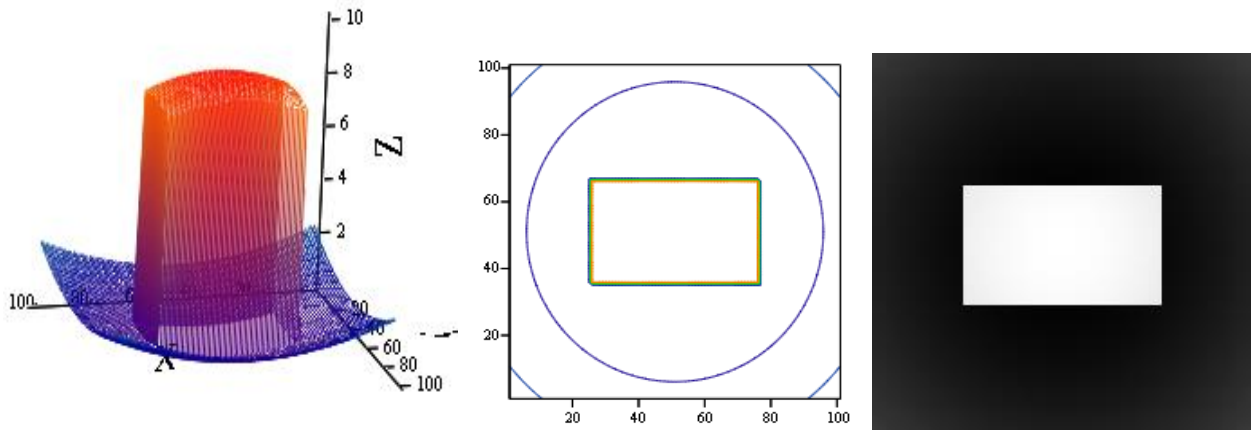


Рисунок 4.7 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення заданої функції

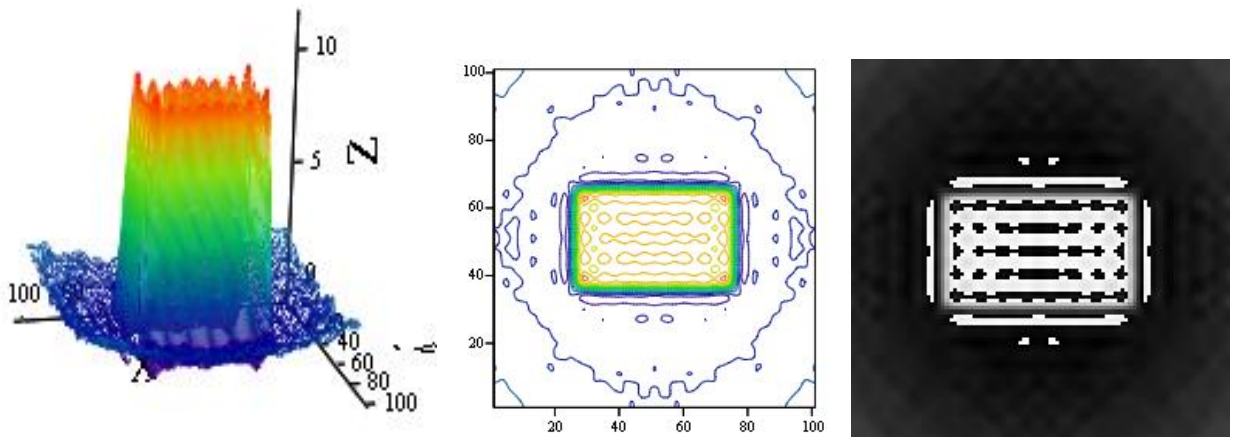


Рисунок 4.8 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення відтвореної функції з наявністю явища Гіббса

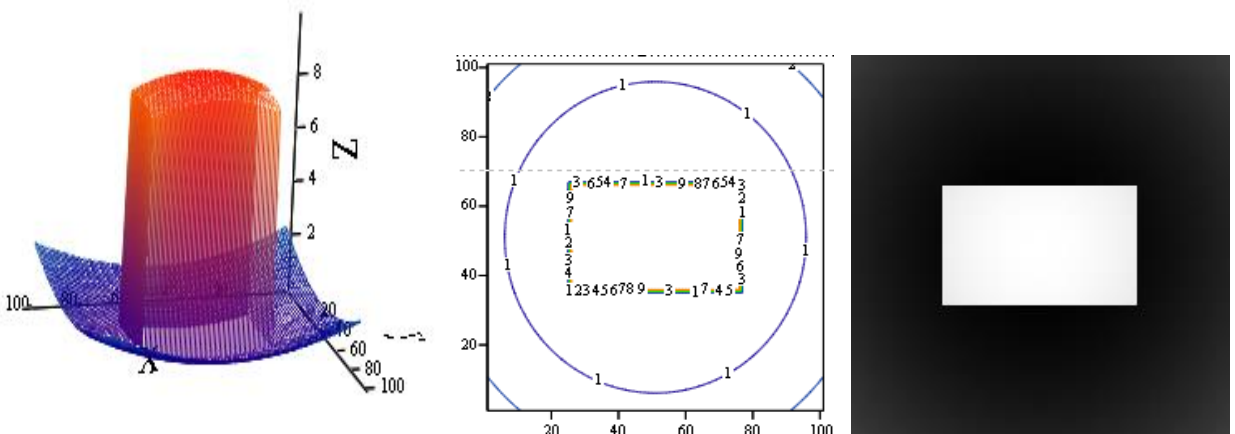


Рисунок 4.9 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення відтвореної функції без наявності явища Гіббса

