

ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЯ ВБЛИЗИ ОСТРИЯ КОНУСА С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

Введение

Одним из важных вопросов теории дифракции является определение поля вблизи нерегулярностей поверхности (границы) рассеивающего тела [1, 2]. Знание поведения электромагнитного поля в окрестности сингулярных точек, областей (вершины, острые кромки), например, при численных расчетах ускоряет сходимость используемого алгоритма и позволяет проверить правильность полученного решения при теоретическом исследовании задач рассеяния и дифракции волн на объектах с граничными сингулярностями [3]. Особенность поля вблизи нерегулярностей определяет сингулярность заряда и тока в их окрестности. Известно, что поле в окрестности ребра идеально проводящего экрана (на расстоянии значительно меньшем его кривизны и длины волны) имеет корневую особенность (условие Мейкснера) [1]. Результаты исследования поведения электромагнитного поля у вершины сплошного кругового идеально проводящего конуса приведены в [3]. Изучению поведения поля вблизи вершины сплошного эллиптического идеально проводящего конуса и его важного частного случая – плоского углового сектора посвящены работы [4-6]. Математический аппарат, используемый в [3-6] для исследования поставленных задач, базируется на привлечении метода разделения переменных в сферической [3] и сферо-конической [4-6] системах координат для решения уравнения Пуассона, поскольку для изучения поля вблизи сингулярностей достаточно рассмотреть статическую задачу.

Поле вблизи острия радиально проводящего конуса (модель конической поверхности, образованной набором изолированных друг от друга радиальных проводников) изучено в [7]. Однако эта модель не учитывает размеры проводников и их количество, хотя и является удачным приближением проволочной антенны.

Цель данной работы – исследование поведения поля вблизи острия идеально проводящего кругового конуса с периодическими щелями, прорезанными вдоль его образующих. Важными частными случаями этой структуры являются полупрозрачный конус (модель проволочной антенны с учетом размеров проводников и их количества), конус с одной продольной щелью и плоский сектор.

Постановка задачи. Метод исследования

Рассматриваемая коническая структура представляет собой полубесконечный идеально проводящий круговой конус Σ с периодически прорезанными вдоль образующих N щелями и углом раскрытия 2γ . Период структуры $l = 2\pi/N$ и ширина щелей d – угловые величины, равные величинам двугранных углов, образованных плоскостями, которые проведены через ось конуса и ребра соседних конических секторов (лент). Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом в вершине конуса ($r = 0$), в которой поверхность Σ определяется уравнением $\theta = \gamma$ (рис. 1). В некоторой области радиуса r , который меньше по сравнению с величинами всех представляющих интерес длин волн, поля ведут себя как статистические.

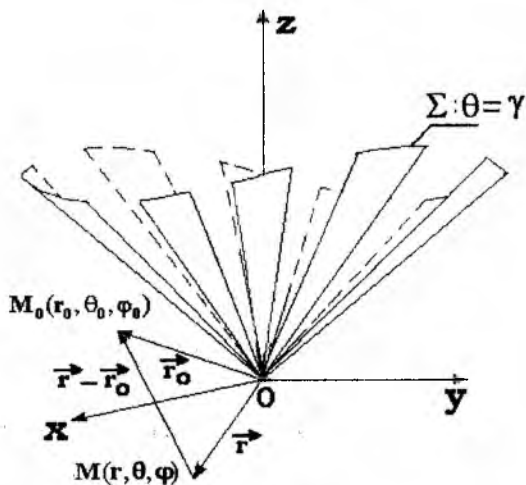


Рис. 1

Поэтому, следуя [3-7], составляющие электромагнитного поля (или потенциалы Дебая, через которые они выражаются) можно было бы представить в виде разложения в ряд по сферическим гармоникам. Но принимая во внимание тот факт, что поведение поля у вершины конуса определяется наименьшим из собственных значений соответствующей граничной электродинамической задачи [3-8], изучим спектр первой краевой задачи уравнения Гельмгольца относительно потенциала Дебая для конуса с продольными щелями. В соответствии с [8-10] электрический U_1 (задача Дирихле) и магнитный U_2 (задача Неймана) потенциалы Дебая рассеянного конусом поля представляются в виде интеграла Конторовича-Лебедева [11]:

$$U_j = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \hat{U}_j \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad j=1,2, \quad (1)$$

$$\text{где} \quad \hat{U}_j = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{a}_{m\tau}^{(j)} U_{m\tau}^{(j)}(\theta, \varphi); \quad (2)$$

$$U_{m\tau}^{(j)} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n}^{(j)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \theta)}{d^{j-1}} e^{i(m+nN)\varphi}, & 0 < \theta < \gamma, \\ \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \gamma)}{d^{j-1}} \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{m,n}^{(j)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos \theta)}{d^{j-1}} e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma < \theta < \pi; \\ \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos \gamma)}{d^{j-1}} \end{cases} \quad (3)$$

