Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Комп’ютерних наук
(повна назва)
Кафедра Штучного інтелекту
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)
(рівень вищої освіти)
Оцінка екстремальних значень показника асортативності мереж Барабаші-Альберт
(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи СШІм-18-1

Писаренко С.П.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 122 – Комп’ютерні науки
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо -наукова)

Освітня програма Системи штучного інтелекту (СШІ)
(повна назва освітньої програми)

Керівник доц. Шергін В.Л.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ____________ В.О. Філатов
(підпис) (прізвище, ініціали)

2019 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Комп'ютерних наук
Кафедра Штучного інтелекту
Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 122 – Комп'ютерні науки
(код і повна назва)

Тип програми ____
(освітньо-професійна або освітньо -наукова)

Освітня програма Системи штучного інтелекту (СШІ)
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:
Зав. кафедри ______________
(підпис)
«____»_____________ 20 ___ р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Писаренку Сергію Петровичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Оцінка екстремальних значень показника асортативності мереж Барабаші-Альберт

затверджена наказом по університету від 04.11.2019 р. № 1623Ст

2. Термін подання студентом роботи 19.12.2019 р.

3. Вихідні дані до роботи Науково-технічні публікації, дані Інтернет-джерел щодо розробки існуючих методів моделювання та дослідження асортативності мереж

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, що потрібно розробити) _____________
1 Аналіз предметної області, 1.1 Поняття складних мереж, 1.2 Моделі складних мереж, 1.3 Асортативність мереж, 1.4 Постановка задачі дослідження, 2 Аналіз властивостей і характеристик складних мереж, 2.1 Властивості і характеристики мереж, 2.2 Безмасштабні мережі, 2.3 Властивості мереж Барабаші-Альберт, 2.4 Фрактальні властивості мереж Барабаші-Альберт, 2.5 Оцінювання меж коефіцієнта асортативності мереж Барабаші-Альберт, 3 Експериментальне дослідження меж показника асортативності мереж Барабаші-Альберт, 3.1 Вибір програмних засобів реалізації, 3.2 Генерація мереж Барабаші-Альберт, 3.3 Оцінювання фрактальної розмірності мереж Барабаші-Альберт, 3.4 Експериментальне оцінювання граничних значень показника асортативності мереж Барабаші-Альберт, Висновки, Перелік посилань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням кресленників, схем, плакатів, комп’ютерних ілюстрацій (слайдів) Слайд 1 – Титульний. Слайд 2 – Об'єкт, предмет, мета дослідження. Слайд 3– Основні задачи. Слайд 4 – Характерні властивості складних мереж. Слайд 5 – Типові розподіли вузлів мереж за кількістю зв'язків. Слайд 6 – Основні моделі мереж. Слайд 7–Модель Барабаші-Альберт. Слайд 8 – Асортативність мереж. Слайд 9 – Показник асортативності. Слайд 10 – Показники асортативності деяких мереж. Слайд 11– Структура екстремальних мереж. Слайд 12 – Постановка задачі пошуку структури екстремально асортативної мережі. Слайд 13 – Алгоритм побудови мереж, екстремальних за асортативністю. Слайд 14– Структура мереж, екстремальних за асортативністю. Слайд 15– Матриця суміжності екстремально дизасортативної БА-мережі з n=32 вузлів. Слайд 16 – Матриця суміжності екстремально асортативної БА-мережі з n=32 вузлів. Слайд 17 – Оцінки меж показника асортативності мереж Барабаші-Альберт. Слайд 18 – Точні та асимптотичні межі коефіцієнту асортативності в залежності від розміру мережі Барабаші-Альберт. Слайд 19 – Висновки

6. Консультанти розділів роботи

Найменування розділу	Консультант (посада, прізвище, ім’я, по батькові)	Позначка консультанта про виконання розділу	
		підпис	дата
Основний розділ	доцент Шергін В.Л.		

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи (проекту)	Термін виконання етапів проекту (роботи)	Примітка
1	Отримання завдання на дипломну роботу	04.11.2019	виконано
2	Аналіз предметної області	05.112019 – 10.11.2019	виконано
3	Постановка завдання та узгодження з керівником	11.11.2019 – 12.11.2019	виконано
4	Аналіз моделей графів та мереж, числових характеристик	13.11.2019 – 27.11.2019	виконано
5	Дослідження моделі Барабаші-Альберт	18.11.2019 – 22.11.2019	виконано
6	Дослідження асортативності мереж Барабаші-Альберт	23.11.2019 – 27.11.2019	виконано
7	Експериментальні дослідження	28.11.2019 – 05.12.2019	виконано
8	Написання пояснювальної записки	06.12.2019 – 10.12.2019	виконано
9	Попередній захист	13.12.2019	виконано
10	Захист перед ЕК	19.12.2019	

Дата видачі завдання ______________________________

Студент ____________________ ___________________ Писаренко С.П.
(підпис)

Керівник роботи (проекту) ___________________ доц. Шергін В.Л.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Записка пояснювальна: 73 с., 20 рис., 2 табл., 2 дод., 19 джерел.

АСОРТАТИВНІСТЬ, МАСШТАБНО-ІНВАРІАНТНА МЕРЕЖА, МЕРЕЖА БАРАБАШІ-АЛЬБЕРТ, КОМПЛЕКСНІ МЕРЕЖІ, ФРАКТАЛИ

Об'єктом досліджень є мережі Барабаші-Альберт.

Предметом досліджень атестаційної роботи магістра є асортативність.

Метою роботи є аналіз моделей складних мереж, дослідження структури екстремально асортативних / дизасортативних мереж, впливу розміру мережі на межі показника асортативності, проведення експериментальних досліджень оцінки меж показника асортативності мережі Барабаші-Альберт.

РЕФЕРАТ

Записка пояснительная: 73 с., 20 рис., 2 табл., 2 прил., 19 источников.

АССОРТАТИВНОСТЬ, МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНАЯ СЕТЬ, КОМПЛЕКСНЫЕ СЕТИ, СЕТЬ БАРАБАШИ-АЛЬБЕРТ, ФРАКТАЛЫ

Объектом исследований являются сети Барабаши-Альберт.

Предметом исследований аттестационной работы магистра является ассортативность.

Целью работы является анализ моделей сложных сетей, исследование структуры экстремально ассортативных / дизассортативных сетей, влияния размера сети на границы показателя ассортативности, проведение экспериментальных исследований оценки границ показателя ассортативности сети Барабаши-Альберт.

ABSTRACT

Explanatory note: 73 pages, 20 figures, 2 tables, 19 sources, 2 appendixes.

ASSORTATIVITY, BARABASI-ALBERT NETWORK, COMPLEX NETWORKS, FRACTAL, SCALE-FREE NETWORK

The object of research is the Barabasi-Albert network.

The subject of research is assortativity.

The aim of the work is analysis models of complex networks, studying the structure of extremely assortative / disassortative networks, the influence of network size on the boundaries of the assortativity index, experimental evaluation the boundaries of the assortivity index of the Barabasi-Albert network.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ ТА ТЕРМІНІВ

БА – мережа Барабаші-Альберт;

МІМ – масштабно-інваріантна мережа;

ПП – переважне приєднання (переважне зв'язування);

box-counting – підрахунок числа шаблонов;

ER – Erdos-Renyi network – мережа Ердеша-Рен'ї;

SF-мережа – scale-free network – безмасштабна мережа;

SW – small world – сеть малого світу.

ВСТУП

У 90-і роки XX століття, коли інтернет тільки зароджувався, исследователи вже задалися питанням, яким законам підкоряється зростання інтернету і яка найбільш адекватна модель для опису властивостей цієї мережі. Одними з перших тут були А.-Л. Барабаші і Р. Альберт. Вони знайшли ряд важливих емпіричних закономірностей в поведінці інтернету і на їх основі придумали модель, яку по-різному формалізували багато авторів.

У теорії складних мереж виділяють три основних напрямки: дослідження статистичних властивостей, які характеризують поведінку мереж; створення моделі мереж; передбачення поведінки мереж при зміні структурних властивостей. У прикладних дослідженнях зазвичай застосовують такі типові для мережевого аналізу характеристики, як розмір мережі, мережева щільність, ступінь центральності і т.п.

При аналізі складних мереж, як і в теорії графів, досліджуються параметри окремих вузлів; параметри мережі в цілому; мережеві підструктури.

Теорія складних мереж – це комплексний науковий напрямок, що знаходиться на стику таких наук, як дискретна математика, теорія графів, теорія алгоритмів, нелінійна динаміка, теорія фазових переходів, перколяції та ін. Тому для успішного моделювання складних мереж необхідні базові відомості з усіх цих областей.

Перерахуємо деякі проблеми і завдань, які вирішуються за допомогою теорії складних мереж:

– дослідження стандартних характеристик графів для складних мереж різної природи – випадкових графів, безмасштабних мереж, мереж малого світу і т.п .;

– визначення і вивчення нових характеристик складних мереж, таких, наприклад, як середній мінімальний шлях, посередництво, коефіцієнт кластеризації;

– вивчення різних «фізичних» процесів на складних мережах – дифузії, епідемічних процесів, різних потоків (інформації, електричного струму, і т.д.). Зрештою, знаменитий алгоритм PageRank розглядає блукання по зв'язках (гіперпосиланнях) в складній мережі WWW;

– дуже важливим в прикладному відношенні напрямком є методи відновлення, захисту та знищення мереж. Сюди ж примикають і питання оптимізації мереж;

– аналіз числових характеристик мереж, зокрема – асортативності.

Найважливішою характеристикою складних мереж є розподіл вузлів за ступенями, тобто за кількістю зв’язків. За результатами багатьох досліджень встановлено, що більшість мереж реального світу (соціальних, технічних, біологічних тощо) є масштабно-інваріантними. Існує багато моделей таких мереж, найпоширенішою з яких є модель Барабаші-Альберт.