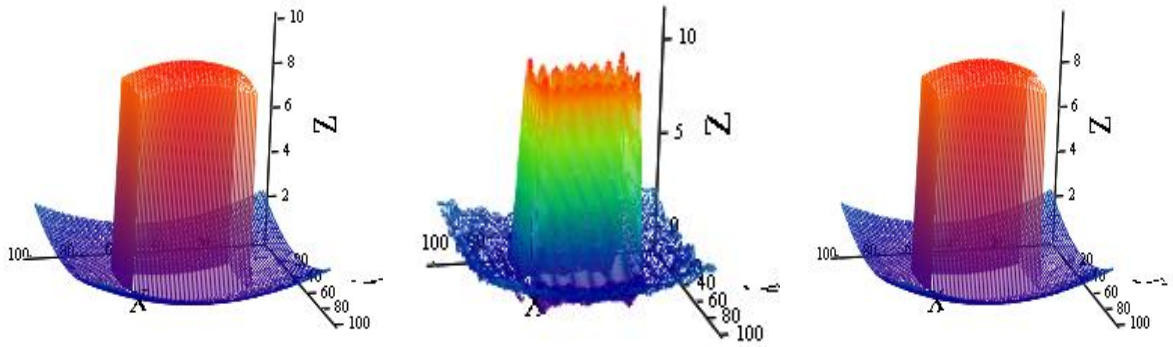


Рисунок 4.10 – Зображення поверхні заданої функції, та відтворених функцій з наявністю явища Гіббса та без наявності явища Гіббса

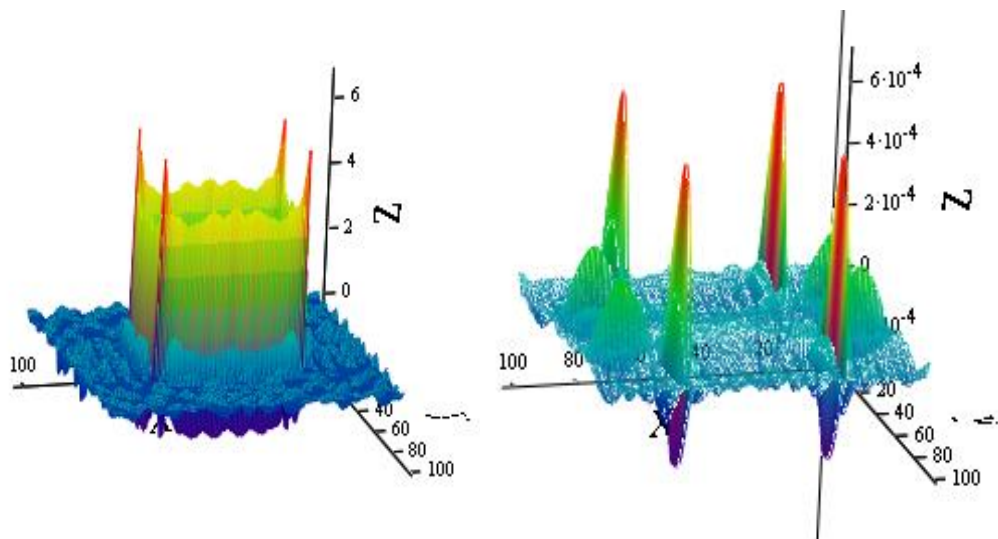


Рисунок 4.11 – Зображення похибок з наявністю явища Гіббса та без наявності явища Гіббса

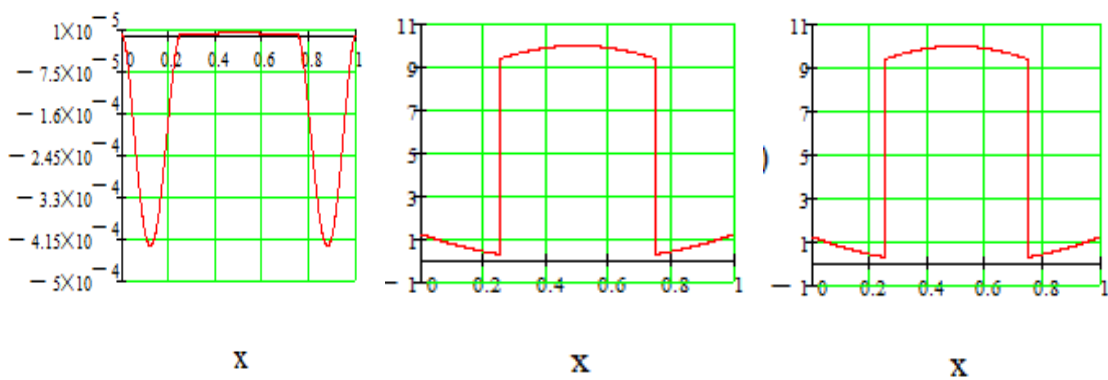


Рисунок 4.12 – Зображення функцій $\varphi(x,0.5)$, $f(x,0.5)$, $Sp(x,0.5)$

4.2 Обчислювальний експеримент відновлення розривної функції з двома лініями розриву