$K_{i\tau}(qr)$ – функция Макдональда, параметр q связан с волновым числом; $\hat{a}_{m\tau}^{(j)}$ – известные коэффициенты, а $x_{m,n}^{(j)}$ – неизвестные коэффициенты, которые не зависят от волнового числа. Переходя в (1)-(3) к интегрированию по мнимой оси ($\mu = i\tau$) и представляя полученный интеграл в ряд по вычетам подынтегральной функции, приходим к выводу, что спектр первой ($j=1$) или второй ($j=2$) краевой задачи будет определяться полюсами $\left\{ \hat{\mu}_{m,n}^{(j),p} \right\}_{p=0}^{+\infty}$ коэффициентов $x_{m,n}^{(j)}(\mu)$.

В силу того, что продольные щели прорезаны до вершины конуса, поведение поля вблизи острия будет зависеть не только от степени приближения по r , но также и от направления приближения по φ и θ , т.к. перпендикулярные и параллельные кромкам щели (ребрам секторов) составляющие ведут себя по разному в их окрестности [1, 2]. Поведение поля вблизи острия будет зависеть также от вида падающего поля. Так, при возбуждении конуса с продольными щелями электрическим радиальным диполем рассеянное поле определяется электрическим потенциалом Дебая U_1 , и спектр соответствующей граничной электродинамической задачи совпадает со спектром задачи Дирихле ($j=1$). Если в качестве источника рассматривается магнитный радиальный диполь, то спектром граничной электродинамической задачи является спектр задачи Неймана ($j=2$). В случае возбуждения конуса диполем произвольной ориентации или дифракции плоской волны (как частный случай рассеяния поля поперечного диполя) на данной конической структуре спектр граничной задачи определяется как спектром задачи Дирихле, так и спектром задачи Неймана. Например, для $j=1$ или $j=2$ поведение поля определяется следующим образом [2, 7, 8]:

$$j=1, \quad |\vec{E}| \sim |qr|^{-1+\alpha}, \quad |\vec{H}| \sim |qr|^{\alpha}, \quad qr \ll 1, \quad (4)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \min(\hat{\mu}_{m,n}^{(1),P}); \quad (5)$$

$$j = 2, |\vec{E}| \sim |qr|^\beta, |\vec{H}| \sim |qr|^{-1+\beta}, qr \ll 1, \quad (6)$$

$$\beta = -\frac{1}{2} + \min(\hat{\mu}_{m,n}^{(2),P}); \quad (7)$$

Найдем спектры в частном случае полупрозрачного конуса.

Задача Дирихле

«Полупрозрачный» конус – это предельный случай рассматриваемой поверхности, когда число щелей велико ($N \gg 1$), а их ширина сравнима с периодом структуры $\left(\frac{l-d}{l} \ll 1\right)$ в предположении существования предела

$$Q = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ d/l \rightarrow 1}} \left(-\frac{1}{N} \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right) > 0. \quad (8)$$

Такая поверхность как пропускает, так и отражает (с учетом дифракционных эффектов) поле в зависимости от параметра заполнения Q и может служить моделью проволочной антенны и отражателя. При этом на поверхности такого типа полупрозрачного конуса выполняются усредненные граничные условия для радиальной составляющей электрического поля E_r и азимутальной для магнитного поля H_φ :

$$E_r^+ = E_r^-, \pm \frac{q}{wQ \sin \gamma} E_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r \tilde{H}_\varphi), \quad (9)$$

где $\tilde{H} = H^+ - H^-$; f^+ и f^- означают предельные значения функции f при $\theta = \gamma \pm 0$; знак "+" перед q – для гармонической зависимости $e^{i\omega t}$, а знак "-" – для зависимости $e^{-i\omega t}$; w – волновое сопротивление среды. В отличие от усредненных условий на поверхности радиально проводящего конуса [7] условие (9) для полупрозрачного конуса содержит параметр Q , связывающий число щелей и их размеры.

