В. В. ШЛЯХОВ, Ю. В. НАТАЛУХА

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДИКАТОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ СУММАМИ

Рассмотрим предикат $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданный на декартовом произведении $L_2[0, 1] \times L_2[0, 1] \times L_2(0, 1] \times L_2[0, 1]$, т. е. $x_1, x_2, x_3, x_4 \in L_2[0, 1]$. Поставим задачу определить условия, при которых

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = D\left(\int_0^1 x_1(t) K_1(t)\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 x_3(t) K_2(t)\,dt, \int_0^1 x_2(t) K_1(t)\,dt - \int_0^1 x_4(t) K_2(t)\,dt\right), \tag{1}$$

где D — предикат равенства, заданный на $R \times R$, а $K_1(t)$, $K_2(t) \in L_2[0, 1]$.

Отметим, что при фиксации x_3, x_4 или x_1, x_2 предикат T становится предикатом, заданным на декартовом квадрате $L_2[0, 1]$, и имеет вид

$$T(x, y) = D(f(x) + c, f(y) + d). \tag{2}$$

Здесь f — линейный непрерывный функционал на $L_2[0, 1]$, не равный нулю[1]; c, d — константы, в первом случае зависящие от x_3, x_4, а во втором — от x_1 и x_2. Назовем предикаты, которые имеют вид (2), линейно-сдвинутыми.

Теорема 1. *Для того чтобы $T(x, y)$ был линейно-сдвинутым предикатом, необходимо и достаточно, чтобы он обладал следующими свойствами:*

---

[1] В случае, если $f(x) = 0$, мы приходим к тривиальным предикатам, тождественно равным 1, когда $c = d$, и тождественно равным 0, когда $c \neq d$.

1) *для любых* $x_1, y_1, x_2, y_2 \in L_2[0, 1]$ *из равенств* $T(x_1, y_1) = T(x_2, y_1) = T(x_2, y_2) = 1$ *следует* $T(x_1, y_2) = 1$ *(квазитранзитивность)*;

2) *существует функция* $e(t) \in L_2[0, 1]$ *такая, что для любых* $x, y \in L_2[0, 1]$ *существуют единственные числа* $F_1(x)$, $F_2(y)$, *удовлетворяющие условию*

$$T(x, F_1(x)e) = T(F_2(y)e, y) = 1, \quad \int_0^1 e^2(t)\,dt \neq 0;$$

3) $F_1(x)$ *и* $F_2(y)$ *непрерывны в метрике* $L_2[0, 1]$;

4) *для любого* $x \in L_2[0, 1]$ *выполняется* $T(x, x + Ae) = 1$;

5) *для любых* $x_1, y_1, x_2, y_2 \in L_2[0, 1]$ *из равенств* $T(x_1, y_1) = 1$, $T(x_2, y_2) = 1$ *следует* $T(x_1 + x_2 + Ae, y_1 + y_2) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2 - Ae) = 1$. *Число* A *в условиях 4, 5 равно*

$$A = \frac{F_1(0) - F_2(0)}{2}.$$

Доказательство.

1. *Необходимость.* Пусть $T(x, y)$ — линейно-сдвинутый предикат, т. е.

$$T(x, y) = D(f(x) + c, \; f(y) + d),$$

где $f(x)$ — линейный непрерывный функционал в $L_2[0, 1]$, не равный нулю. Таким образом, $f(x) = \int_0^1 x(t)\,e(t)\,dt$ и $\int_0^1 e^2(t)dt \neq 0$. Докажем, что из подобного вида предиката вытекают свойства *1—5*. Первое свойство выясняется простой проверкой. Теперь для любых $x, y \in L_2[0, 1]$ в качестве $F_1(x)$ и $F_2(y)$ возьмем

$$F_1(x) = \frac{f(x) + c - d}{\int_0^1 e^2(t)\,dt}, \text{ а } F_2(y) = \frac{f(y) - c + d}{\int_0^1 e^2(t)\,dt}.$$