Іншою важливою характеристикою мереж є асортативність, тобто схильність вузлів до з’єднання з подібними собі (за кількістю зв’язків, чи за іншою ознакою) – такі мережі є асортативними, або навпаки, з вузлами, що мають протилежні характеристики – дизасортативні мережі.

Мережі соціальної природи є асортативними, а біологічні та технічні мережі – дизасортативними. Проте, незважаючі на велику кількість досліджень мереж реального світу та відповідних штучних мереж (моделей) щодо розподілу вузлів, асортативності та інших характеристик, вагомим недоліком сучасного стану теорії складних мереж є те, що зазначені характеристики досліджуються окремо одна від одної. Зокрема, невідомо, яким чином коефіцієнт асортативності залежить від показника розподілу вузлів за зв’язками.

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ

1.1 Поняття складних мереж

Складні мережі або комплексні мережі (англ. complex networks) – це існуючі в природі мережі (графи), які мають нетривіальні топологічні властивості.

Більшість об'єктів природи і суспільства мають бінарні зв'язки, які можна представити у вигляді мережі, де кожен об'єкт це точка, а його зв'язок з іншим об'єктом це лінія або дуга.

Так відносини між людьми в групі, відносини між фірмами, комп'ютерні мережі, Веб, відносини між генами в ДНК – все це приклади мереж [1], [2], [3].

Топологічні властивості цих мереж, що розглядаються абстрактно від їх фізичної природи, але істотно визначають функціонування мереж, і складають предмет дослідження комплексних мереж.

Доказ відомої теореми про чотири фарби Аппелем і Хакеном (Kenneth Appel, Wolfgang Haken) в 1976 році (чотирьох фарб досить, щоб розфарбувати будь-яку карту, при цьому дві сусідні області повинні бути розфарбовані в різні кольори) – це найбільш відоме останнє досягнення в теорії графів .

Найбільш значні результати останніх років у вивченні мережевих структур були отримані фізиками. Виявилося, що методи фізики, перш за все статистичної механіки, добре підходять для вивчення проблем в цій галузі. На відміну від математиків, фізики в своїх дослідженнях спираються на емпіричні дані про реальних мережах, таких як Інтернет, мережі друзів і знайомих або біологічні метаболічні мережі.

На відміну від соціологів, фізики досліджують статистичні властивості мереж, наприклад, закони розподілу вузлів по числу зв'язків. При вивченні цих питань було виявлено велику кількість дивовижних і інтригуючих властивостей реальних мереж, на які не звернули уваги математики і соціологи. Ці властивості послужили стимулом для розробки нових теорій, моделей, вимірювань, виявлення нових фундаментальних властивостей мереж.

Термін «складні мережі» виник на початку цього століття і відноситься до мереж з більш складною архітектурою, ніж класичні випадкові мережі з заданим числом вузлів і зв'язків або решітки в кристалах. Зазвичай в таких мережах є невелике число вузлів з великим числом зв'язків – так звані хаби (від англійського hub – ядро, концентратор), які в значній мірі і визначають властивості цих мереж. При цьому виявилося, що більшість реальних мереж (біологічних, технічних, соціальних) є складними [4].

1.2 Моделі складних мереж

З чисто математичних позицій будь-яка модель має право на існування. Однак для додатків – в тому числі додатків до транспортної проблематики – деякі з цих моделей більш цікаві, деякі – менш. Відповідно нижче представлені три класи моделей, кожен з яких за десятиліття, що минули з моменту своєї появи, зарекомендував себе плідним як в рамках «чистої» математики, так і в рамках її різноманітних додатків, серед яких надійність транспортної мережі, зростання Інтернету та інших соціальних і біологічних мереж, теорія алгоритмів і т.д. Далі виділені лише найосновніші і принципові моменти теорії випадкових графів [5].

Модель Ердеша-Рен`ї при досить великий розкид значень параметра дозволяє конструювати штучні мережі з великим числом одночасно існуючих в них функціональних структур.

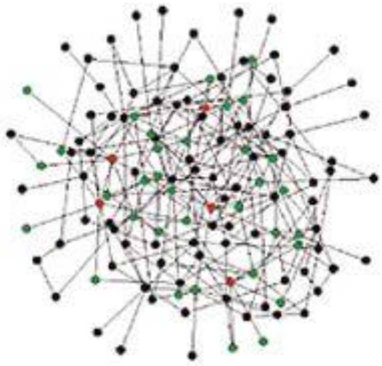
Модель Барабаші-Альберт, навпаки, є найгіршою з точки зору конструювання якомога більшого числа одночасно існуючих функціональних структур, однак більш оптимальної з точки зору схожості з реальними нейронними мережами.

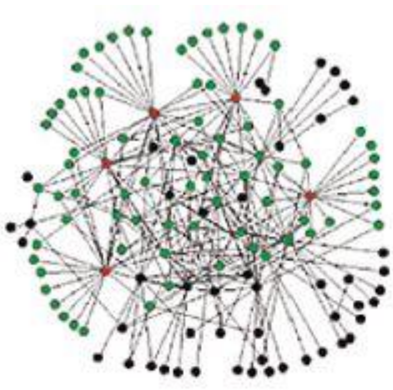
Модель Ваттса-Строгаца, будучи, по суті, перехідною ланкою між регулярною кільцевої ланцюжком і випадковим графом моделі Ердеша-Рен`ї, дозволяє конструювати мережі з великим числом функціональних структур, ніж в мережах Ердеша-Рен`ї, однак при цьому параметри мережі Ваттса-Строгаца не повинні виходити з досить вузького діапазону значень.

1.2.1 Модель графа Барабаші-Альберт

З наявних книг про мережі найцікавішою визнана робота Альберта Ласло Барабаш «Зв'язаність: нова наука про мережах» (Linked: The New Science of Networks) [6]. На відміну від гуманітарія Уаттса і популяризатора науки Баханана, за своєю основною спеціальністю Барабаші – фізик. Він підійшов до вивчення соціальних мереж з природничо-наукових позицій. Барабаш настільки впевнений у фундаментальній важливості мереж і пояснює специфікою мереж таку силу-силенну явищ, що його порівнюють з Піфагором, який говорив «все є число», Барабаш стверджує «все є мережа». Його підхід отримав висвітлення в багатьох виданнях, починаючи від наукових журналів Nature, Science, Science News і популярних American Scientist, Discovery, National Geographic і New Scientist до газет New York Times, USA Today, Washington і Business Week. Цей дослідник давав інтерв'ю всім скільки-небудь значимим телевізійним і радіоканалам.

Барабаші побудував свою систему поглядів, використовуючи нові підходи до теорії мереж і, зокрема, розроблений ним математичний апарат безмасштабних мереж (scale-free network) (рис. 1.1). Новизна поглядів Барабаш полягає в тому, що до нього соціальні мережі вважалися випадковими, а він показав, що ці мережі мають складну внутрішню структуру. У них є вузли з меншим числом зв'язків, а є з великою кількістю зв'язків; внутрішня інфраструктура визначає їх властивості.





а) б)

Рисунок 1.1 – Умовне зображення мереж: а) з експоненціальним розподілом ступенів; б) безмасштабна

Зокрема, Барабаші показав, що в тому випадку, якщо деяка мережева система еволюціонує без впливу зовнішніх регуляторів, кількість зв'язків, якими обростають вузли, не випадково. Число зв'язків у окремо взятого вузла розподіляється не по Пуассону, а за логарифмічною закону (рис. 1.2). Звідси випливає, що в більшості реальних мереж основна частина вузлів має обмежене число зв'язків, а окремі вузли-концентратори (Барабаші називає їх hub) мають аномально велику кількість зв'язків.

Рисунок 1.2 – Графік розподілу ступенів вузлів безмасштабной мережі

Можна говорити про наявність ієрархії вузлів в мережах, що склалися під впливом природних факторів. Ієрархічність в пристрої мереж може стати поясненням деяких емпіричних законам, таким, наприклад, як «правило Парето 20:80», а також успіхів таких речей, як мережевий маркетинг, особливості поширення епідеміологічних захворювань і багато інших феномени, що спостерігаються нами в житті. На підставі теорії Барабаш можна навіть пояснити євангельську тезу «Хто має, то дасться йому; а хто не має, забереться від нього й те, що він думає мати ».

Модель графа Барабаші-Альберт (граф БА, рис.1.3) є алгоритм генерації випадкових безмасштабних мереж з використанням правила переважного зв'язування (ПС).

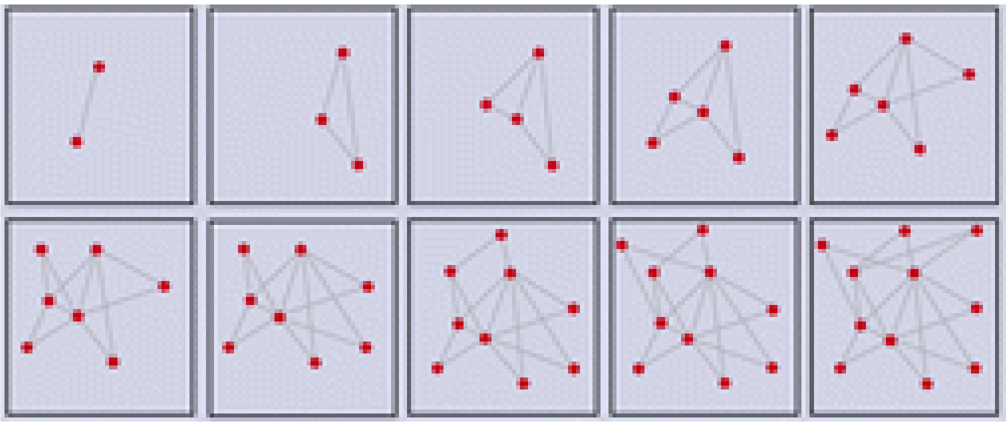


Рисунок 1.3 – Еволюція мережі Барабаші-Альберт

Правило переважного зв'язування каже, що чим більший ступінь зв'язності має вершина, тим вище ймовірність приєднання до неї нових вершин. Якщо для приєднання вибирати вершину випадковим чином, то ймовірність вибору певної вершини буде пропорційна її ступенязв'язності.

