

А.Д. МЕНЯЙЛО, канд. техн. наук, И.В. САЛАЙ, А.М. ТИТАРЕНКО,
канд. техн. наук, П.И. ЧЕРЕДНИКОВ, канд. техн. наук

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗОННОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ПОТЕРЬ МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Исследование нелинейно-параметрических систем необходимо для решения широкого круга задач электродинамики, механики твердого тела, автоматического управления и регулирования и др. В частности, при рассмотрении нелинейных систем весьма важным является анализ их устойчивости, поскольку нередко требуется знать не конкретное решение задачи, а характер поведения решения при изменении начальных условий и аргумента. В данной статье для анализа дифференциального уравнения используется метод фазовой плоскости, который получил широкое распространение в радиотехнике и теории автоматического регулирования [1; 2].

Представляет несомненный интерес исследование устойчивости нелинейной параметрической системы, работающей на любой гармонике, а также сопоставление колебаний в слабо- и сильнонелинейных системах с точки зрения влияния степени нелинейности на устойчивость в зависимости от добротности резонансного контура системы.

Рассмотрим индуктивный параметрический генератор как реальную нелинейно-параметрическую систему, работа которой описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} sw_1 \frac{d}{dt} (B_I + B_{II}) + i_1 R_1 = U_m \sin(\omega t + \varphi); \\ sw_2 \frac{d}{dt} (B_I - B_{II}) + i_2 R_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt = 0; \\ i_1 w_1 + i_2 w_2 = l H_I; \\ i_1 w_1 - i_2 w_2 = l H_{II}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь s — площадь сечения сердечников; l — длина средней линии магнитного поля в сердечнике; i_1, i_2, w_1, w_2 — силы токов и количество витков контуров накачки и резонансного; R_1, R_2 — активные сопротивления в цепи накачки и резонансной; C — емкость в резонансном контуре; B_I, B_{II} — мгновенные значения индукции магнитного поля в сердечниках; U_m — амплитуда напряжения накачки; ω, φ — круговая

частота и фаза накачки; H_I, H_{II} — мгновенные значения напряженности магнитного поля в сердечниках.

Аппроксимируя нелинейную зависимость напряженности магнитного поля от индукции гиперболическим синусом $H = \alpha \operatorname{sh} \beta B$ и вводя обозначения

$$x = \beta(B_I + B_{II}), \quad y = \beta(B_I - B_{II}), \quad \tau = \omega t,$$

приводим систему (1) к виду

$$\begin{cases} \dot{x} + \gamma_1 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{y}{2} = U'_m \sin(\tau + \varphi); \\ \ddot{y} + \gamma_2 \operatorname{ch} \frac{x}{2} \operatorname{sh} \frac{y}{2} + \gamma \frac{d}{d\tau} \left(\operatorname{ch} \frac{x}{2} \operatorname{sh} \frac{y}{2} \right) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где \dot{x}, \ddot{y} — первая и вторая производные по безразмерному времени

$$\tau = \omega t; \quad \gamma_1 = \frac{\alpha \beta I R_1}{s w_1^2 \omega}; \quad U'_m = \frac{\beta U_m}{s w_1 \omega}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha \beta I}{C s w_2^2 \omega^2}; \quad \gamma = \frac{\alpha \beta I R_2}{s w_2^2 \omega}.$$

Решение системы (2) будем искать в виде

$$\begin{aligned} x &= 2B_H \sin \tau; \\ y &= 2a_n(\tau) \sin n\tau + 2b_n(\tau) \cos n\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

где $2B_H$ — безразмерная амплитуда сигнала накачки; $a_n(\tau), b_n(\tau)$ — медленноменяющиеся функции τ .