4.2.1 Лініями розриву є границі двох прямокутників з відновлюваною функцією типу 1

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) \geq 0; \\ f_2(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) < 0 \wedge w_2(x, y) \geq 0; \\ f_3(x, y), & \text{якщо } w_2(x, y) < 0 \wedge w_3(x, y) \geq 0; \end{cases}$$

$$f_1(x, y) = e^{\left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \right] \cdot (-1)} \cdot 10,$$

$$f_2(x, y) = 5 \cos(x + y - 1),$$

$$f_3(x, y) = \sin \left[(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \right],$$

$$w_1(x, y) = 0.5 \cdot [(x - 0.25) \cdot (0.75 - x) + (y - 0.35) \cdot (0.65 - y) - \\ - |(x - 0.25) \cdot (0.75 - x) - (y - 0.35) \cdot (0.65 - y)|].$$

$$w_2(x, y) = 0.5 \cdot [(x - 0.125) \cdot (0.875 - x) + (y - 0.2) \cdot (0.8 - y) - \\ - |(x - 0.125) \cdot (0.875 - x) - (y - 0.2) \cdot (0.8 - y)|].$$

$$w_3(x, y) = 0.5 \cdot [x \cdot (1 - x) + y \cdot (1 - y) - |x \cdot (1 - x) - y \cdot (1 - y)|].$$

Результати досліджень відновлення розривної функції методом скінченних сум Фур'є без сплайна (з наявністю явища Гіббса), та зі сплайном (без наявності явища Гіббса) при $x_{11} = 0,25$; $x_{12} = 0,75$; $x_{21} = 0,125$; $x_{22} = 0,875$; $x_{31} = 0$; $x_{32} = 1$; $y_{11} = 0,35$; $y_{12} = 0,65$; $y_{21} = 0,2$; $y_{22} = 0,8$; $y_{31} = 0$; $y_{32} = 1$; для $N = 16$; $NN = 5$; наведені в таблиці 4.3.

Далі наведено графічні ілюстрації зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення заданої функції, відтвореної функції з наявністю явища Гіббса та відтвореної функції з без наявності явища Гіббса (рис. 4.13 – 4.18).

Таблиця 4.3 – Результати досліджень при $N = 16; NN = 5$

N	NN	P_1	P_2	P_3	$Time$
З наявністю явища Гіббса					
16	5	0.414	0.648	0.342	1.13
Без наявності явища Гіббса					
16	5	$1.455 \cdot 10^{-6}$	$1.441 \cdot 10^{-6}$	$5.63 \cdot 10^{-7}$	21.9

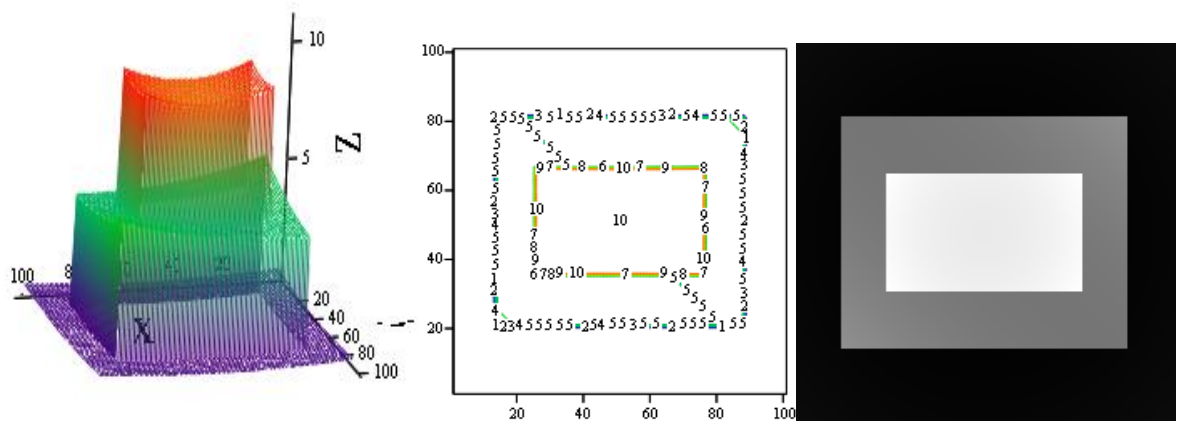


Рисунок 4.13 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення заданої функції

