УДК 681.323

В.М. ГУСЯТИН, А.Н. БУГРИЙ

РАСЧЕТ УГЛОВОЙ ПОГРЕШНОСТИ СПЕЦПРОЦЕССОРА В СИСТЕМЕ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Рассматривается порядок применения мажорантной оценки для расчета угловой погрешности проектируемого спецпроцессора (СП). Для конкретного примера получено аналитическое соотношение, варьируя параметры которого, с учетом заданного углового разрешения системы визуализации (СВ), можно минимизировать мажоранту и решать задачу оптимизации структуры СП в целом.

1. Актуальность и постановка задачи

При проектировании СВ тренажеров транспортных средств возникает необходимость расчета разрядности операционных устройств, таблиц вычисления функций и т.п., а также их оптимизации, исходя из заданной угловой погрешности геометрических преобразований. В статье [1] получены мажорантные оценки точности геометрических преобразований в спецпроцессорах растровой графики в виде соотношения:

$$\left| \delta\left|\overline{V}\right| + 0.5\delta\left(\frac{F\cdot\left|\overline{V}\right|}{G}\right)\right|_{МАКС} \le \nu, \qquad (1)$$

где ν – предельное значение угловой погрешности; $\overline{V}$ – вектор наблюдения; F – функция, связывающая параметры точки наблюдения и поверхности; G – скалярное произведение вектора $\overline{V}$ с единичным вектором $\overline{n}$ в точке пересечения проекционного луча с поверхностью визуализируемого объекта.

В соотношении (1) в неявном виде представлена связь между точностными характеристиками вычислений СП и угловым разрешением СВ, что не достаточно для инженерной практики. Поэтому актуальным является изложение порядка (методики) применения полученной мажорантной оценки для конкретных случаев проектирования СП.

2. Алгоритм вычислений и основные составляющие погрешности

Рассмотрим случай, изложенный в [2]. Упростим соотношение (1) для нашего случая. Для этого подробно распишем компоненты соотношения:

$$F = \overline{n}\cdot\overline{r}_0 - d = n_X\cdot X_0 + n_Y\cdot Y_0 + n_Z\cdot Z_0 - d,$$

где (X_0, Y_0, Z_0) – координаты центра проекции h.

В нашем случае предметная плоскость совпадает с ZX, следовательно, $d=0, n_X = n_Z = 0, n_Y = 1$. Тогда:

$$F = Y_0;\; G = \overline{n}\cdot\overline{V} = n_X\cdot V_X + n_Y\cdot V_Y + n_Z\cdot V_Z = V_Y;\; \left|\overline{V}\right| = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2},$$

где $V_X = C_{21}\cdot Z_Э + C_{22}\cdot X_Э + C_{23}; V_Y = C_{31}\cdot Z_Э + C_{32}\cdot X_Э + C_{33};$
$V_Z = C_{11}\cdot Z_Э + C_{12}\cdot X_Э + C_{13}$.

Таким образом, соотношение (1) будет выглядеть так:

$$\left| \delta\left|\overline{V}\right| + 0,5\delta\left(\frac{Y_0\cdot\sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}}{V_Y}\right)\right|_{МАКС} \le \nu.$$

Внесем величины V_Y и Y_0 под корень:

$$\left| \delta\left|\overline{V}\right| + 0,5\delta\left(\sqrt{\left(Y_0\frac{V_X}{V_Y}\right)^2 + Y_0^2 + \left(Y_0\frac{V_Z}{V_Y}\right)^2}\right)\right|_{МАКС} \le \nu. \qquad (2)$$

Определим слагаемые в левой части соотношения (2). Для этого компоненты V_X, V_Y, V_Z вектора $\overline{V}$ запишем с учетом погрешности:

$$V_{mO} = V_m + \Delta V_m, \qquad (3)$$

где $m = \{X, Y, Z\}$; V_{mo} – компонент вектора $\overline{V}$, вычисленный с ошибкой; ΔV_m – ошибка вычисления компонента вектора $\overline{V}$.