В данном случае спектр задачи Дирихле определяется корнями уравнения:

$$\pi \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - m)}{\Gamma(1/2 + i\tau + m)} P_{-1/2+\mu}^m(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}^m(-\cos \gamma) + 2Q(-1)^m \cos \pi\mu = 0. \quad (10)$$

Если источник находится на оси конуса ($\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = \pi$, $m = 0$), то уравнение (10) упрощается и принимает вид:

$$\pi P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) + 2Q \cos \pi\mu = 0. \quad (11)$$

В частном случае полупрозрачного конуса, когда Q мало ($Q \ll 1$), корни (11) находятся вблизи корней $P_{-1/2+\mu}(\pm \cos \gamma) = 0$, $\mu = \mu(\gamma, \theta)$:

$$\mu_s^\pm = \xi_s^\pm - \frac{2 \cos \pi \alpha_s^\pm}{\pi \frac{d}{d\mu} \left[P_{-1/2+\mu}(\cos \gamma) P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) \right] \Big|_{\mu=\xi_s^\pm}} Q + O(Q^2), \quad (12)$$

$$P_{-1/2+\xi_s^+}(\cos \gamma) = 0, P_{-1/2+\xi_s^-}(-\cos \gamma) = 0, \xi_s^\pm = \xi_s^\pm(\gamma), s = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

При $Q = 0$ (11)-(13) определяют спектр краевой задачи Дирихле для сплошного конуса в случае осесимметричного возбуждения [3, 7]. Таким образом, как это следует из (12) и (13) спектр задачи Дирихле для полупрозрачного конуса ($Q \ll 1$) представляет собой возмущен-

ный спектр задачи Дирихле для сплошного конуса. Наименьшим из собственных значений (12) является μ_0^- ;

$$\mu_0^- = \xi_0^- - aQ + O(Q^2), \quad (14)$$

$$\text{где } a = \frac{\cos \pi \alpha_s^-}{\pi P_{-1/2+\alpha_0^-}(\cos \gamma) \frac{d}{d\mu} P_{-1/2+\mu}(-\cos \gamma) \Big|_{\mu=\xi_s^-}} > 0, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}. \quad (15)$$

Тогда поведение поля у вершины полупрозрачного конуса ($Q \ll 1$) (4) определяется из (5), (14) значением

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \mu_0^- = -\frac{1}{2} + \xi_0^- - aQ + O(Q^2). \quad (16)$$

Учитывая, что $\alpha^{istr} = -\frac{1}{2} + \xi_0^-$ характеризует поведение вблизи острия сплошного конуса [3, 7], представление для α (16) принимает вид $\alpha = \alpha^{istr} - aQ + O(Q^2)$.

Принимая во внимание (15) и неравенство $0 < \alpha^{istr} < 1$, $\gamma < \pi/2$ [3], заключаем, что особенность у электрического поля у вершины полупрозрачного конуса ($Q \ll 1$) выше особенности электрического поля вблизи вершины сплошного конуса. В соответствии с (4) магнитное поле у вершины конуса ограничено.

В другом частном случае полупрозрачного конуса ($Q \gg 1$) асимптотика корней (11) имеет вид:

$$\bar{\mu}_s = \frac{1}{2} + s + \frac{1}{2Q} [P_s(\cos \gamma)]^2 + O(Q^{-2}), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{а } \alpha = -\frac{1}{2} + \bar{\mu}_0 = \frac{1}{2Q} + O(Q^{-2}). \quad (17)$$

Согласно (4), (17) электрическое поле у вершины такого типа полупрозрачного конуса ($Q \gg 1$) имеет сильную особенность. Магнитное поле при $qr \ll 1$ ограничено. Как это следует из (17) особенность у вершины полупрозрачного конуса зависит от параметра заполнения $Q \gg 1$, в то время как зависимость от угла раскрыва γ незначительна (в отличие от сплошного идеально проводящего конуса). К такому выводу пришли и авторы работы [7] для радиально проводящего конуса, поскольку рассматриваемый тип полупрозрачного конуса ($Q \gg 1$) можно считать также радиально проводящей конической поверхностью с разомкнутой вершиной. На рис.2-5 даны кривые зависимости собственных значений μ_0 , μ_1 от параметра Q при различных γ (1. $\gamma = \pi/8$, 2. $\gamma = \pi/4$, 3. $\gamma = \pi/3$). При $Q \ll 1$ кривые приближаются к корням функций Лежандра (13) и их поведение согласуется с асимптотиками (12). При увеличении Q кривые приближаются к значениям 0.5 и 1.5 соответственно, что совпадает с их асимптотическим поведением (17).