Тогда

$$f(F_1(x)e) + d = \int_0^1 \frac{f(x) - d + c}{\int_0^1 e^2(t)\,dt} e^2(t)\,dt + d = f(x) + c,$$

т. е. $T(x, F_1(x)e) = 1$, аналогично $f(F_2(y)e) + c = f(y) + d$ и $T(F_2(y)e, y) = 1$. Ясно, что эти числа единственны, поскольку они однозначно находятся из уравнений $f(F_1(x)e) + d = f(x) + c$ и $f(F_2(y)e) + c = f(y) + d$. Отметим, что $F_1(x)$, $F_2(y)$ — непрерывны в метрике $L_2[0, 1]$ и

$$A = \frac{F_1(0) - F_2(0)}{2} = \frac{c - d}{\int_0^1 e^2(t)\,dt}.$$

Тогда

$$f(x)+c=\int_0^1\left(x(t)+\frac{(c-d)\,e(t)}{\int_0^1 e^2(t)\,dt}\right)e(t)\,dt+d=f(x+Ae)+d.$$

Значит, при любом $x\in L_2[0,1]:T(x,x+Ae)=1$. Теперь допустим $T(x_1,y_1)=1$ и $T(x_2,y_2)=1$. В этом случае $f(x_1)+c=$ $=f(y_1)+d$, $f(x_2)+c=f(y_2)+d$. Если сложить эти равенства и учесть, что f — линейный функционал, то получим

$$f(x_1+x_2)+2c=f(y_1+y_2)+2d$$

или

$$\int_0^1(x_1(t)+x_2(t))\,e(t)\,dt+2c=\int_0^1(y_1(t)+y_2(t))\,e(t)\,dt+2d;$$

$$\int_0^1(x_1(t)+x_2(t))\,e(t)\,dt+2c-d=\int_0^1(y_1(t)+y_2(t))\,e(t)\,dt+d.$$

Но

$$\int_0^1(x_1(t)+x_2(t))\,e(t)\,dt+2c-d=\left(\int_0^1(x_1(t)+x_2(t))\,e(t)\times\right.$$

$$\left.\times\,dt+c\right)+\int_0^1\frac{(c-d)\,e^2(t)\,dt}{\int_0^1 e^2(t)\,dt}=\int_0^1(x_1(t)+x_2(t)+$$

$$+Ae(t))\,e(t)\,dt+c=\int_0^1(y_1(t)+y_2(t))\,e(t)\,dt+d.$$

Значит, $T(x_1+x_2+Ae,\ y_1+y_2)=1$. Аналогично доказывается вторая часть свойства *5*. Таким образом, необходимость доказана.

2. *Достаточность.*

Пусть x и x' — произвольные функции из $L_2[0,1]$. Тогда из *2* следует $T(x,F_1(x)e)=1$ и $T(x',F_1(x')e)=1$. С другой стороны, из *5* вытекает, что

$$T(x+x',\ F_1(x)e+F_1(x')e-Ae)=1$$

или

$$T(x+x',\ (F_1(x)+F_1(x')-A)e)=1.$$

Поскольку по условию *2* коэффициент при векторе $e(t)\in L_2[0,1]$ находится единственным образом, то получаем, что для любых x и x'

$$F_1(x+x')=F_1(x)+F_1(x')-A. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь функцию $f_1(x)=F_1(x)-A$. Тогда из (3) вытекает

$$f_1(x)+f_1(x')=F_1(x)+F_1(x')-2A=F_1(x+x')-A=f(x+x'). \tag{4}$$

Теперь заметим, что по условию $F_1(x)$ — непрерывная функция в $L_2[0, 1]$, значит, непрерывна и $f_1(x)$. Но из (4) следует, что $f_1(x)$ еще и аддитивна. Значит, по теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве можно заключить, что

$$f_1(x) = \int_0^1 x(t) K(t)\, dt,$$

где $K(t)$ — ядро линейного функционала $f_1(x)$.