Даний граф вирощується з невеликого графа-затравки, у якого ступінь зв'язності кожної вершини повинні бути не менше одиниці.

Кожна нова вершина приєднується до вже існуючих вершин з ймовірністю, яка пропорційна ступеню цих вершин. Ймовірність (p_i) того, що нова вершина приєднається до i-ої вершині зі ступінню k_i дорівнює [5]:

$$p_i = \frac{k_i}{\sum k_i}. \quad (1.1)$$

1.2.2 Модель графа Уатса-Строгатца

У період з 1999-го по теперішній час вийшло кілька книг, що містять сучасні уявлення про мережі, якими можна в якійсь мірі пояснити феномен популярності сервісів соціальних мереж. Автором двох з них є Дункан Уаттс. У 1999 році він опублікував книгу «Малі світи, динаміка мереж від порядку до випадковості» (Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness) [7], написану за матеріалами власної дисертації. Дослідження наводилися в Santa Fe Institute, відомому ще як «Інститут вивчення складних систем». У 2004 році з'явилася розширена версія тієї ж книги під назвою «Шість рукостискань, наука про пов'язаному світі» (Six Degrees: the science of a connected age) [8]. У цих роботах автор розглядає феномени системних зв'язків між людьми з позиції психолога і соціолога. Уаттс був одним з перших, хто з часів перших експериментів Мільграма спробував побудувати математичну модель малого світу і поширити її на дослідження, безпосередньо не пов'язані з соціальними мережами. Виявляється, що підхід, заснований на принципах малого світу, добре підходить для досліджень, пов'язаних з поширенням епідеміологічних захворювань, катастроф в енергосистемах і інших системах, що мають мережеву природу.

Більшість моделей складних мереж являють собою чисельну реалізацію графа і генеруються на комп'ютері. Дана ж модель з'явилася задовго до вільного поширення обчислювальної техніки.

Д.Уаттс і С. Строгатц виявили феномен, характерний для багатьох реальних мереж, названий ефектом «тісного світу».

Модель «тісного світу» полягає в тому, що перебираючи коло своїх найближчих знайомих, потім людей, які знають наших найближчих знайомих (але не знають нас безпосередньо), і т.д. легко переконатися в наступному: достатньо простежити за невеликим числом ланцюжків таких знайомств, щоб зрозуміти, що будь-який з нас опосередковано знайомий з будь-яким членом суспільства. У цьому сенсі наш світ є тісним, звідки і пішла назва цієї моделі.

Мережеві структури, відповідні властивостям малих світів, володіють наступними типовими властивостями: мала середня довжина шляху щодо діаметра мережі і великий коефіцієнт кластеризації.

При дослідженні цього феномена ними була запропонована процедура побудови наочної моделі мережі, якій притаманний цей феномен.

На рисунку 1.4 представлена ілюстрація даної моделі.

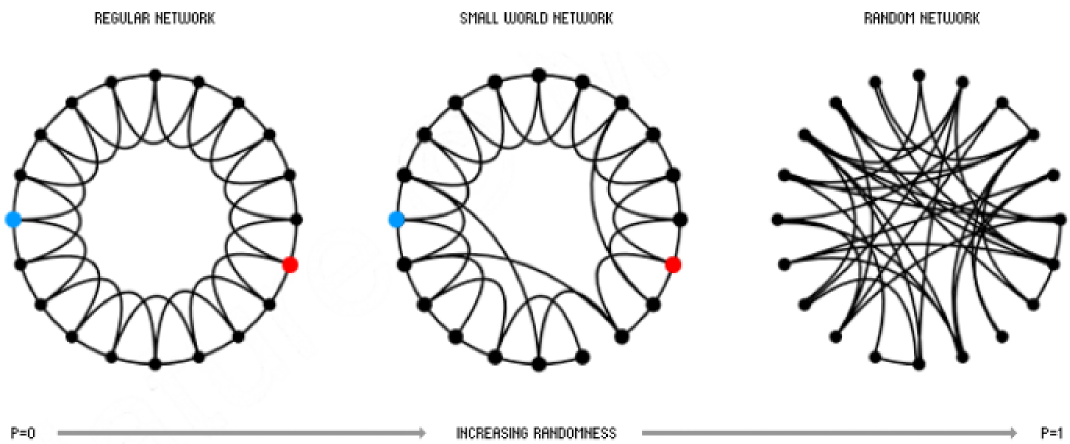


Рисунок 1.4 – Модель графа Уатса-Строгатса

Так по рисунку 1.4 можна побачити трансформацію з регулярного ланцюжка в модель «тісного світу», а потім в випадковий граф [4].

Комп'ютерна модель «малого світу» була розроблена Уаттсом і Строгатсом декількома роками пізніше.

Модель Уаттса-Строгатса є модель генерації випадкового графа, що має високий коефіцієнт кластеризації вершин і відносно невелику середню довжину шляху [6].

1.2.3 Модель графа Ердеша-Рені

В теорії графів модель Ердеша – Рен`ї є моделлю генерації випадкового графа з постійною ймовірністю появи ребра між двома вершинами незалежно від інших ребер. Відповідно до цієї моделі, граф конструюється за допомогою з'єднання пар вершин випадковим чином. Кожне ребро включається в граф з ймовірністю p незалежно для кожної пари вершин. При $p = 0$ маємо порожній граф (граф, який не має ребер), з ростом p граф стає все більш насиченим ребрами, при $p = 1$ граф стає повнозв'язним. При фіксованій кількості вершин у графі p є єдиним вхідним параметром моделі Ердеша – Рен`ї.

Простота моделі Ердеша-Рен`ї випадкового графа дозволяє отримувати різні аналітичні оцінки. Однак варто зазначити, що модель в середньому не відтворює такі типові властивості реальних мереж, як ступінь вершин, величина коефіцієнта кластеризації і довжини шляху [7].

1.3 Асортативність мереж

Як вже було зазначено, найважливішою характеристикою складних мереж є розподіл вузлів за ступенями, тобто за кількістю зв’язків. За результатами багатьох досліджень встановлено, що більшість мереж реального світу (соціальних, технічних, біологічних тощо) є масштабно-інваріантними з показником розподілу від 2 до 3.5 [14]. Існує багато моделей SF-мереж, найпростішою та найпоширенішою з яких є модель Барабаші-Альберт (BA-model).

Проте іншою важливою характеристикою мереж є асортативність, тобто схильність вузлів до з’єднання з подібними собі (за кількістю зв’язків, чи за іншою ознакою) – такі мережі є асортативними, або навпаки, з вузлами, що мають протилежні характеристики – дизасортативні мережі.

Відомо [15], що мережі соціальної природи є асортативними, а біологічні та технічні мережі – дизасортативними (таблиця 1.1). Проте в обох випадках коефіцієнти асортативності мереж реального світу не дуже великі за абсолютними значеннями.

Таблиця 1.1 – Коефіцієнти асортативності деяких мереж

Network	assortativity
Physics coauthorship [4]	0.363
Mathematics coauthorship [17]	0.120
Company directors (see [37] for reference)	0.276
Connections between autonomous systems on the Internet [7]	-0.189
World-Wide Web (see [33] for reference)	-0.067
Undirected hyperlinks between Web pages in a single domain [2]	-0.065
Neural network (see [37] for reference)	-0.163
Experimental Erdős-Rényi (ER) graph (for sufficiently large network size)	~0
Experimental Barabási-Albert (BA) graph (for sufficiently large network size)	~0

Коефіцієнт асортативності визначається [14] як коефіцієнт кореляції між поєднаними вузлами за кількістю зв'язків. Таким чином, коефіцієнт асортативності мереж загального вигляду знаходиться у межах $-1 \le r \le 1$; граничним значенням відповідають [16] зіркоподібна мережа та мережа у вигляді сукупності ізольованих компонентів, у кожному з яких вузли мають однаковий ступінь (рис.1.5).

Легко зазначити, що конфігурація обох «ідеальних» мереж (рис.1.5) не є масштабно-інваріантною; більше того, вона дуже далека від конфігурацій мереж реального світу.

Таким чином, постають питання, якими є межі коефіцієнту асортивності для SF-мережі із заданим показником розподілу вузлів за зв'язками, та якою є конфігурація екстремальних за асортативністю масштабно-інваріантних мереж.