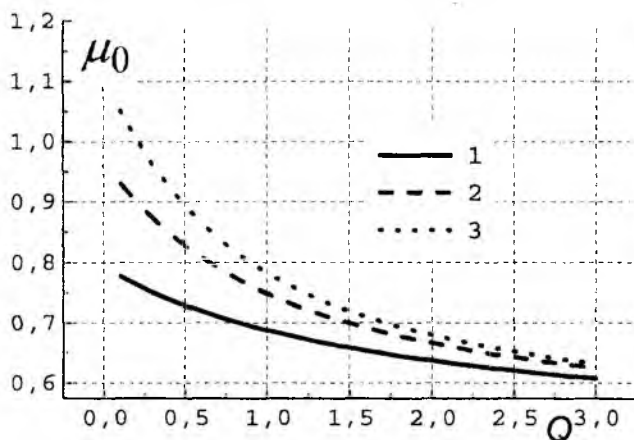


Рис. 2

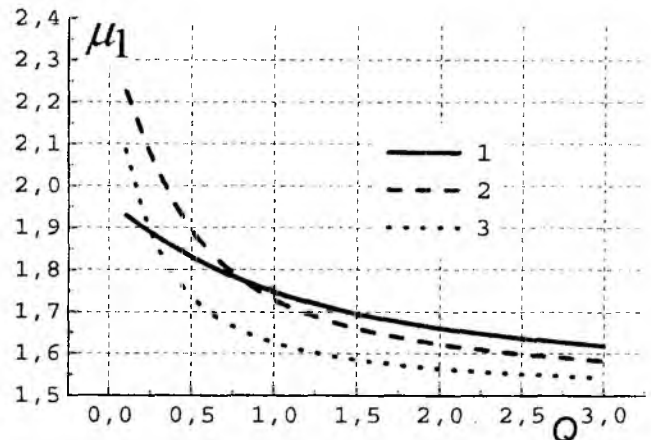


Рис. 3

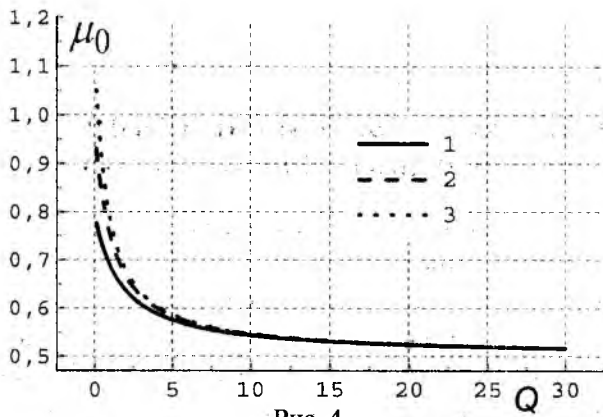


Рис. 4

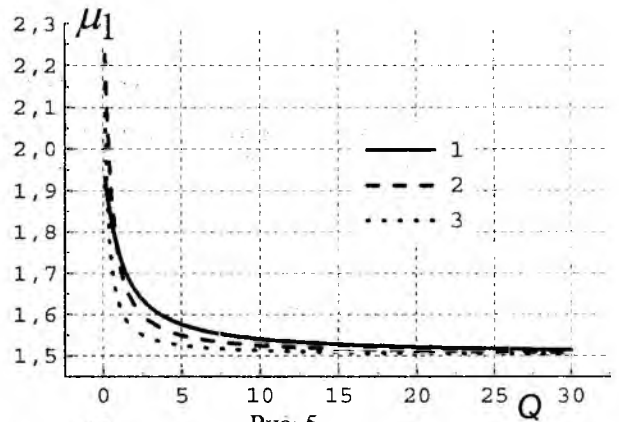


Рис. 5

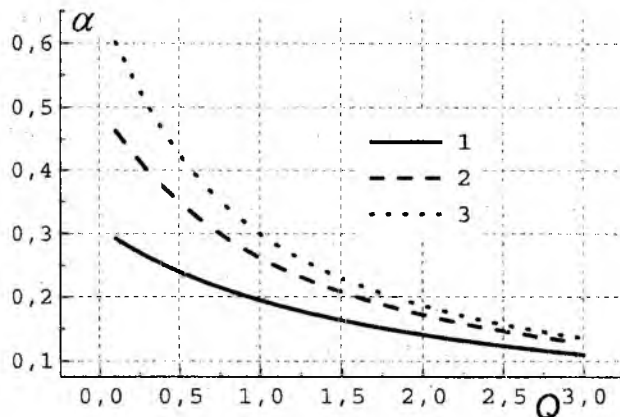


Рис. 6

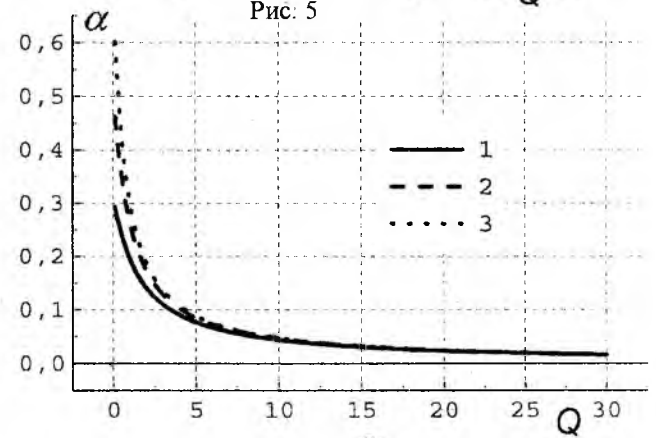


Рис. 7

На рис. 6-7 приведены зависимости параметра $\alpha(Q)$ для различных значений γ (1. $\gamma = \pi/8$, 2. $\gamma = \pi/4$, 3. $\gamma = \pi/3$), характеризующих поведение поля вблизи вершины полупрозрачного конуса.

Заключение

В данной статье приведены результаты исследования поведения поля у вершины незамкнутой конической поверхности. Изучено влияние щелей на особенность поля в случае полупрозрачного конуса. Показано, что при возбуждении электрическим диполем полупрозрачного конуса (модель проволочной структуры) особенность электрического поля у вершины выше особенности поля у вершины сплошного конуса. Приведены кривые зависимости для показателя, зависящего от параметра заполнения структуры, характеризующего поведение поля вблизи острия.

Список литературы: 1. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир 1964. 428 с. 2. Ваганов Р.Б., Кацеленбаум Б.З. Основы теории дифракции. М.: Наука. 1982. 272 с. 3. Бладель Я. Сингулярности поля вблизи вершины конуса // ТИИЭР. 