Подставляя (3) во второе уравнение системы (2), разложим левую часть этого уравнения в ряд Фурье — Бесселя. Формулы для $\operatorname{sh} \frac{y}{2}$,

$\operatorname{ch} \frac{x}{2}$ таковы [3]:

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} = I_0(B_H) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(B_H) \cos 2k\tau,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \frac{y}{2} &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k I_{2k+1}(a_n) \sin((2k+1)n\tau) \left[I_0(b_n) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k}(b_n) \cos 2k\tau \right] + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k+1}(b_n) \cos((2k+1)n\tau) \left[I_0(a_n) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_{2k}(a_n) \cos 2k\tau \right]. \end{aligned}$$

Здесь I_{2k}, I_{2k+1} — модифицированные функции Бесселя. Ограничиваясь этими функциями нулевого и первого порядков и используя формулы для производных от них, имеем:

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} \operatorname{sh} \frac{y}{2} = 2I_0(B_H) [I_1(a_n)I_0(b_n) \sin n\tau + I_0(a_n)I_1(b_n) \cos n\tau]; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\operatorname{ch} \frac{x}{2} \operatorname{sh} \frac{y}{2} \right) = 2I_0(B_H) \{ & [\dot{a}_n I_1(a_n)I_1(b_n) + \dot{b}_n I_0(a_n)I_0(b_n) - \\ & - I_0(a_n)I_0(b_n) \frac{\dot{b}_n}{b_n} + nI_1(a_n)I_0(b_n)] \cos n\tau + [\dot{b}_n I_1(a_n)I_1(b_n) + \\ & + \dot{a}_n I_0(a_n)I_0(b_n) - I_1(a_n)I_0(b_n) \frac{\dot{a}_n}{a_n} - nI_0(a_n)I_1(b_n)] \}. \end{aligned} \quad (5)$$

При нахождении \ddot{y} и в дальнейших выкладках учтем медленность изменения функций $a_n(\tau)$ и $b_n(\tau)$. Пренебрегая \ddot{a}_n и \ddot{b}_n , получаем для \ddot{y} :

$$\ddot{y} = (4\dot{a}_n n - 2b_n n^2) \cos n\tau + (-2a_n n^2 - 4b_n n) \sin n\tau. \quad (6)$$

Подставляя (4) — (6) во второе уравнение системы (2) и учитывая малость коэффициента γ , характеризующего потери в резонансном контуре нелинейной системы, по сравнению с γ_2 , записываем приближенные формулы: для косинусоидальной составляющей

$$4\dot{a}_n n - 2b_n n^2 - 2\gamma_2 I_0(B_H) I_0(a_n) I_1(b_n) + 2\gamma n I_0(B_H) I_1(a_n) I_0(b_n) = 0, \quad (7)$$

для синусоидальной

$$-2\gamma n I_0(B_H) I_0(a_n) I_1(b_n) - 4n \dot{b}_n - 2n^2 a_n + 2\gamma_2 I_0(B_H) I_0(b_n) I_1(a_n) = 0. \quad (8)$$

Из (7) и (8) находим:

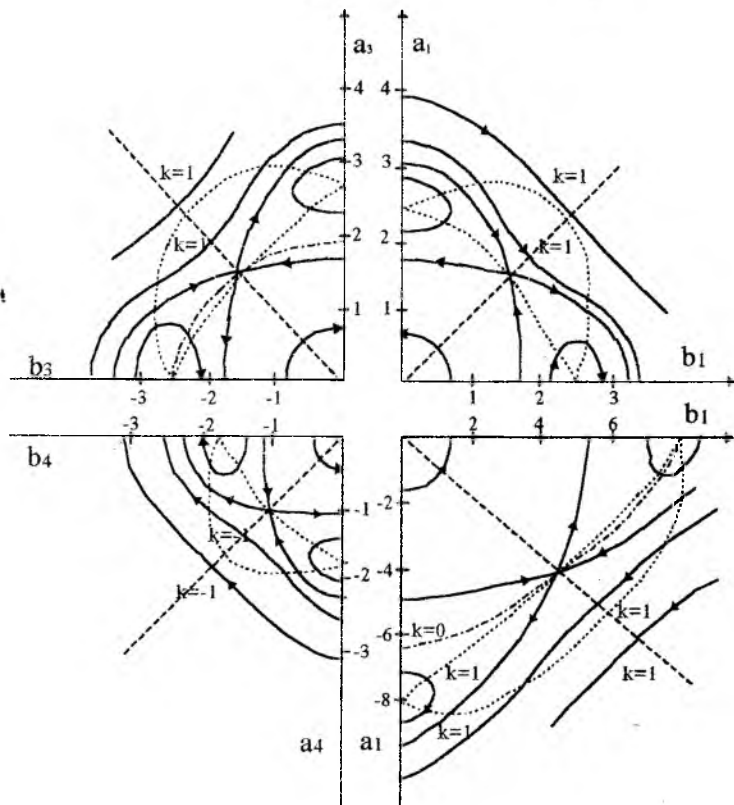
$$\dot{a}_n = \frac{n}{2} b_n - \frac{1}{2} \gamma I_0(B_H) I_0(b_n) I_1(a_n) - \frac{1}{2n} I_0(B_H) I_0(a_n) I_1(b_n); \quad (9)$$

$$\dot{b}_n = -\frac{n}{2} a_n - \frac{1}{2} \gamma I_0(B_H) I_0(a_n) I_1(b_n) + \frac{1}{2n} I_0(B_H) I_0(b_n) I_1(a_n). \quad (10)$$

С помощью формул (9) и (10) можно исследовать устойчивость нелинейной параметрической системы, работающей на любой гармонике.

Обозначим $k = \frac{\dot{a}_n}{b_n}$, тогда

$$ka_n + b_n = \frac{I_0(B_H)}{n^2} \left[I_1(a_n)I_0(b_n)(n\gamma + k\gamma^2) + I_0(a_n)I_1(b_n)(\gamma^2 - nk\gamma) \right], \quad (11)$$



Уравнение (11) решалось численными методами с применением ЭВМ. Величине k придавались различные числовые значения; в результате сформирована совокупность изоклин. С их помощью на

плоскости (b_n, a_n) построены фазовые портреты первых четырех гармоник для слабо- и сильнонелинейных параметрических систем с учетом и без учета затухания в резонансном контуре. На рисунке представлены фазовые портреты системы без потерь для первой гармоники (при $B_H=2,5$), третьей (при $B_H=5$), четвертой (при $B_H=6$), а также фазовый портрет сильнонелинейной параметрической системы без потерь для первой гармоники (при $B_H = \frac{37,5 \cdot 2,5}{12,12} \approx 7,735$). Из соображений

компактности изоклины построены лишь для значений $k = 0; \pm 1$. Для удобства сравнения все четыре случая отражены на одном рисунке. Из него видно, что в системе без активного сопротивления существует девять особых точек: пять из них — типа центра, а четыре — типа седла.

Таким образом:

1. Получены формулы, позволяющие исследовать устойчивость нелинейной параметрической системы, работающей на любой гармонике.

2. Для первых четырех гармоник сопоставлены фазовые портреты нелинейных параметрических систем с различной степенью нелинейности и показано, что в отсутствие затухания в резонансном контуре системы существует девять особых точек у каждой гармоники, из которых пять — типа центра и четыре — типа седла.

3. Результаты, изложенные в работе, могут быть использованы при разработке нелинейных параметрических систем, работающих на любой гармонике.

Список литературы: 1. Андреев В.С. Теория нелинейных электрических цепей. М.: Связь, 1972. 328 с. 2. Бабицкий В.И., Крупянин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. 320 с. 3. Зуев Н.Г., Титаренко А. М., Чередников П.И. О характеристиках параметрических систем, работающих на высших гармониках. Х., 1985. 15 с. Деп. в УкрНИИТИ 17.12.85, № 2711 - ук 85.

Харьковский государственный технический университет радиозлектроники

Поступила в редколлегию 17.06.97