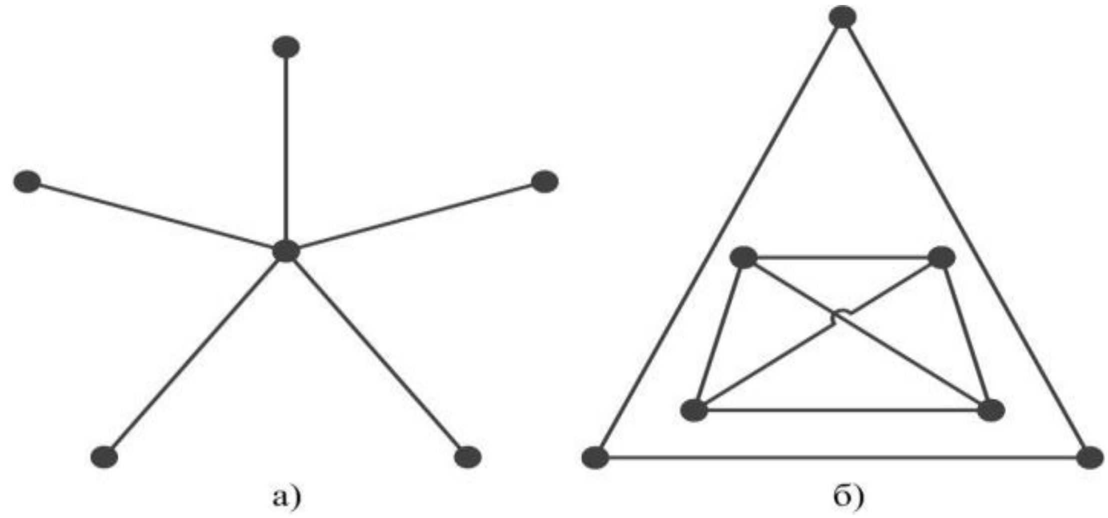


Рисунок 1.5 – Структури максимально дизасортативної мережі (а) та максимально асортативної мережі (б)

Структура екстремально дизасортативної SF-мережі визначається наступним алгоритмом побудови такої мережі [16]:

– перший вузол з’єднується з d_1 останніми;

– кожен наступний вузол i з’єднується з d_i вузлами, які обираються послідовно з кінця серед таких, які ще мають вільні зв’язки.

Наведений алгоритм породжує структуру мережі, яка наближена до неповного дводольного графу: вузли мережі можна розбити на дві підмножини («багаті» на звязки та «бідні»). Межа між ними (k^*) визначається умовою балансу, за якою кожна з підмножин «контролює» половину загальної кількості зв’язків мережі, тобто

$$\sum_{i \le k^*} d_i = \sum_{i > k^*} d_i \; . \tag{1.2}$$

Приклад матриці суміжності екстремально дизасортативної БА-мережі з $n = 32$ вузлів наведений на рис.1.6.

Асимптотично вузли кожної з підмножин не мають зв'язків між собою. На практиці такі звязки існують (у наведеному прикладі це 7-9,8-9,10-11 при $k^* = 9$). Це пов'язано з тим, що рівняння (1.2) не має цілочисельного розв'язку.

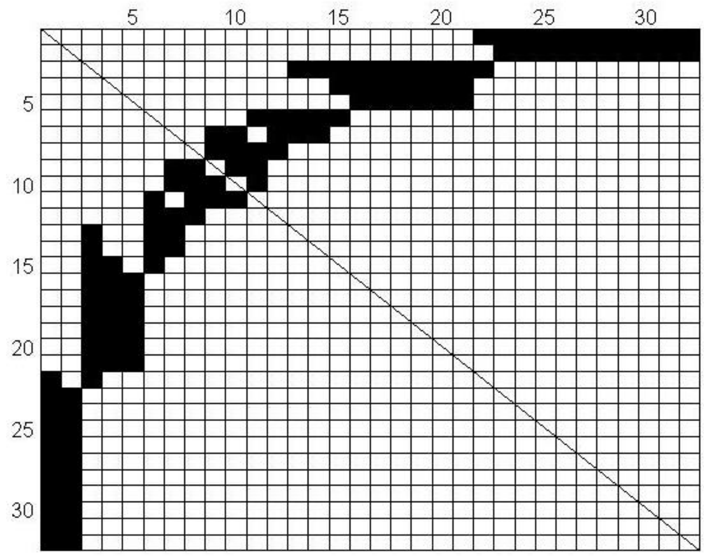


Рисунок 1.6 – Матриця суміжності екстремально дизасортативної мережі Барабаші-Альберт

Приклад матриці суміжності для максимально асортативної БА-мережі (також з $n = 32$ вузлів) наведений на рисунку 1.7. Цю матрицю можна побудувати за допомогою алгоритму, схожого до алгоритму побудови дизасортативної мережі. Единою відмінністю між ними є те, що вкладений цикл в даному випадку має бути прямим, а не зворотнім.

Згідно з рисунком 1.7 структура максимально асортативної мережі наближена до ланцюгу окремих кластерів, які слабо пов'язані один з іншим, або зовсім ізольовані. Так, у розглянутому числовому прикладі є сім кластерів, три з яких ізольовані, а інші чотири пов'язані між собою лише трьома зв'язками (12-13, 16-17 та 20-21).

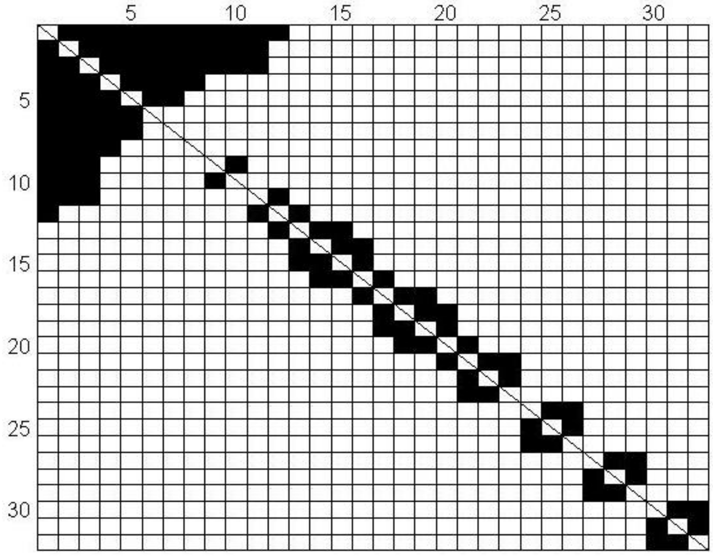


Рисунок 1.7 – Матриця суміжності максимально асортативної мережі Барабаші-Альберт

Незважаючі на велику кількість досліджень мереж реального світу та відповідних штучних мереж (моделей) щодо розподілу вузлів, асортативності та інших характеристик [14], [15], вагомим недоліком сучасного стану теорії складних мереж є те, що зазначені характеристики досліджуються окремо одна від одної. Зокрема, невідомо, яким чином коефіцієнт асортативності залежить від показника розподілу вузлів за зв’язками.

1.4 Постановка задачі дослідження

Метою атестаційної роботи є дослідження властивостей асортативності мереж Барабаші-Альберт (БА).

Завдання дослідження полягає в пошуку екстремальних значень показника асортативності мереж БА Для досягнення поставленої мети необхідно розглянути такі основні завдання:

– провести аналіз предметної області;

– провести порівняльну характеристику існуючих моделей складних мереж і їх характеристик;

– на основі існуючих алгоритмів спроектувати, розробити і побудувати модель мережі БА;

– провести дослідження властивостей асортативності мереж БА;

– шляхом імітаційного моделювання отримати експериментальні оцінки екстремальних значень показника асортативності мереж БА;

– проаналізувати отримані оцінки, порівнявши їх з теоретичними.

2 АНАЛІЗ ВЛАСТИВОСТЕЙ І ХАРАКТЕРИСТИК СКЛАДНИХ МЕРЕЖ

2.1 Властивості і характеристики мереж

2.1.1 Параметри вузлів мереж

Для окремих вузлів виділяють наступні параметри:

– вхідна ступінь вузла – кількість ребер графа, які входять в вузол;

– вихідна ступінь вузла – кількість ребер графа, які виходять з вузла;

– відстань від одного вузла до інших;

– ексцентричність (eccentricity) – найбільша з мінімальних відстаней від даного вузла до інших;

– посередництво (betweenness), що показує, скільки найкоротших шляхів проходить через даний вузол;

– центральність – загальна кількість зв'язків даного вузла по відношенню до інших [1].

2.1.2 Розподіл ступенів вузлів

Розподіл вузлів по числу зв'язків $P(q)$ є ймовірність того, що випадково обраний вузол у випадковій мережі має ступінь q:

$$P(q) = \frac{N(q)}{N}, \tag{2.1}$$

де $N(q)$ – середнє число вузлів ступеня q в мережі;

N – загальна кількість вузлів в мережі.

Ця величина також часто називається розподілом вузлів по числу зв'язків (degree distribution).

Розподіл вузлів по числу зв'язків є найпростішою статистичною характеристикою випадкової мережі. Чудово те, що в багатьох випадках знання цієї характеристики досить для розуміння властивостей цієї мережі і процесів, які в ній відбуваються. У класичних випадкових графах розподіл вузлів по числу зв'язків спадає досить швидко, оскільки для випадкових мереж розподіл вузлів по числу зв'язків підпорядковується закону Пуассона з деяким параметром $\lambda > 0$:ї

$$P(q) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^q}{q!}, \tag{2.2}$$

де q – ступінь узла.

Багато реальних мереж – від метаболічних мереж в клітинах до мережі інтернет – мають розподіл вузлів по числу зв'язків, який повільно спадає, і в цих мережах хаби (вузли з великим числом зв'язків) складають помітну частку від усіх вузлів, і саме вони визначають багато важливих властивостей цих мереж. Асимптотична залежність $P(q)$ у вигляді ступеневого закону при великих значеннях q – типовий приклад такого розподілу вузлів по числу зв'язків.

Розподіл вузлів по числу зв'язків у вигляді ступеневого закону ще називається безмасштабним (scale free), а самі мережі отримали назву безмасштабних мереж (scale free networks), що означає відсутність типового числа зв'язків в такій мережі [1].

2.1.3 Найкоротший шлях між вузлами

Відстань між вузлами визначається як кількість кроків, які необхідно зробити, щоб за існуючими ребрах дістатися від одного вузла до іншого. Природно, вузли можуть бути з'єднані прямо або опосередковано, через інші вузли.