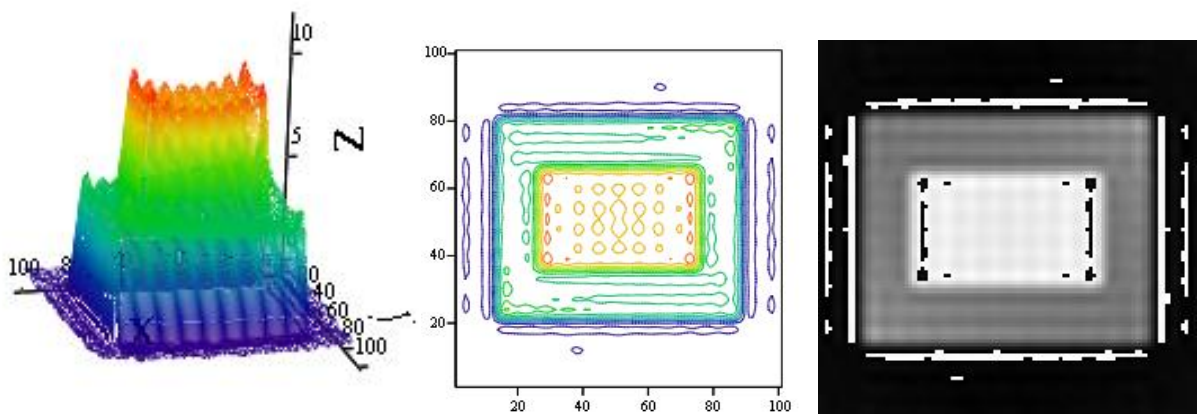


Рисунок 4.14 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення відтвореної функції з наявністю явища Гіббса

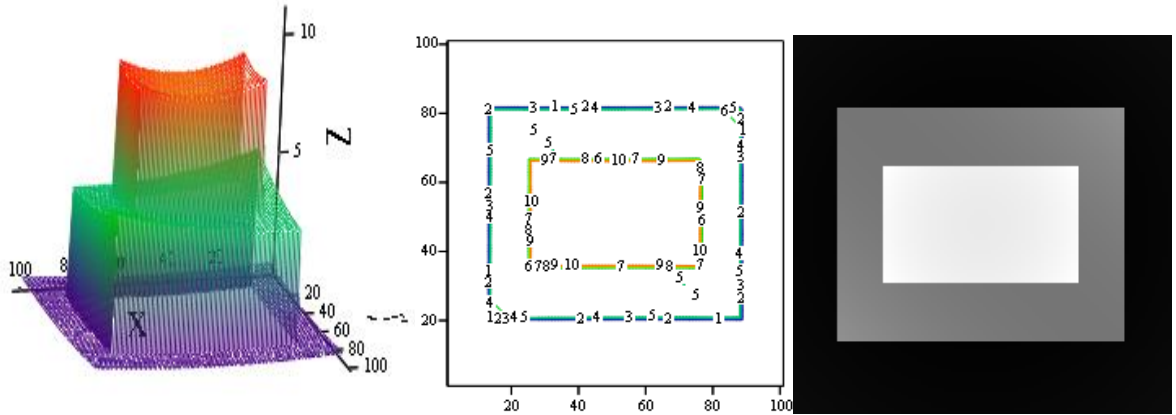


Рисунок 4.15 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення відтвореної функції без наявності явища Гіббса

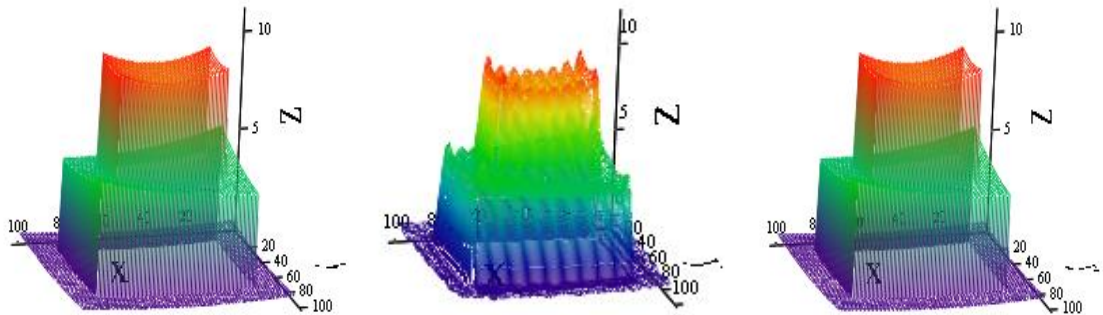


Рисунок 4.10 – Зображення поверхні заданої функції, та відтворених функцій з наявністю явища Гіббса та без наявності явища Гіббса