Точно так же, используя второе равенство из свойства 5, можно показать, что $f_2(x) = F_2(x) + A$ тоже линейный непрерывный функционал в $L_2[0, 1]$. Таким образом,

$$F_1(x) = f_1(x) + A, \quad F_2(x) = f_2(x) - A. \tag{5}$$

Далее, из условия *4* вытекает: $T(e, e + Ae) = 1$ и $T(e - Ae, e - Ae + Ae) = 1$, тогда $F_1(e) = f_1(e) + A = 1 + A$ и $F_2(e) = f_2(e) - A = 1 - A$. Следовательно, $f_1(e) = f_2(e) = 1$ **(6)**. С другой стороны, для любого x: $T(x, x + Ae) = 1$, $T(x, F_1(x)e) = 1$, $T(F_2(x + Ae)e, x + Ae) = 1$. Учитывая, что $T(x, y)$ — квазитранзитивный предикат, получаем

$$T(F_2(x + Ae)e, F_1(x)e) = 1.$$

Но $T(-F_1(x)e - Ae, -F_1(x)e - Ae + Ae) = 1$ по условию *4* или $T(-F_1(x)e - Ae, -F_1(x)e) = 1$. Теперь, используя условие *5*, имеем $T(F_2(x + A)e - F_1(x)e, 0) = 1$. Значит, $F_2(x + Ae) - F_1(x) = F_2(0) = -A$. Отсюда

$$f_2(x + Ae) - A - f_1(x) - A = -A$$

$$\text{или } f_2(x) + Af_2(e) - A - f_1(x) = 0.$$

Учитывая (6), получаем

$$f_1(x) = f_2(x) = f(x). \tag{7}$$

В итоге

$$F_1(x) = f(x) + A, \quad F_2(x) = f(x) - A,$$

где $f(x) = \int_0^1 x(t) K(t)\, dt$.

Рассмотрим теперь такие x и $y \in L_2[0, 1]$, для которых $T(x, y) = 1$. Тогда $T(F_2(y)e, y) = 1$ и $T(F_2(y)e, F_1(F_2(y)e)e) = 1$, а из *1* имеем $T(x, F_1(F_2(y)e)e) = 1$. Следовательно,

$$F_1(x) = F_1(F_2(y)e), \; f(x) + A = F_2(y) f(e) +$$
$$+ A = f(y) - A + A = f(y)$$

и, если учесть, что

$$A = \frac{F_1(0) - F_2(0)}{2},$$

то получим

$$f(x) + \frac{F_1(0)}{2} = f(y) + \frac{F_2(0)}{2}.$$

Заметим, что всю последовательность равенств можно записать наоборот, т. е. все рассуждения провести в обратную сторону. Окончательно получаем, что $T(x, y)=1$ тогда и только тогда, когда $f(x)+\frac{F_1(0)}{2}=f(y)+\frac{F_2(0)}{2}$, а это и означает, что предикат $T(x, y)$ — линейно-сдвинутый:

$$T(x, y)=D\left(f(x)+\frac{F_1(0)}{2},\ f(y)+\frac{F_2(0)}{2}\right).$$

Таким образом, достаточность доказана. Значит, окончательно предикат, удовлетворяющий условиям теоремы, имеет вид

$$T(x, y)=D\left(\int_0^1 x(t)K(t)\,dt+\frac{F_1(0)}{2},\ \int_0^1 y(t)K(t)\,dt+\frac{F_2(0)}{2}\right),$$

где D — предикат равенства на $R\times R$.

Теорема доказана.

Лемма. *Если предикат* $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$, *заданный на декартовом произведении* $L_2[0, 1]\times L_2[0, 1]\times L_2[0, 1]\times L_2[0, 1]$, *при фиксированных* x_1, x_2 — *линейно-сдвинутый и при фиксированных* x_3, x_4 — *линейно-сдвинутый, тогда существует предикат* $F(a_1, a_2, a_3, a_4)$, *заданный на* $R\times R\times R\times R$ (R — *поле действительных чисел*), *такой, что*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4)=F\left(\int_0^1 x_1(t)K_1(t)\,dt,\right.$$

$$\left.\int_0^1 x_2(t)K_1(t)\,dt,\ \int_0^1 x_3(t)K_2(t)\,dt,\ \int_0^1 x_4(t)K_2(t)\,dt\right),$$

где $K_1(t)$ и $K_2(t)$ *принадлежат* $L_2[0, 1]$.