Найкоротшим шляхом (SP, shortest path) між вузлами називається мінімальна відстань між ними. Для всієї мережі можна ввести поняття середнього найкоротшого шляху, як середнє по всім парам вузлів мінімальної відстані між ними, яке розраховується за формулою:

$$L = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i>j} l_{ij}, \tag{2.3}$$

де n – кількість вузлів;

l_{ij} – найкоротша відстань між вузлами i та j.

Посередництво (betweenees) – це параметр, який показує, скільки найкоротших шляхів проходить через вузол. Вузли з найбільшим посередництвом грають головну роль у встановленні зв'язків між іншими вузлами в мережі. Посередництво (b_m) вузла m визначається за формулою:

$$b_m = \sum_{i>j} \frac{\beta(i,m,j)}{B(i,j)}, \tag{2.4}$$

де $B(i,j)$ – загальна кількість найкоротших шляхів між вузлами i та j;

$\beta(i,m,j)$ – кількість найкоротших шляхів між вузлами i та j, що проходять через вузол m [1].

2.1.4 Коефіцієнт кластеризації

Д. Уаттс (D. Watts) і С. Строгатц (S. Strogatz) в 1998 році визначили такий параметр мереж, як коефіцієнт кластеризації. Цей коефіцієнт характеризує тенденцію до утворення груп взаємопов'язаних вузлів, так званих клік (clique). Для конкретного вузла коефіцієнт кластеризації показує, скільки найближчих сусідів даного вузла є також найближчими сусідами один для одного. Відношення реальної кількості зв'язків, які з'єднують найближчих сусідів даного вузла, до максимально можливого (такого, при якому всі найближчі сусіди даного вузла були б з'єднані безпосередньо один з одним) називається коефіцієнтом кластеризації вузла (c_i). Природно, ця величина не перевищує одиниці.

Будемо називати два вузла сусідами, якщо існує зв'язок між ними. Для комплексних мереж характерно, що два вузли, сусідніх до якого-небудь вузла, часто також є сусідами між собою. Щоб охарактеризувати це явище і був запропонований кластерний коефіцієнт c_i вузла i. Припустимо, вузол має ступінь k_i (це означає, що у нього k_i сусідів). Між ними може бути максимум $k_i(k_i-1)$ зв'язків. Тоді

$$c_i = \frac{2n_i}{k_i(k_i-1)}, \qquad (2.5)$$

де n_i – число зв'язків між сусідами вузла *i*.

Коефіцієнт кластеризації може визначатися як для кожного вузла, так і для всієї мережі:

$$C = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i, \qquad (2.6)$$

де n – число вузлів.

Крім коефіцієнта кластеризації (2.6) застосовується також коефіцієнт транзитивності [1], який визначається як утроєне відношення числа Δ_i «трикутників» (три вершини, пов'язані трьома ребрами) в графі до числа V_i «вилок» (число шляхів довжини 2) [1]:

$$T = \frac{\sum \Delta_i}{\sum V_i}. \quad (2.7)$$

Є можливість обчислити транзитивність без підрахунку трикутників та вилок (2.7), а грунтуючись на матриці суміжності (A) мережі:

$$T = \frac{tr(A^3)}{\sum k_i(k_i - 1)} = \frac{\sum (A^3)_{ii}}{\sum k_i(k_i - 1)}. \quad (2.8)$$

2.2 Безмасштабні мережі

Безмасштабна мережа (англ. scale-free network), або масштабно-інваріантна мережа (МІМ) – це мережа, в якій ступені вершин розподілені за степеневим законом або законом, що асимптотично наближається до степеневого. Це означає, що частка вузлів в мережі, які мають k зв'язків для великих значень k становить

$$p(k) \approx ck^{-\gamma}, \quad (2.9)$$

де c – нормализуючий параметр;

γ – індивідуальна характеристика мережі, яка, як правило, знаходиться в інтервалі $2 < \gamma \leq 3$ (але в рідкісних випадках виходить за його межі).

Емпірично було встановлено, що багато природно виникають мережі – соціальні, комунікаційні, біологічні, графи цитувань, посилань в WWW, і інші системи – добре моделюються безмасштабними графами.

У 1976 році Дерек Джон де Соллі Прайс показав, що в мережах, утворених посиланнями в наукових публікаціях, число посилань на публікацію має розподіл з важкими хвостами, тобто розподіл, схожий на ступеневий закон. Проте, у своїх роботах він не використовував термін «безмасштабні мережі». Цей термін з'явився набагато пізніше, в кінці 90-х років, коли Альберт-Ласло Барабаші в своїх дослідженнях топології всесвітньої павутини виявив вузли-концентратори, які мають велику кількість зв'язків. Згодом він виявив подібні вузли і в інших мережах, після чого дав знайденому класу мереж назву «безмасштабні мережі» [8].

Масштабно-інваріантна мережа – це зростаюча структура, що складається вузлів-елементів, які зв'язуються особливим чином. Її побудова починається з єдиного самотнього вузла. Потім на кожному кроці еволюції в структуру додається по одному новому елементу, який зв'язується з одним з вже наявних в мережі елементів. Так мережа постійно збільшується, зростає.

Головна відмінна риса безмасштабних мереж – це існування вузлів-концентраторів (англ. hubs), ступені яких дуже великі в порівнянні зі ступенями інших вузлів.

Безмасштабні мережі чутливі до пошкоджень. Якщо один з концентраторів буде втрачено, то багато зв'язків обірвуться, середня довжина шляху між вузлами значно збільшиться і, навіть, мережа може стати фрагментовано., тобто розпастися на незв'язані кластери.

Ключова особливість масштабно-інваріантною мережі полягає в особливому алгоритмі з'єднання вузлів. Новий вузол тим імовірніше приєднається до якогось старого вузла, чим більше інших вузлів до нього вже приєдналося. Нехай, наприклад, у нас є мережа, в якій є три вузла (рис. 2.1).

Ймовірність приєднання нового вузла до одного з існуючих дорівнює $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$, тому що відповідні вузли мають зв'язки в пропорції $1:2:1$. В даному випадку з ймовірністю $2/4=1/2$ новий вузол приєднається до другого вузла, і це найбільш вірогідний розвиток подій. Взагалі, вузол тим швидше накопичує нові зв'язки, ніж їх у нього більше, тому що найімовірніше, що нові вузли будуть приєднуватися саме до нього. Тобто, «багаті» вузли стають ще «багатшими», та навпаки: «бідні» вузли схильні так і залишатися «бідними».

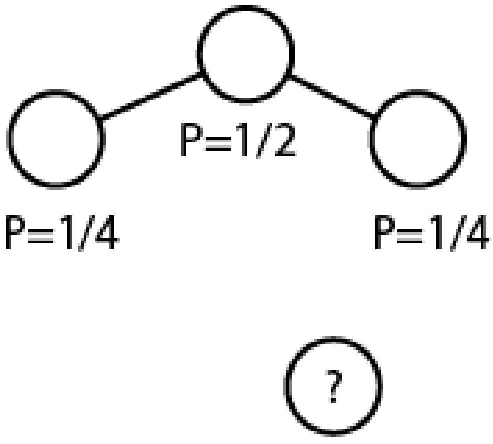


Рисунок 2.1 – Приклад мережі з трьома вузлами

В результаті розвивається мережа характерного вигляду, яку і називають масштабно-інваріантною (рис. 2.2).

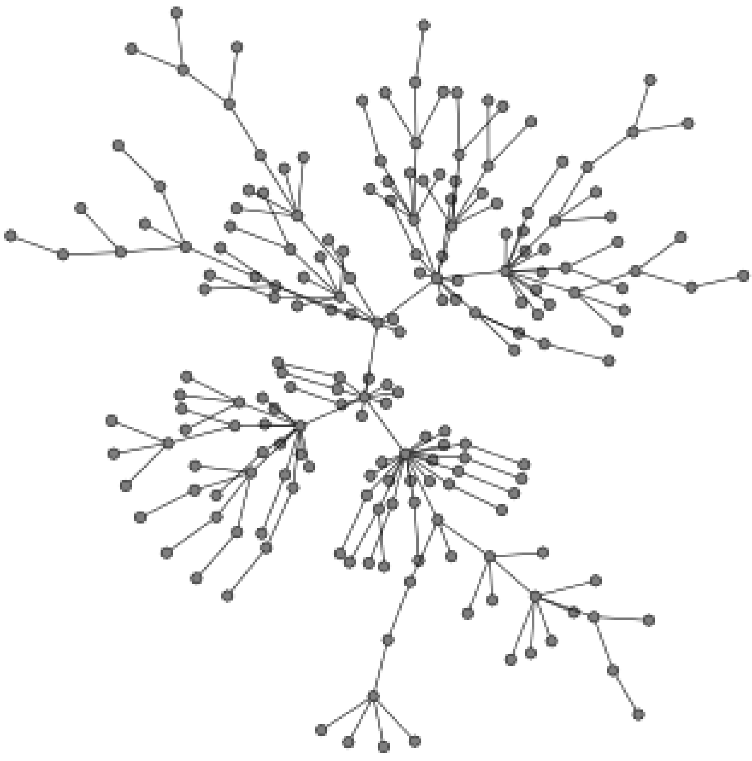


Рисунок 2.2 – Приклад масштабно-інваріантної мережі

Слід зауважити, що це зображення масштабно-інваріантною мережі умовно, тому що насправді у вузлів моделі немає якогось просторового розташування, воно для вузлів не задано. Можливо б було зобразити цю мережу яким завгодно заплутаним чином.