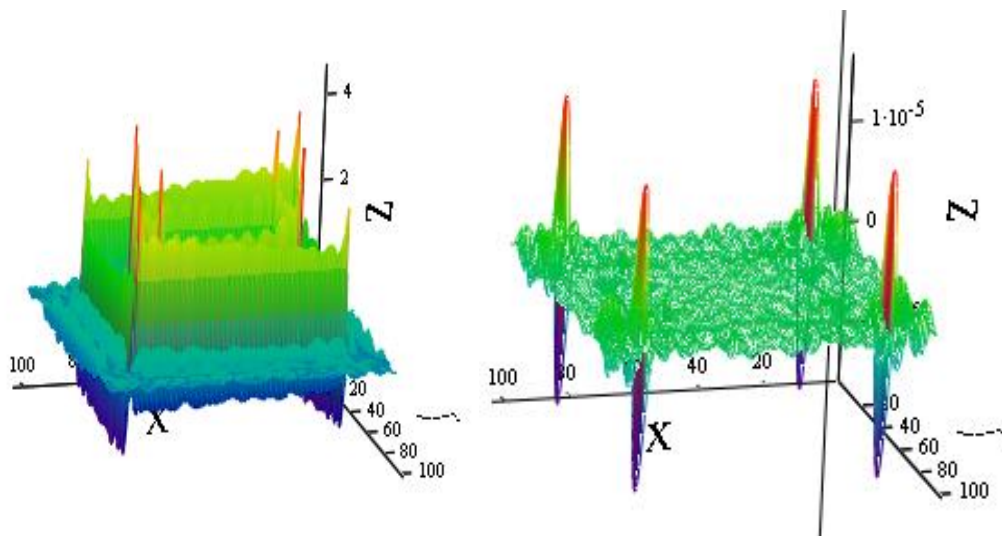


Рисунок 4.17 – Зображення похибок з наявністю явища Гіббса та без наявності явища Гіббса

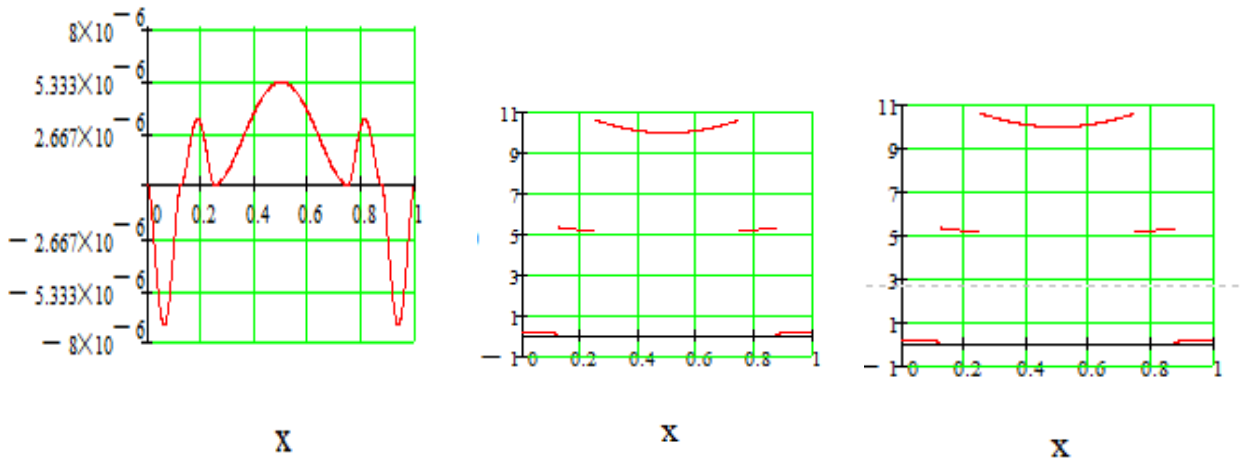


Рисунок 4.18 – Зображення функцій $\varphi(x, 0.5)$, $f(x, 0.5)$, $Sp(x, 0.5)$

4.2.2 Лініями розриву є границі двох прямокутників з відновлюваною функцією типу 2

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) \geq 0; \\ f_2(x, y), & \text{якщо } w_1(x, y) < 0 \wedge w_2(x, y) \geq 0; \\ f_3(x, y), & \text{якщо } w_2(x, y) < 0 \wedge w_3(x, y) \geq 0; \end{cases}$$

$$f_1(x, y) = e^{\left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \right] \cdot (-1)} \cdot 5,$$

$$f_2(x, y) = 10 \cos \left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \right],$$

$$w_{33}(x, y) = \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}$$

$$f_3(x, y) = 1 + 2 \cdot (w_{33}(x, y) - 0.5) + 3 \cdot (w_{33}(x, y) - 0.5)^2 + 4 \cdot (w_{33}(x, y) - 0.5)^3,$$

$$w_1(x, y) = 0.5 \cdot [(x-0.25) \cdot (0.75-x) + (y-0.35) \cdot (0.65-y) - |(x-0.25) \cdot (0.75-x) - (y-0.35) \cdot (0.65-y)|],$$

$$w_2(x, y) = 0.5 \cdot [(x-0.125) \cdot (0.875-x) + (y-0.2) \cdot (0.8-y) - |(x-0.125) \cdot (0.875-x) - (y-0.2) \cdot (0.8-y)|],$$

$$w_3(x, y) = 0.5 \cdot [x \cdot (1-x) + y \cdot (1-y) - |x \cdot (1-x) - y \cdot (1-y)|].$$

Результати досліджень відновлення розривної функції методом скінченних сум Фур'є без сплайна (з наявністю явища Гіббса), та зі сплайном