Определим $\delta\left|\overline{V}\right|_{МАКС}$:

$$\delta\left|\overline{V}\right|_{МАКС} = \frac{\left|\Delta\overline{V}\right|_{МАКС}}{\left|\overline{V}\right|_{МИН}} = \frac{\left|\sqrt{\Delta V_X^2 + \Delta V_Y^2 + \Delta V_Z^2}\right|_{МАКС}}{\left|\sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}\right|_{МИН}}.$$

Наихудшим случаем, при котором абсолютная погрешность вычисления будет максимальной, является случай, когда вектор $\Delta\overline{V}$ расположен под углом $45°$ к осям *X*, *Y*, *Z*. Поэтому можно записать:

$$\left|\Delta\overline{V}\right|_{МАКС} = \left|\sqrt{\Delta V_X^2 + \Delta V_Y^2 + \Delta V_Z^2}\right|_{МАКС} = \sqrt{3\cdot 0,707\cdot\Delta V_m^2} = 1,41\cdot\Delta V_m.$$

Величина $\left|\overline{V}\right|$ будет минимальной тогда, когда вектор $\overline{V}$ направлен перпендикулярно к экрану. Данная величина в СП является константой и обозначается U_1 [2]. Учитывая это, выражение для $\delta\left|\overline{V}\right|_{МАКС}$ примет вид

$$\delta\left|\overline{V}\right|_{МАКС} = \frac{1,41\cdot\Delta V_m}{U_1}.$$

Погрешность ΔV_m возникает в процессе выполнения операции накапливания в сумматорах с фиксированной точкой [4] вследствие ограничения дробной части L разрядами. Если полагать, что вдоль строки число пикселов равно N_Z, а число строк N_X, то величина предельной абсолютной погрешности компонент вектора $\overline{V}$ в пикселах равна:

$$\Delta V_m = \left(\frac{N_Z + N_X}{2}\right) \cdot 2^{-L}.$$

Окончательно для $\delta\left|\overline{V}\right|_{МАКС}$ запишем:

$$\delta\left|\overline{V}\right|_{МАКС} = \frac{1{,}41}{U_1}\left(\frac{N_Z + N_X}{2}\right) \cdot 2^{-L}. \tag{4}$$

Рассмотрим в (2) второе слагаемое. Определим для $Y_0 \dfrac{V_Z}{V_Y}$ и $Y_0 \dfrac{V_X}{V_Y}$ относительные погрешности, которые возникают при выполнении операций умножения и деления с учетом погрешностей операндов. Обозначим эти погрешности δ_Z и δ_X соответственно. В нашем случае вычисление этих компонент выполняется с использованием логарифмической системы счисления по следующим формулам [4]:

$$Y_0 \cdot \frac{V_Z}{V_Y} = 2^{P(Y_O)+P(V_Z)-P(V_Y)} \cdot 2^{M(V_Z)-M(V_Y)},$$

$$Y_0 \cdot \frac{V_X}{V_Y} = 2^{P(Y_O)+P(V_X)-P(V_Y)} \cdot 2^{M(V_X)-M(V_Y)}, \tag{5}$$

где P и M соответственно целая часть (порядок) и мантисса логарифма по основанию 2 величин Y_0, V_X, V_Y, V_Z.

Поскольку множитель Y_0 остается постоянным в течение обработки одного кадра изображения, то в соотношениях (5) явно показан только его порядок $P(Y_0)$, а мантисса введена в коэффициенты $C_{i,j}$ величин V_X, V_Z, что позволяет операцию умножения на Y_0 заменить операцией сложения и сдвига. Так как вычисление порядков выполняется с необходимой полной разрядностью (т.е. без ошибки), то в дальнейшем вся ошибка остается сосредоточенной в вычислении мантисс логарифмов и соответствующих им показательных функций.

Обозначим: $Z_P = 2^{P_Z} \cdot 2^{M_Z}$, $X_P = 2^{P_X} \cdot 2^{M_X}$, где

$$P_Z = P(Y_O) + P(V_Z) - P(V_Y); \quad M_Z = M(V_Z) - M(V_Y);$$

$$P_X = P(Y_O) + P(V_X) - P(V_Y); \quad M_X = M(V_X) - M(V_Y);.$$

Тогда абсолютную погрешность Z_P и X_P запишем так:

$$\Delta Z = Z_{PO} - Z_p, \quad \Delta X = X_{PO} - X_p,$$

где Z_{PO}, X_{PO} – величины Z_P, X_P с ошибкой;

$$Z_{PO} = 2^{P_{ZO}} \cdot (2^{M_{ZO}} + e_{1Z}); \quad X_{PO} = 2^{P_{XO}} \cdot (2^{M_{XO}} + e_{1X}).$$