Очевидна особливість цієї структури – є дуже багато вузлів, у яких мало зв'язків, і дуже мало вузлів, у яких багато зв'язків. Іншими словами, ранговий розподіл вузлів за кількістю зв'язків зазвичай має ясно виражений ступеневий характер (рис. 2.3).

Важливо, що цей ступеневий розподіл виникає вже на ранніх стадіях еволюції моделі, коли вузлів ще не більше 100, і зберігається майже незмінним на всьому доступному для огляду за допомогою звичайного комп'ютера горизонті часу.

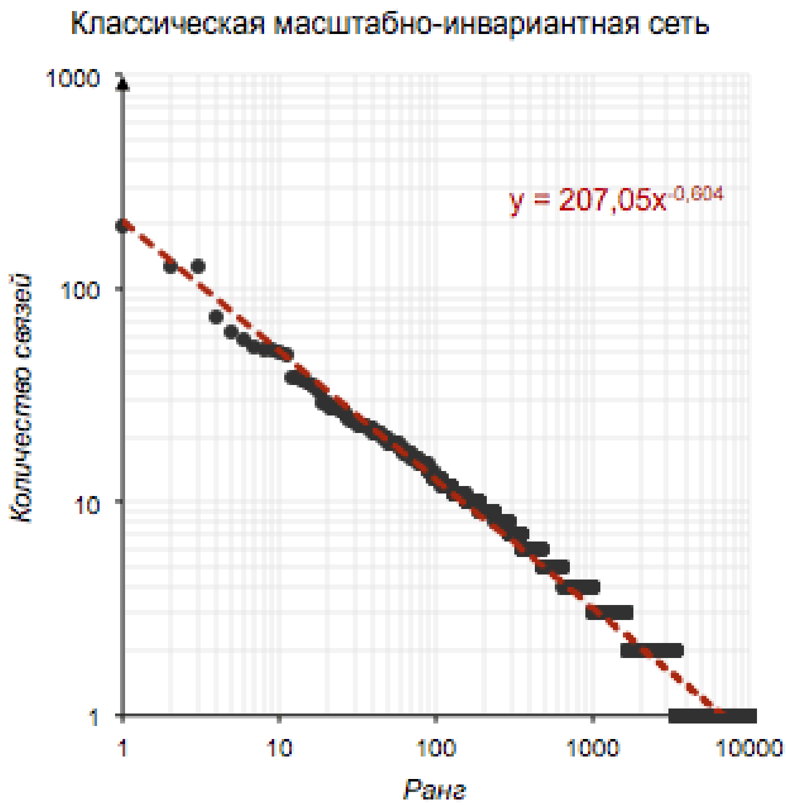


Рисунок 2.3 – Приклад графіка розподілу ступенів вузлів в масштабно-інваріантної мережі

Ступеневий розподіл характерний для параметрів, які не мають характерного масштабу, тобто, для масштабно-інваріантних. В даному випадку таким параметром є кількість зв'язків у вузлів. Ступеневий розподіл їх кількості означає, що у цього параметра немає якогось "правильного" або характерного значення, тому він і зветься масштабно-інваріантним.

Модель масштабно-інваріантної мережі дуже проста, і це робить її привабливою як пояснення походження ступеневих розподілів багатьох параметрів процесів та явищ реального світу. Наприклад, з її допомогою пояснюють ступеневість розподілу популярності веб-сайтів, ступеневу статистику завантаження інтернет-вузлів тощо.

Нехай кожен вузол являє собою конкретне географічне місце, а зв'язки між ними – це люди. Тоді появу нового вузла можна зіставити з ситуацією народження нової людини в певній географічній точці, а зв'язок, яку новий вузол протягне до одного з уже наявних вузлів – це відображення вибору місця проживання, який в кінцевому підсумку зробить ця людина. Правило «багатий стає багатшим» в даному випадку відображає перевагу людей вибирати для життя ті місця, де вже мешкає багато людей, тому що в цьому випадку відкриваються максимальні можливості для реалізації своїх здібностей, збагачення тощо [9].

У 1999 році фізик з університету Нотр Дам (США) Л. Барабаші (Laszlo Barabasi) разом зі своєю аспіранткою Р. Альберт (Reka Albert) вивчали властивості реальних мереж з дещо іншої точки зору. Якщо Строгатц і Ваттс в своєму дослідженні мереж виходили з феномена тісного світу, то Барабаші і Альберт вирішили дослідити закон розподілу вузлів деяких реальних мереж за кількістю зв'язків. Результат також виявився несподіваним. Замість розподілу числа зв'язків за законом Пуассона, який має строгий максимум близько середнього значення, для багатьох реальних мереж, наприклад, таких як метаболічні мережі і білкові взаємодії в клітинах, структура авіаційних повідомлень в США, структура Інтернету і його віртуального двійника World Wide Web тощо, такого середнього значення не існує, а відповідний імовірнісний розподіл підпорядковується властивому всім критичним станам ступеневим законом.

Таким чином, у багатьох реальних мережах невелике число вузлів містить дуже велике число зв'язків, а величезна кількість вузлів містить лише кілька зв'язків. Такі мережі отримали назву безмасштабних мереж (scale free networks). У своїх роботах Барабаші і Альберт, а також Х. Джеонг описали ті статистики інтернету, які лягли в основу науки про зростання цієї мережі – науки, що має глибокі додатки як в власне інтернетскіх проблематики, так і в численних близьких дисциплінах.

Насправді, більшість реальних мереж (соціальні, біологічні, транспортні та ін.) Мають схожу «топологію». Мережа інтернет – це так званий веб-граф, вершини якого суть будь-які конкретні структурні одиниці в інтернеті: мова може йти про сторінки, сайтах, хостах, власників тощо. Для визначеності будемо вважати, що вершинами веб-графа служать саме сайти. Ребрами ж ми будемо з'єднувати ті вершини, між якими є посилання. При цьому розумно проводити стільки ребер між двома вершинами, скільки є посилань між відповідними сайтами. Більш того, ребра природно вважати спрямованими. Таким чином, веб-граф орієнтований і він може мати кратні ребра, петлі і навіть кратні петлі (посилання цілком можуть йти з однієї сто–рінки даного сайту на іншу його сторінку). Це такий «псевдомультіорграф». Відразу зрозуміло, що для подібного «звіра» модель Ердеша – Рен`ї навряд чи підходить. Тепер ми готові перерахувати найосновніші моменти дослідження Барабаші – Альберт. По суті, цих моментів всього три. По-перше, веб-граф – це дуже розріджений граф. У нього на t вершинах приблизно $k \cdot t$ ребер, де $k \geq 1$ – деяка константа. Однак – і це по-друге, – діаметр веб-графа дуже скромний. У 1999 році він мав величину. Це добре всім відоме властивість будь-якої соціальної мережі, яке прийнято в повсякденній мові характеризувати виразом «світ тісний». Наприклад, говорять про те, що будь-які дві людини в світі «знайомі через 5 – 6 рукостискань». Точно так само і сайти: «клікаючи" по посиланнях, можна з будь-якого сайту на будь-який інший перейти за 5-7 натискань клавіші комп'ютерної миші. Звичайно, тут є важливе застереження. Деякі сайти, які ледь з'явилися, можуть не бути пов'язані з зовнішнім по відношенню до них світом. Кілька правильніше сказати, що в веб-графі є гігантська компонента, і вже її діаметр невеликий. Таким чином, веб-граф дуже специфічний: будучи розрідженим, він, тим не менш, в даному разі тісний. По-третє, у веб-графа вельми характерний розподіл ступенів вершин.

Цей цікавий фактріднить інтернет з дуже багатьма реальними мережами – біологічними, соціальними, транспортними. Всі вони підкоряються степеневим законом, тільки у кожної з них свій показник. Через перелічених спостережень, не залишається ніяких сумнівів в тому, що модель Ердеша – Рен`ї не може бути застосована для опису росту інтернету і подібних мереж. Якщо підбором ймовірності p ще можна домогтися розрідженості і тісноти (хоча і не з тими параметрами), то ступеневий закон зовсім вже не має відношення до схеми Бернуллі, в рамках якої з'являються ребра звичайного випадкового графа. Так, у моделі Ердеша – Рен`ї ступінь кожної вершини випадкового графа розподілена за біноміальним законом з параметром p, і при тих p, які мало-мальськи гарантують розрідженість, вказаний біноміальний розподіл апроксимується пуасонівським, а зовсім не ступеневим. Самі Барабаші і Альберт запропонували дуже розумний погляд на процес формування інтернету. Давайте вважати, сказали вони, що в кожен момент часу з'являється новий сайт, і цей сайт ставить фіксовану кількість посилань на своїх попередників. На кого він вважатиме за краще послатися? Напевно, на тих, хто і так вже популярний. Можна припустити, що ймовірність, з якою новий сайт поставить посилання на один з колишніх сайтів, пропорційна числу вже наявних на той сайт посилань. Моделі випадкових графів, засновані на описаній ідеї, називаються моделями переважного приєднання. У своїх роботах Барабаші і Альберт ніяк не конкретизували, яку саме з цих моделей вони пропонують розглядати. А ці моделі виключно різнорідні за своїми властивостями. Адже можна ставити посилання незалежно один від одного, а можна ще й залежності між різними посиланнями з одного сайту враховувати.