Доказательство. Введем понятие эквивалентности между элементами $L_2[0, 1]$ I, II, III и IV типов.

Определение. x_1 и $x_1'\in L_2[0, 1]$ *эквивалентны по I типу* (*обозначается* $x_1\overset{I}{\sim}x_1'$), *если*

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4)\equiv T(x_1', x_2, x_3, x_4)$$

для любого набора x_2, x_3, x_4.

Совершенно очевидно, что это отношение эквивалентности. Аналогично введем $x_2\overset{II}{\sim}x_2'$, $x_3\overset{III}{\sim}x_3'$ и $x_4\overset{IV}{\sim}x_4'$. Теперь ясно, что лемма фактически утверждает следующее: если предикат $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$ обладает указанными свойствами, тогда:

1) $x_1\overset{I}{\sim}x_1'$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 x_1(t)K_1(t)\,dt=\int_0^1 x_1'(t)K_1(t)\,dt;$$

2) $x_2 \overset{II}{\sim} x_2'$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 x_2(t) K_1(t)\,dt = \int_0^1 x_2'(t) K_1(t)\,dt;$$

3) $x_3 \overset{III}{\sim} x_3'$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 x_3(t) K_2(t)\,dt = \int_0^1 x_3'(t) K_2(t)\,dt;$$

4) $x_4 \overset{IV}{\sim} x_4'$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 x_4(t) K_2(t)\,dt = \int_0^1 x_4'(t) K_2(t)\,dt.$$

Докажем это. Поскольку предикат $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$ при фиксированных x_1, x_2 — линейно-сдвинутый и при фиксированных x_3, x_4 — линейно-сдвинутый, тогда

$$T_{x_3, x_4}(x_1, x_2) = D(f_1(x_1) + c_1, f_1(x_2) + d_1); \qquad (*)$$

$$T_{x_1, x_2}(x_3, x_4) = D(f_2(x_3) + c_2, f_2(x_4) + d_2), \qquad (**)$$

где через $T_{x_3, x_4}(x_1, x_2)$ и $T_{x_1, x_2}(x_3, x_4)$ обозначены предикаты, получающиеся из $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$ при фиксации x_3, x_4 и x_1, x_2 соответственно; f_1 — линейный непрерывный функционал в $L_2[0, 1]$ с ядром $K_1(t)$; f_2 — линейный непрерывный функционал в $L_2[0, 1]$ с ядром $K_2(t)$.

Предположим теперь $x_1 \overset{I}{\sim} x_1'$. Это означает, что для любого набора x_2, x_3, x_4 $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = T(x_1', x_2, x_3, x_4)$. Возьмем такой набор, для которого $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ (это можно сделать), тогда

$$T_{x_3, x_4}(x_1, x_2) = T_{x_3, x_4}(x_1', x_2) = 1.$$

Следовательно, из (*) вытекает, что

$$f_1(x_1) + c_1 = f_1(x_2) + d_1, \quad f_1(x_1') + c_1 = f_1(x_2) + d_1,$$

т. е. $f_1(x_1) = f_1(x_1')$, но это и означает, что

$$\int_0^1 x_1(t) K_1(t)\,dt = \int_0^1 x_1'(t) K_1(t)\,dt.$$

Теперь наоборот. Пусть выполняется последнее равенство и для какого-то набора x_2, x_3, x_4: $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$. Тогда $T_{x_3, x_4}(x_1, x_2) = 1$, т. е. $f_1(x_1) + c_1 = f_1(x_2) + d_1$. Но $f_1(x_1) = f_1(x_1')$, следовательно, $f_1(x_1') + c_1 = f_1(x_2) + d_1$ или $T_{x_3, x_4}(x_1', x_2) = 1$ и $T(x_1', x_2, x_3, x_4) = 1$. А это и будет обозначать, что $x_1 \overset{I}{\sim} x_1'$. Значит, первое свойство доказано. Аналогично доказываются и остальные. Лемма доказана.