В приведенных соотношениях величины e_{1Z} и e_{1X} есть абсолютные погрешности вычисления показательных функций в табличном интервале [3]. Тогда

$$\Delta Z = 2^{P_Z} \cdot 2^{M_Z} \cdot (2^{P_{ZO}-P_Z} \cdot 2^{M_{ZO}-M_Z} - 1 + 2^{P_{ZO}-P_Z} \cdot e_{1Z} \cdot \frac{1}{2^{M_Z}}),$$

$$\Delta X = 2^{P_X} \cdot 2^{M_X} \cdot (2^{P_{XO}-P_X} \cdot 2^{M_{XO}-M_X} - 1 + 2^{P_{XO}-P_X} \cdot e_{1X} \cdot \frac{1}{2^{M_X}}).$$

Для рассматриваемой ситуации разность порядков $P_{ZO} - P_Z = P_{XO} - P_X = 0$. Поясним это. Наличие ошибки может привести к тому, что в дробной части степени $M_{(Z,X)O}$ появится целая часть, равная не более единицы. Однако при вычитании $M_{(Z,X)O} - M_{(Z,X)}$, вследствие малости ошибки, единица будет исключена. Таким образом, ошибка находится в дробной части M, а целые части степени равны.

Учтем также, что отношения $\dfrac{e_{1Z}}{2^{M_Z}} = \delta_{1Z}$, $\dfrac{e_{1X}}{2^{M_X}} = \delta_{1X}$ – относительные погрешности таблицы показательной функции. Принимаем

$$\delta_1 = макс(\delta_{1Z}, \delta_{1X}),$$

и тогда

$$\delta_Z = 2^{M_{ZO}-M_Z} - 1 + \delta_1, \quad \delta_X = 2^{M_{XO}-M_X} - 1 + \delta_1. \tag{6}$$

Введем обозначение $M_{ZO} = M_Z + E_Z$, $M_{XO} = M_X + E_X$, где E_Z, E_X – суммарная абсолютная погрешность вычислений степени показательной функции. Найдем слагаемые E_Z и E_X, учитывая, что

$$M_{ZO} = M(V_Z)_O - M(V_Y)_O = \left[M(V_Z) + e_Z\right] - \left[M(V_Y) + e_Y\right],$$

$$M_{XO} = M(V_X)_O - M(V_Y)_O = \left[M(V_X) + e_X\right] - \left[M(V_Y) + e_Y\right],$$

где e_X, e_Y, e_Z – абсолютные ошибки логарифмирования V_X, V_Y и V_Z.

Для наихудшего случая имеем

$$M_{ZO} = M_Z + (e_Z + e_Y), \quad M_{XO} = M_X + (e_X + e_Y),$$

т.е. $E_Z = e_Z + e_Y$, $E_X = e_X + e_Y$.

С учетом приведенных соотношений сведем (6) к виду:

$$\delta_Z = 2^{e_Z + e_Y} - 1 + \delta_1, \quad \delta_X = 2^{e_X + e_Y} - 1 + \delta_1. \tag{7}$$

Поскольку $(e_Z + e_Y) << 1$ и $(e_Y + e_Y) << 1$, то перепишем (7) в следующем виде:

$$\delta_Z = 0.7(e_Z + e_Y) + \delta_1, \quad \delta_X = 0.7(e_X + e_Y) + \delta_1.$$

С учетом того, что берутся максимальные погрешности, получим:

$$\delta_{(Z,X)} = 1.4 \cdot макс(e_m) + \delta_1. \qquad (8)$$

Пусть $e_m = e_2$. Рассмотрим более подробно. Погрешность e_2 возникает в процессе выполнения операции логарифмирования таблично – алгоритмическим методом [3] компонент вектора $\overline{V}$. Эту погрешность можно представить в виде составляющих:

$$e_2 = e_{21} + e_{22}. \qquad (9)$$

Данные погрешности являются следствием: e_{21} – неточного задания аргумента; e_{22} – табличного задания аргумента. Найдем e_{21}. Так как перед логарифмированием (3) приводится к форме с плавающей точкой, то преобразуем (3) к виду:

$$V_{mO} = 2^{P_m} \cdot [M(V_m) + \frac{\Delta V_m}{2^{P_m}}] = 2^{P_m} \cdot M(V_m)_O,$$