(без наявності явища Гіббса) при $x_{11} = 0,25$; $x_{12} = 0,75$; $x_{21} = 0,125$; $x_{22} = 0,875$; $x_{31} = 0$; $x_{32} = 1$; $y_{11} = 0,35$; $y_{12} = 0,65$; $y_{21} = 0,2$; $y_{22} = 0,8$; $y_{31} = 0$; $y_{32} = 1$; для $N = 16$; $NN = 5$; наведені в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4 – Результати досліджень при $N = 16$; $NN = 5$

N	NN	P_1	P_2	P_3	$Time$
З наявністю явища Гіббса					
16	5	0.63	0.928	0.489	1.12
Без наявності явища Гіббса					
16	5	$6.135 \cdot 10^{-6}$	$7.783 \cdot 10^{-6}$	$4.017 \cdot 10^{-6}$	22.6

Далі наведено графічні ілюстрації зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення заданої функції, відтвореної функції з наявністю явища Гіббса та відтвореної функції з без наявності явища Гіббса (рис. 4.19–4.24).

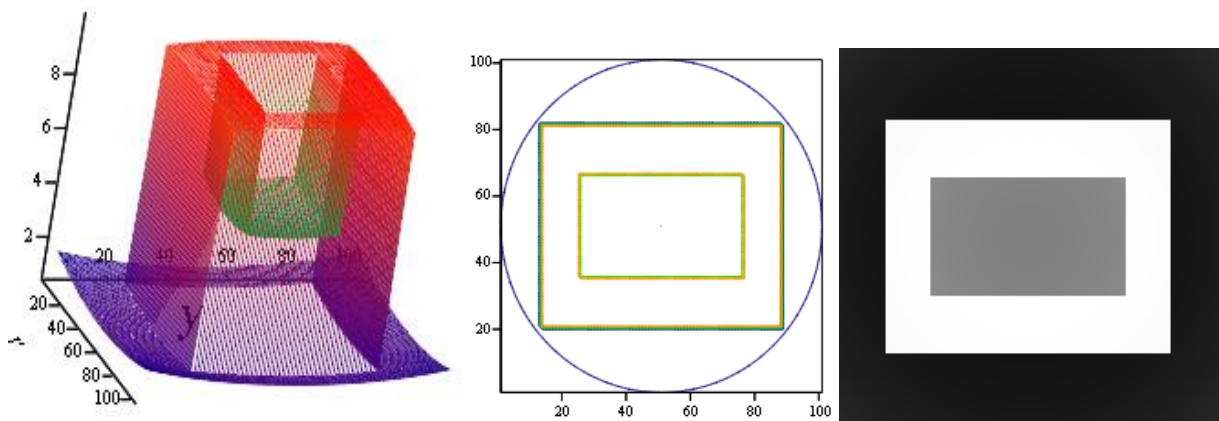


Рисунок 4.19 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення заданої функції

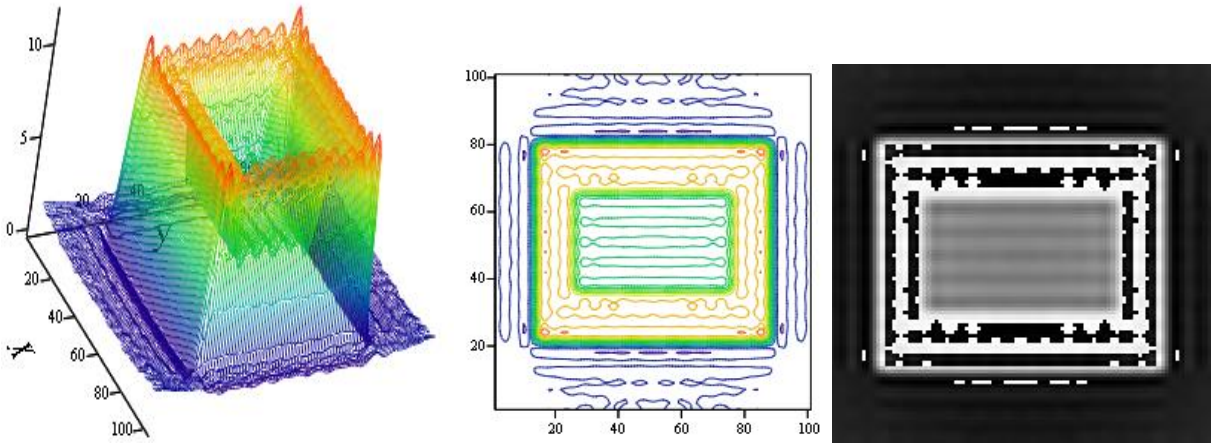


Рисунок 4.20 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення відтвореної функції з наявністю явища Гіббса