Нещодавно отримані дані про те, що функціональні зв'язки в мозку людини утворюють безмасштабні мережі. У мозку тварин і людини постійно йдуть процеси самоорганізації і розпаду функціональних нейромережевих структур. Кожна така мережа, яка об'єднує нейронні ансамблі з різних відділів мозку, створюється для реалізації певної функції мозку – поведінкової, когнітивної тощо. Саме такі функціональні нейронні мережі стали об'єктом вивчення групи дослідників на чолі з Д. Чиалво (Dante Chialvo), метою яких було перевірити можливість застосування ідей і методів сучасної теорії мереж (безмасштабні мережі, мережі тісного світу та ін.) до топології реальних функціональних структур мозку. Використовуючи метод магнітно-резонансного зображення, вимірювалася активність мозку під час здійснення простого моторного дії на кожному часовому інтервалі в 2.5 секунди протягом 400 таких інтервалів. Вивчалася область мозку розміром $36 \times 64 \times 64$ просторових осередків з розміром кожного осередку $3 \times 3.475 \times 3.475$ мм. Фіксувалася активність кожного такого осередку при виконанні таких простих функцій, як, наприклад, стукіт пальцем по столу. При реєстрації активності кожної такої комірки можна визначити, які клітинки взаємопов'язані між собою (якщо активність осередків в різних частинах мозку проявляє властивість синхронності, то це вказує на те, що між ними є зв'язок). Виявилося, що такі пов'язані осередки утворюють безмасштабную мережу, що містить 31 203 вузла, з властивостями тісного світу $P(k) \approx k^{-\gamma}$, $\gamma \approx 2$.

Останнім часом структурні властивості продуктів художньої творчості також стали вивчатися із застосуванням методів теорії складних мереж. Наприклад, партитура музичного твору легко перетворюється в мережеву структуру, якщо в якості вузлів такої мережі взяти музичні ноти всіх можливих тривалостей. Число вузлів в такій мережі не перевищуватиме 1800. Справді, число клавішею у рояля дорівнює 88 і, множачи це число на 20 –

число тривалостей ноти (половинні, чверті, восьмі і т.д.), отримуємо 1760. Зв'язки між вузлами (нотами) в мережі встановлюються за хронологічним принципом: якщо нота I починає звучати в момент часу t, а нота J в цей момент закінчує своє звучання, то між відповідними вузлами мережі є зв'язок.

Чи (Xiaofan Liu), Тсе (Chi K. Tse) і Смол (Michael Small) з політехнічного університету Гонконгу проаналізували статистичні властивості мереж, побудованих за описаним вище принципом, для творів Баха, Моцарта, Шопена і сучасних китайських композитів, які працюють в жанрі поп -музики. Всі ці мережі виявилися безмасштабнимі. Середнє число кроків між вузлами в цих мережах варіюється в діапазоні від 2.8 до 4.2 [4].

2.3 Властивості мереж Барабаші-Альберт

Модель Барабаші-Альберт (БА) – алгоритм генерації випадкових безмасштабних мереж з використанням принципу переважного приєднання. Безмасштабние мережі широко поширені в природних мережах (харчові ланцюжки) і мережах, створених людиною (Інтернет, всесвітня павутина, мережі цитування, деякі соціальні мережі) [10].

Барабаші і Альберт запропонували просту і елегантну модель виникнення та еволюції безмасштабних мереж. Вони показали, що для виникнення безмасштабних мереж необхідні дві умови [11]:

– зріст: починаючи з невеликого числа m_0 вузлів, на кожному часовому кроці додається один новий вузол з $m \le m_0$ зв'язками, які з'єднують цей новий вузол з m різними вже існуючими вузлами;

– переважне приєднання (preferencial attachment). Коли обираються вузли, до яких приєднується новий вузол, передбачається, що ймовірність, з якою новою вузол буде з'єднуватися з вже існуючим вузлом, залежить від числа зв'язків, які він має.

Цей принцип був узятий Прайсом і Саймоном для пояснення походження ступеневого закону в соціальних явищах. Фізики розглядають такого роду явища як властивості критичних станів.

Обчислення показують, що принцип переважного приєднання дійсно призводить до безмасштабної мережі з показником ступеня $\gamma = 3$. Це досить рідко зустрічається в реальних мережах закон розподілу, але цінність моделі БА полягає в тому, що вона показує принципову можливість генерації безмасштабної мережі на базі простих припущень. Розглянемо, як узагальнити цю модель, щоб отримати ступеневий закон з довільним показником ступеня.

Нехай ймовірність приєднання нової вершини до вузла зі ступенем q пропорційна функції $f(q)$, яка називається функція переваги. У моделі БА $f(q) = q$. Трохи змінимо цю функцію; нехай вона буде лінійною:

$$f(q) = q + A, \qquad A = a \cdot m, \tag{2.10}$$

де A має сенс «додаткової привабливості вузла», $a > -1$.

Можна показати, що такий лінійний закон переваг призводить до безмасштабної мережі з $\gamma = 3 + a$, тобто в діапазоні $2 < \gamma < \infty$. Якщо ж функція переваги має вигляд $f(q) = q^{\theta}$, то можна показати, що механізм переважного приєднання генерує ступеневий розподіл і, відповідно, безмасштабну мережу, тільки при значенні $\theta = 1$, тобто тільки коли функція переваги є лінійною [17].

Принцип переважного приєднання полягає в тому, що чим більше зв'язків має вузол, тим більш переважно для нього створення нових зв'язків. Вузли з найбільшим ступенем мають більше можливостей забирати собі зв'язку, що додаються в мережу. Інтуїтивно, принцип переважного приєднання може бути зрозумілий, якщо ми думаємо в термінах соціальних мереж, які об'єднують людей. Тут зв'язок від А до В означає, що людина А «знайома» з людиною B. Сильно пов'язані вузли представлені відомими людьми з великим числом зв'язків. Коли новачок потрапляє в співтовариство, для нього / неї більш переважно зв'язатися з одним з відомих людей, ніж з відносно невідомим. Подібним чином у всесвітній мережі сторінки зв'язуються з хабами, наприклад, з добре відомими сайтами, як Гугл або Вікіпедія, ніж зі сторінками, які мало, кому відомі. Якщо вибирати для зв'язку нову сторінку випадковим чином, то ймовірність вибору певної сторінки буде пропорційна її ступеню. Це пояснює принцип переважного приєднання.

Принцип переважного приєднання – приклад позитивного зворотного зв'язку, де спочатку випадкові варіації (один вузол спочатку має більше посилань або починає збирати посилання раніше інших) автоматично посилюються, тим самим значно збільшуючи розрив. Це також іноді називають ефектом Матвія, «багаті стають багатшими», або автокаталізу в хімії.

2.4 Фрактальні властивості мереж Барабаші-Альберт

Фрактал (лат. Fractus – подрібнений, зламаний, розбитий) – множина, яка має властивість самоподібності (об'єкт, в точності або приблизно збігається з частиною себе самого, тобто ціле має ту ж форму, що і одна або більше частин). У математиці під фракталами розуміють множини точок в евклідовому просторі, які мають дробову метричну розмірність або метричну розмірність, відмінну від топологічної, тому їх слід відрізняти від інших геометричних фігур, обмежених кінцевим числом ланок. Самоподібні фігури, що повторюються кінцеве число раз, називаються предфракталамі.

Перші приклади самоподібних множин з незвичайними властивостями з'явилися в XIX столітті в результаті вивчення безперервних недіфференціруемих функцій. Термін «фрактал» введений Бенуа Мандельбротом в 1975 році і отримав широку популярність з виходом в 1977 році його книги «Фрактальна геометрія природи» [11]. Особливу популярність фрактали знайшли з розвитком комп'ютерних технологій, що дозволили ефектно візуалізувати ці структури.

Фрактальна розмірність (fractal dimension) – один із способів визначення розмірності множини в метричному просторі. Фрактальну розмірність n-мірної множини можна визначити за допомогою формули:

$$D = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N_\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)}, \tag{2.11}$$

де N_ε – мінімальне число n-мірних «куль» радіусу ε, необхідних для покриття множини [12].

Фрактальна розмірність може приймати не ціле числове значення.

Одним з властивостей фракталів є те, що фрактальні об'єкти мають розмірність, відмінну від евклідової (інакше кажучи топологічної) розмірності. Фрактальна розмірність, є показником складності кривої. Аналізуючи чергування ділянок з різної фрактальної розмірністю і тим, як на систему впливають зовнішні і внутрішні фактори, можна навчитися передбачати поведінку системи. І що найголовніше, діагностувати і прогнозувати нестабільні стану.

Фрактальна розмірність була вперше введена як коефіцієнт, що описує геометрично складні форми, для яких деталі є більш важливими, ніж повний малюнок [15]. Для множин, що описують звичайні геометричні форми, фрактальна розмірність дорівнює звичайній топологічній розмірності. Таким чином, для множин, що описують точки, теоретична фрактальна розмірність дорівнює 0; 1 для множин, що описують лінію (множини, що мають тільки довжину); 2 для множин, що описують поверхню (мають довжину і ширину); 3 для множин, що описують обсяг (множини, що мають довжину, ширину і висоту). Але це змінюється для фрактальних множин. Якщо фрактальна розмірність множини перевищує топологічну розмірність, то вважають, що множина має фрактальну геометрію [16].

На відміну від топологічної розмірності, фрактальний коефіцієнт може приймати не цілочисельне значення, показуючи те, що фрактальна множина заповнює простір не так як його заповнює звичайна геометрична множина. Наприклад, крива з фрактальної розмірністю дуже близькою до 1, скажімо 1.1, поводиться цілком як звичайна лінія, але крива з фрактальної розмірністю 1.9 намотана в просторі, майже як поверхня. Подібним чином, веде себе поверхня з фрактальної розмірністю 2.1. Вона заповнює простір майже як звичайна поверхня, але поверхня з фрактальної розмірністю 2.9 згортається і прагне заповнити простір майже як обсяг.

Всі «нормальні» просторові фрактали зобов'язані мати ступеневу структурну статистику з показниками $\theta < 2$. Причина цього в тому, що точок, що належать фракталу в просторі, не може бути більше точок самого простору.