где P_m – порядок, $M(V_m)_O$ – мантисса с ошибкой. В спецпроцессоре [4] структурно заложено выполнение отношения $P_m \geq 0$. Для наихудшего случая, когда аргумент оказался в табличном интервале [3], т.е. $P_m = 0$, имеем:

$$M(V_m)_O = M(V_m) + \Delta V_m. \qquad (10)$$

Тогда с учетом (10), вследствие неточного задания аргумента $M(V_m)$ с исходной абсолютной погрешностью ΔV_m такой, что $\Delta V_m << M(V_m)$, для дифференцируемой функции имеем $|\Delta Y| = |f'(x)| \cdot \Delta x$ или для предельных погрешностей:

$$\Delta Y = f'(x) \cdot \Delta x = (\log_2 x)' \cdot \Delta x = \left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)' \cdot \Delta x = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \Delta x.$$

Табличный интервал [3] задан отношением $1 \leq x \leq 2$. Для наихудшего случая, при $x = 1$ имеем:

$$\Delta Y = \frac{1}{\ln 2} \cdot \Delta x = 1.44 \cdot \Delta x.$$

С учетом принятых обозначений (3), (9) имеем:

$$e_{21} = 1.44 \cdot \Delta V_m.$$

Погрешность e_{22} является следствием имеющейся при табличном задании функции допустимой приведенной относительной погрешности δ_2, где $\delta_2 = \frac{\Delta Y}{Y}$, $\Delta Y_{МАКС} = \delta_2 \cdot Y_{МАКС}$.

С учетом принятых обозначений имеем:

$$e_{22} = \delta_2 \cdot Y_{МАКС} = \delta_2 \text{ при } Y_{МАКС} = 1 \text{ в таблице.}$$

Окончательно

$$e_2 = 1.44 \cdot \Delta V_m + \delta_2. \qquad (11)$$

Подставив (11) в (8), получим:

$$\delta_{(Z,X)} = 1.4 \cdot (1.44 \cdot \Delta V_m + \delta_2) + \delta_1 \qquad (12)$$

Возьмем наихудший случай, когда проекции вектора V_X, V_Y будут максимальными и равны V_M. Тогда, с учетом погрешности извлечения корня [5], второе слагаемое в (2) упрощается до следующего вида:

$$0{,}25\delta\left(2 \cdot \left(Y_0 \frac{V_M}{V_Y}\right)^2 + Y_0^2\right).$$

Далее с учетом того, что величина Y_O представляет собой константу, а также с учетом степени [5] и соотношения (12) имеем:

$$0{,}25\delta\left(2 \cdot \left(Y_0 \frac{V_M}{V_Y}\right)^2 + Y_0^2\right) = \delta\left(\frac{V_M}{V_Y}\right) = макс(\delta_Z, \delta_X). \qquad (13)$$

Подставив (4) и (13) в (2), получим:

Разрешение экрана N_Z x N_X	L	δ_1	δ_2	Расчетная угловая погрешность	Предельная угловая погрешность ν
640x480	24	2^{-15}	2^{-16}	0,000119	2^{-13}=0,000122
	25	2^{-15}	2^{-15}	0,000107	
	26	2^{-14}	2^{-15}	0,000121	
	27	2^{-14}	2^{-15}	0,000112	
800x600	24	2^{-16}	2^{-16}	0,000121	
	25	2^{-15}	2^{-15}	0,000115	
	26	2^{-14}	2^{-15}	0,000125	
	27	2^{-14}	2^{-15}	0,000114	
1024x768	24	2^{-17}	2^{-17}	0,000126	
	25	2^{-15}	2^{-16}	0,000106	
	26	2^{-15}	2^{-15}	0,000100	
	27	2^{-14}	2^{-15}	0,000117	
1280x1024	25	2^{-15}	2^{-16}	0,000121	
	26	2^{-15}	2^{-15}	0,000108	
	27	2^{-14}	2^{-15}	0,000121	
	28	2^{-14}	2^{-15}	0,000112	

$$\left(\frac{0{,}707}{U_1}+1\right)\cdot\left(N_Z+N_X\right)\cdot 2^{-L}+1{,}4\delta_2+\delta_1\le\nu\,. \qquad (14)$$

Соотношение (14) позволяет выбрать разрядность сумматоров (L) и относительные погрешности таблиц (δ_1,δ_2) по заданной угловой погрешности и разрешению экрана.