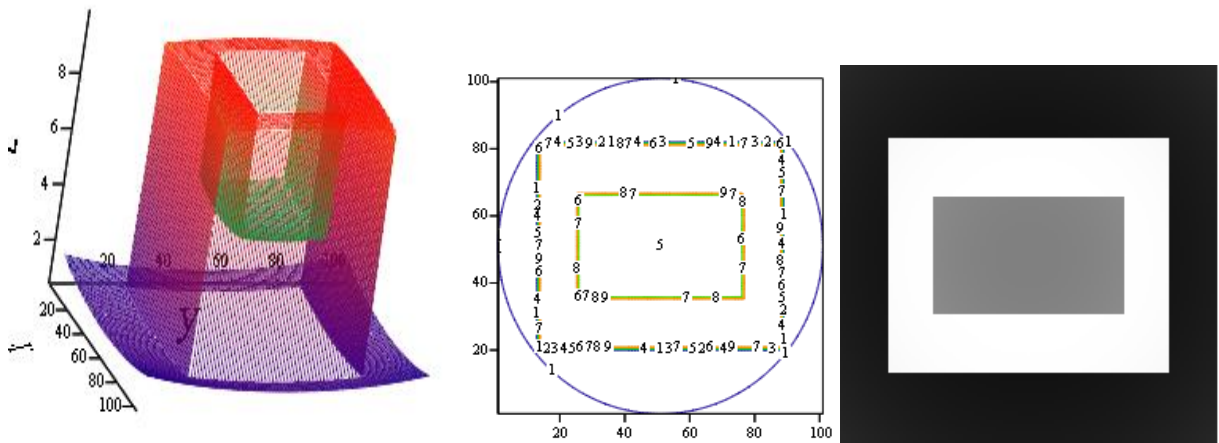


Рисунок 4.21 – Зображення поверхні, зображення ліній рівня та напівтонове зображення відтвореної функції без наявності явища Гіббса

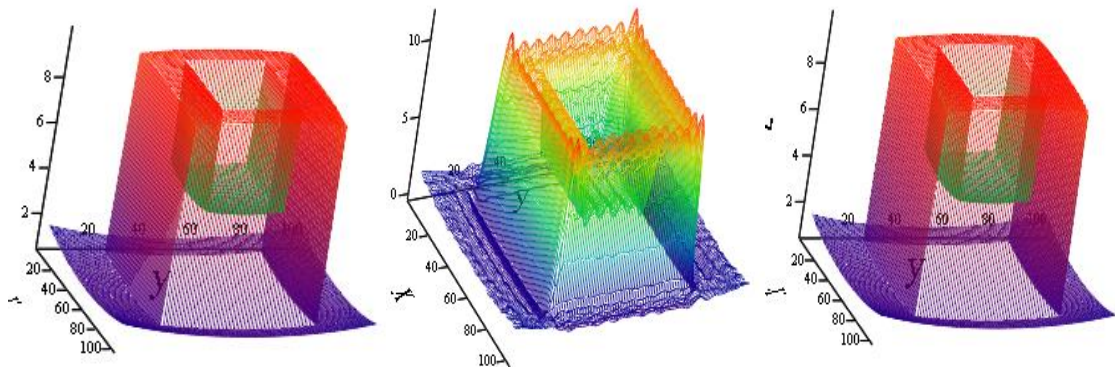


Рисунок 4.22 – Зображення поверхні заданої функції, та відтворених функцій з наявністю явища Гіббса та без наявності явища Гіббса

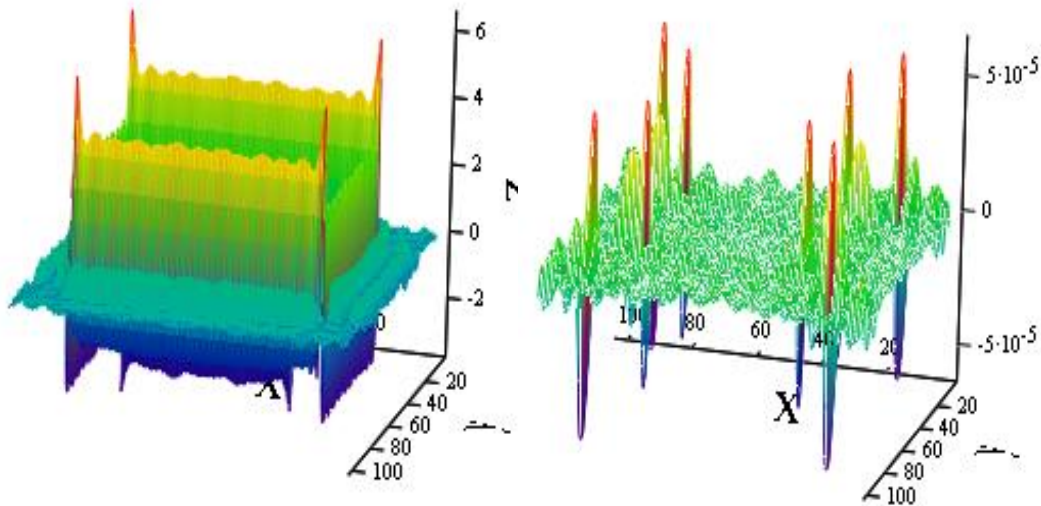


Рисунок 4.23 – Зображення похибок з наявністю явища Гіббса та без наявності явища Гіббса