Теорема 2. *Предикат* $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *представим в виде* (
тогда и только тогда, когда при фиксации x_1, x_2 *и* x_3, x_4 (
обладает свойствами 1—6 (из теоремы 1) и удовлетворяет е
следующим условиям:

A) из равенства $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ *следует* $T(x_1 + x, x_2 +$
$x_3 + x, x_4 + y) = 1$ *при любых постоянных на отрезке* [0,
функциях $x(t)$ и $y(t)$;

B) из равенств $T(x_1, x_2', x_3, x_4') = 1$ *и* $T(x_1', x_2', x_3', x_4') =$
следует $T(x_1, x_1', x_3, x_3') = 1$;

C) из равенства $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ *следует* $T(x_2, x_1, x$
$x_3) = 1$;

D) $T(x_1, x_1, x_2, r) = 1$.

Доказательство. *Достаточность.* Так как предикат $T(x$
$x_2, x_3, x_4)$ при фиксации x_1, x_2 и x_3, x_4 обладает свойства
1—6, то из леммы следует, что существует предикат $F(a_1, a$
$a_3, a_4)$, заданный на $R \times R \times R \times R$, такой, что

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = F\left(\int_0^1 x_1(t) K_1(t)\,dt, \int_0^1 x_2(t) K_1(t)\,dt, \int_0^1 x_3(t) K_2(t)\,dt, \int_0^1 x_4(t) K_2(t)\,dt\right).$$

Из свойства A следует, что для любых констант x и y

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$$

вытекает

$$T(x_1 + x, x_2 + y, x_3 + x, x_4 + y) = \\ = F(a_1 + x, a_2 + y, a_3 + x, a_4 + y) = 1.$$

Таким образом, получается, что если $F(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$
то $F(a_1 - a_2, a_3 - a_4, 0, 0) = 1$, и наоборот. Значит, существуе
предикат $F'(x, y) = F(x, y, 0, 0)$, причем из свойств $B - D$ сле
дует, что $F'(x, y)$ рефлексивный, симметричный, транзитивный

Докажем теперь, что если $F'(x, y_1) = F'(x, y_2) = 1$, то $y_1 = y$
Предположим, что это не так и $y_1 \neq y_2$, тогда

$$F(x, y_1, 0, 0) = F(x, y_2, 0, 0) = 1$$

$$\text{и } T(x_1, x_2, x_3, x_4) = T(x_1, x_2', x_3, x_4) = 1,$$

где

$$\int_0^1 x_1(t) K_1(t)\,dt = x; \quad \int_0^1 x_2(t) K_1(t)\,dt = y_1; \quad \int_0^1 x_2'(t) K_1(t)\,dt = y_2;$$

$$\int_0^1 x_3(t) K_2(t)\,dt = \int_0^1 x_4(t) K_2(t)\,dt = 0.$$

Считаем, что x_3, x_4 — фиксированы, тогда

$$T_{x_3, x_4}(x_1, x_2) = D\left(\int_0^1 x_1(t) K_1(t)\,dt + c, \int_0^1 x_2(t) K_1(t)\,dt + d\right) = 1;$$

$$T_{x_3, x_4}(x_1, x_2') = D\left(\int_0^1 x_1(t) K_1(t)\, dt + c,\ \int_0^1 x_2'(t) K_1(t)\, dt + d\right) = 1.$$

Отсюда

$$\int_0^1 x_2(t) K_1(t)\, dt = \int_0^1 x_2'(t) K_1(t) K_1(t)\, dt.$$

Но первый интеграл равен y_1, а второй — y_2, т. е. $y_1 = y_2$. Противоречие.

В итоге получаем, что предикат $F'(x, y) = D(x, y)$ — предикат равенства. Отсюда следует утверждение теоремы. Необходимость проверяется очевидно. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекция по функциональному анализу.— М.: Мир, 1979.—587 с. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.—392 с. 3. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1979,—272 с.

Поступила в редколлегию 31.10.81.