1983. Т. 71, №7. С.146 – 147. 4. Sahalos J.N., Thiele G.A. The eigenfunction solution for scattered fields and surface currents of a vertex // IEEE Trans. Antennas and Propagat. Vol. 31, №1. 1983. P. 206 – 211. 5. Вафиадис Э., Сахалос Дж.Н. Поле у вершины эллиптического конуса // ТИИЭР. 1984. Т. 72, №8. С. 1089 – 1091. 6. Machetti S., Rozzi T. Electric field behavior near metallic wedges // IEEE Trans. Antennas and Propagat. Vol. 38, №9. 1990. P. 1333 – 1340. 7. Беличенко В.П., Гошин Г.Г., Дмитренко А.Г. и др. Математические методы в граничных задачах электродинамики. Томск: Изд-во Томск.ун-та, 1990. 171 с. 8. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Рассеяние поля электрического диполя на конической структуре с продольными щелями // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, №7. С. 792 – 798. 9. Дорошенко В.А. Возбуждение магнитным радиальным диполем конуса с продольными щелями // Радиотехника: Всеукр. межвед. научн.-техн. сб. 1992. Вып. 97. С. 54 – 61. 10. Doroshenko V.A. Modeling of electromagnetic scattering by a slot cone reflector // Journal of Applied of Electromagnetism. Vol.3, №2. 2000. P. 31 – 40. 11. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: ГИФМЛ, 1963. 380 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 15.04.2003