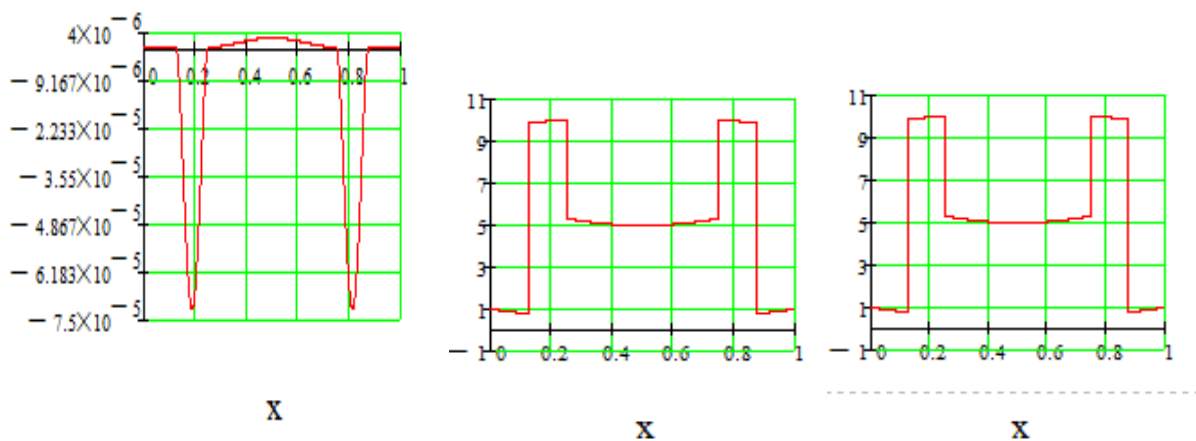


Рисунок 4.24 – Зображення функцій $\varphi(x,0.5)$, $f(x,0.5)$, $Sp(x,0.5)$

Висновки за розділом 4

У даному розділі наводяться кількісні характеристики похибки наближення функції, також наведено графічну ілюстрацію отриманих результатів заданої функції, її наближення без явища Гіббса, та наближення з явищем Гіббса. В результаті обчислювального експерименту можна зробити висновок що відновлення розривної функції методом скінченних сум Фур'є зі сплайном має високу точність наближення.

ВИСНОВКИ

Розглядаючи результати досліджень, об'єднуючи підходи до відновлення розривних функцій через використання розривних сплайнів та методу скінченних сум Фур'є, варто відзначити деякі ключові аспекти.

Використання розривних сплайнів та методів скінченних сум Фур'є приводить до усунення впливу явища Гіббса на відтворені функції. Це досягається завдяки введенню диференційовних функції, що представляє собою різницю між функцією, що наближуємо $f(x, y)$ та розривним сплайном. Такий підхід дозволяє отримувати більш точні результати реконструкції функцій та ефективно усуває вплив явища Гіббса. Також необхідно звернути увагу, що збільшення порядку скінченних сум Фур'є призводить до зменшення похибки реконструкції функції $f(x, y)$.

Програма, реалізована в системі Mathcad, не лише надає зручність для розв'язання задачі відновлення розривних функцій, але й дозволяє виконувати порівняльний аналіз точних та наближених результатів за допомогою графічних засобів.

Отримані результати свідчать про перспективи використання вказаних методів у подальших дослідженнях та розвитку технік реконструкції розривних функцій. Методи реконструкції, засновані на розривних сплайнах та скінченних сумах Фур'є, мають потенціал для вдосконалення та широкого застосування в різних галузях, від комп'ютерної томографії до розв'язання складних математичних моделей.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. The Method of Reconstructing Discontinuous Functions Using Projections Data and Finite Fourier Sums / Lytvyn O. M., Lytvyn O. G., Lytvyn O. O., Mezhujev V. I. *The IX International Scientific and Practical Conference "Information Control Systems & Technologies (ICST-2020)"*, Odessa, 2020. P. 661–673.
2. Пучкін М. О. Розробка алгоритму задачі відновлення розривних функцій двох змінних без впливу явища Гіббса. *27-й Міжнародний молодіжний форум «Радіoeлектроніка і молодь у XXI столітті»* : зб. матеріалів форуму. Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2023. С. 181–182.
3. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії. *Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харк. держ. політех. ун-ту*. 2000. С. 27–35.
4. Lytvyn O. M., Lytvyn O. G. Analysis of the results of a computational experiment to restore the discontinuous functions of two variables using projections. III. *Cybernetics and Systems Analysis*. Kyiv, 2022. Vol. 58, №3. P. 61–71.
5. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків: Основа, 2002. 544 с.
6. Литвин О. М., Литвин О.Г. Метод відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проєкцій і скінченних сум Фур'є. *7-а Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології ICT-2018»*. Харків, 2018. С. 120–122.
7. Gottlieb D., Shu C. W. On the Gibbs phenomenon and its resolution. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1997. P. 25.
8. Gottlieb S., Jung J., Kim S. A Review of David Gottlieb's Work on the Resolution of the Gibbs Phenomenon. *Communications in Computational Physics*. 2011. Vol. 9, №3. P. 497–519.