В таблице приведены расчетные значения угловой погрешности при различных параметрах $(N_Z,N_X,L,\delta_1 \text{ и } \delta_2)$ СП и $U_1=1000$ пикселов. В последнем столбце для сравнения приведено значение предельной угловой погрешности $\nu=2^{-13}$. Сравнение погрешностей позволяет оценить правильность выбора параметров СП.

3. Результаты

1. Изложен порядок применения полученной мажорантной оценки [1] для конкретных случаев проектирования СП.
2. Получено аналитическое соотношение (14), которое связывает между собой угловое разрешение и такие технические характеристики СП, как разрядность операционных устройств и таблиц вычисления функций, параметры системы отображения (экрана).
3. Варьируя параметры в (14), можно минимизировать мажоранту и решать задачу оптимизации системы в целом.

Список литературы: 1. *Гусятин В.М* Оценка точности геометрических преобразований в спецпроцессоре растровой графики // Радиоэлектроника и информатика. 1998. №2 С.118-120. 2. *Гусятин В.М.* Алгоритм геометрических преобразований изображения в системах визуализации тренажеров транспортных средств //Авиационно-космическая техника и технология. Труды ХАИ им. Н.Е. Жуковского за 1997 г., с. 467-471. 3. *Гусятин В.М., Янковский А.А.* Быстрые алгоритмы вычисления логарифмической и показательной функций. Харьков. ХТУРЭ, 1995. 6 с. Деп. В ГНТБ Украины 23.05.95 №1241 – УК 95. 4. Патент №2020557. Россия. Устройство для вычисления быстрых геометрических преобразований / *Гусятин В.М., Горбачев В.А., Либероль Б.Д.* Опубликовано 30.09.94 // Открытия. Изобретения. Промышленные образцы. Товарные знаки, Бюл. №18, 1994. 5. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664с.

Поступила в редколлегию 17.08.2000

Гусятин Владимир Михайлович, канд. техн.наук, доцент кафедры электронных вычислительных машин ХТУРЭ. Научные интересы: теория и практика построения спецпроцессоров растровых графических систем реального времени. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-54, 66-61-22.

Бугрий Андрей Николаевич, студент кафедры ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: проектирование спецпроцессоров растровых графических систем реального времени. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-54.

УДК 519.7

З.В. ДУДАРЬ, О.В. КАЛИНИЧЕНКО ,
С.Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

О МЕТОДЕ И ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ИНТЕЛЛЕКТА. V

Рассматриваются проблемы построения эффективного математического аппарата для формализации и моделирования механизмов интеллекта.

5.1. Числовая интерпретация алгебры идей

В [1] был рассмотрен ряд интерпретаций алгебры идей. В этой статье описывается еще одна интерпретация алгебры идей, называемой нами *алгеброй чисел*. К алгебре чисел приходим, заменяя элементы канонической алгебры идей их номерами. В табл. 5.1 представлены в виде примера операции дизъюнкции идей (в данной интерпретации – натуральных чисел) при n=1, 2 и 3.

Таблица 5.1

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	3	3	5	5	7	7
2	2	3	2	3	6	7	6	7
3	3	3	3	3	7	7	7	7
4	4	5	6	7	4	5	6	7
5	5	5	7	7	5	5	7	7
6	6	7	6	6	6	7	6	7
7	7	7	7	7	7	7	7	7

Можно считать, что таблицей 5.1 заданы некоторые функции 2-, 4-, и 8-значной логики [2, с. 35]. При n=1 приходим к такой алгебре чисел, для которой роль дизъюнкции идей выполняет операция дизъюнкции двузначной логики. Однако при любом n>1 операция дизъюнкции идей в алгебре чисел не совпадает с дизъюнкцией 2^n-значной логики $x\vee y=\max(x,y)$, поскольку в алгебре чисел любой размерности n>1 $1\vee 2=3$, а в 2^n-значной логике $1\vee 2=2$. Имеется важное отличие семейства всех алгебр чисел от семейства всех многозначных логик с операцией дизъюнкции. Оно состоит в том, что алгебры чисел могут быть заданы лишь на множествах, состоящих из 2^n элементов. Многозначные же логики могут быть заданы на множестве с любым числом элементов k.

Опишем на языке алгебры конечных предикатов в форме неявного задания [3, с.68] операцию дизъюнкции идей для n-мерной алгебры чисел. С этой целью введем предикат

$$P_0(x,y,z)=x^0y^0z^0 \qquad (5.1)$$