Однак це здається великим обмеженням: існують приклади натуральної ступеневої статистики з показниками більше 2, і значить, нам доводиться вважати, що в цих випадках феномени не мають фрактального устрою, і це суперечить уявленню про глибинну і необхідністю зв'язку між ступеневою статистикою і фрактальної структурою явищ . Крім того, є хороший приклад – масштабно-інваріантна мережа, для якої $\theta = 3$.

Її структура очевидно фрактальна, але вона, по видимому, не є «нормальним» фракталом.

Дійсно, ця мережа не є просторовим або, точніше, геометричним фракталом. Вона є прикладом графічного фрактала. І як ми зараз побачимо, звичні для нас фрактали, що розгортаються в геометричному просторі, є лише окремим випадком графічних фракталів.

Слово «графічні» тут відбувається від слова граф – так в математиці називають абстрактні структури, що складаються з наборів вузлів, між якими можуть пролягати зв'язки.

Масштабно-інваріантноа мережу є особливим типом графа –

деревовидним. Однак, в загальному випадку структура вузлів і зв'язків між ними може бути будь-якою. Звернемо увагу на важливий момент: нам немає необхідності вважати, що вузли графа знаходяться в якихось просторових відносинах один з одним, для них поняття положення в просторі не визначено.

Відомо два альтернативні способи оцінки фрактальної розмірності графів, які втім, між собою тісно пов'язані і доповнюють один одного.

2.4.1 Метод зростаючого кластера

Перший відомий метод визначення фрактальної розмірності графів називається методом зростаючого кластера:

$$D_G = \lim_{R \to \infty} \frac{\ln(S(R))}{\ln(R)}, \tag{2.12}$$

де R – відстань від деякого вузла (радіус);

$S(R)$ – кількість доступних вузлів всередині радіусу (зростаючий кластер).

Перш за все, необхідно розподілити вузли мережі по радіусах R від її центру, тобто від першого вузла при її побудові (рис. 2.4).

Щоб з'ясувати, як виглядає залежність $S(R)$ нам необхідно знати, як розподіляються вузли мережі по радіусах R в залежності від загальної кількості вузлів в мережі. При побудові масштабно-інваріантної мережі кожен вузол тим більше ймовірно приєднує до себе новий, чим більше зв'язків він уже має. Те ж саме вірно щодо масивів вузлів: масив тим більше ймовірно приєднає до себе ще один вузол, чим більшою часткою зв'язків володіє масив в загальній кількості зв'язків в мережі. При цьому, природно, знову приєднаний вузол виявляється не в тому масиві, що його приєднав, а в наступному по радіусу.

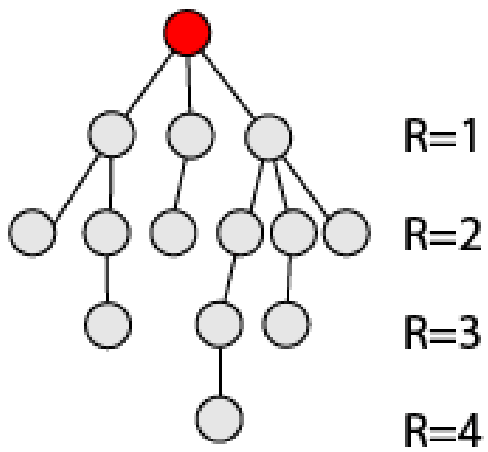


Рисунок 2.4 – Розподіл вузлів за рівнями R

Наприклад, масив $R=2$ містить 6 вузлів, які мають в цілому 10 зв'язків з вузлами інших масивів (рис. 2.5). Зауважимо, що всього в мережі є $2(N-1)\approx 2N$ зв'язків (кожне з'єднання між двома вузлами дає два зв'язки). У нашому випадку в мережі всього 28 зв'язків. Коли в системі з'являється новий вузол, з ймовірністю 10/28 він приєднається до одного з вузлів масиву $R=2$ – саме така частка зв'язків цього масиву в загальній кількості зв'язків в мережі. Але приєднавшись до цього масиву, новий вузол опиниться в масиві $R=3$.

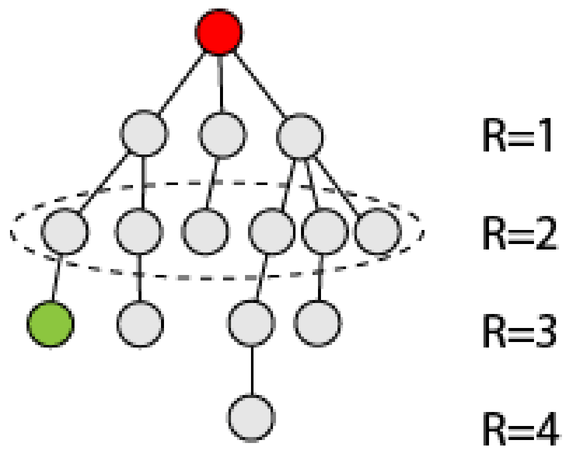


Рисунок 2.5 – Приєднання нового вузла

На основі цього визначення неважко побудувати практичний метод оцінки фрактальної розмірності графа: потрібно вибрати в ньому якийсь типовий вузол, і стежити, як з ростом відстані R від нього збільшується доступна кількість вузлів $S(R)$. Якщо граф є фракталом, то залежність $\ln(S(R))$ від $\ln(R)$ повинна мати вигляд лінійної функції:

$$y = D_G \times x + b\,. \tag{2.13}$$

Постійна b характеризує локальну структуру графічного фрактала і не впливає на його розмірність.

Приклад, графіка залежності $\ln(S(R))$ від $\ln(R)$ для деякої МІМ показаний на рисунку 2.6. Спробуємо оцінити фрактальну розмірність цієї мережі.

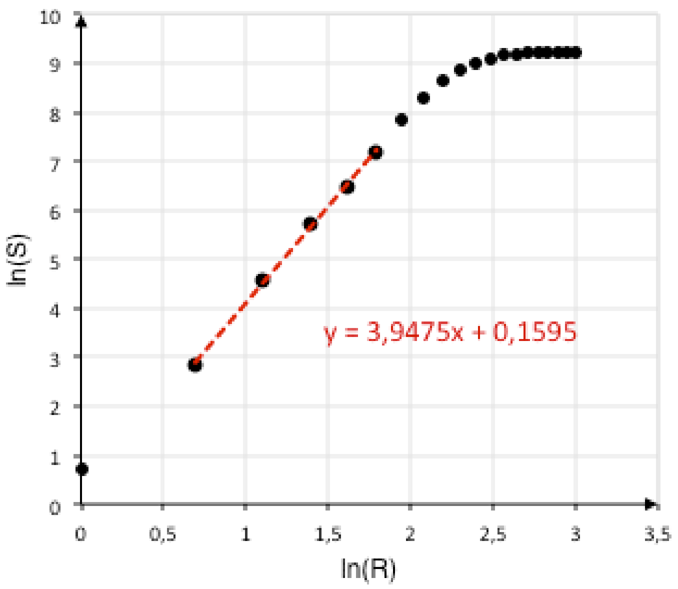


Рисунок 2.6 – Приклад графіка залежності $\ln(S(R))$ від $\ln(R)$

Графік дійсно лінійний на початковій ділянці, але потім приходить до насичення, і кількість доступних вузлів перестає рости з відстанню. Це, звичайно, результат обмеженого розміру нашої мережі. Проте, по початковій прямолінійній ділянці ми можемо оцінити фрактальну розмірність мережі, якою вона бачиться з обраного вузла: $D_G \approx 3.95$.

Серйозний недолік цього методу визначення та оцінки фрактальної розмірності графів – необхідність вибирати типовий стартовий вузол, центр зростаючого кластера. Це не проблема, якщо граф більш-менш однорідний – як метричні графи. Але, наприклад, масштабно-інваріантна мережа дуже неоднорідна. У ній є багато вузлів, які мають мало зв'язків з іншими і небагато вузлів, які мають дуже велику кількість зв'язків (хаби). При побудові мережі такими хабами зазвичай виявляються перші вузли мережі. Тому оцінка розмірності при побудові кластера навколо них істотно відрізняється, ніж при випадковому виборі типового вузла.

Насправді, розмірність масштабно-інваріантної мережі, як вона бачиться з її вершини (найкрупнішого хаба), відповідає рівнянню:

$$D_G = \frac{\ln(\sqrt{N})}{e} + \frac{1}{2}. \tag{2.14}$$

2.4.2 Метод покриття плямами

Другий метод оцінки фрактальної розмірності графів дещо схожий на класичний метод оцінки розмірності Мінковського фракталів в просторі. Класичний метод спирається на рівняння

$$D = \lim_{u \to \infty} \frac{\ln(N(u))}{\ln(1/u)}, \tag{2.15}$$

де $N(u)$ – кількість графічних примітивів;

u – лінійний розмір примітива.

Якщо для покриття, наприклад, фрактала на площині потрібно $N(u)$

квадратиків, що мають довжину сторони u (і, відповідно, площу u^2), то величина $\ln(N(u))/\ln(1/u)$ в межі дуже маленьких квадратиків прагне до розмірності Мінковського цього фрактала.

Необхідно скористатися поняттям відстані між вузлами графа як мінімальної кількості кроків, за які можна дійти від одного до іншого. Тоді можна говорити про «плями» різного розміру, які охоплюють вузли графа: будемо вважати, що пляма має розмір L, якщо відстань між будь-якими вузлами всередині плями не перевищує $L-1$ (рис. 2.7).

Тут, наприклад, одна пляма має розмір $L=2$: в нього входить всього два вузла, і від одного до іншого можна дістатися за один крок. Друга пляма має розмір $L=3$, тому що максимальна відстань між вузлами в плямі дорівнює двом.

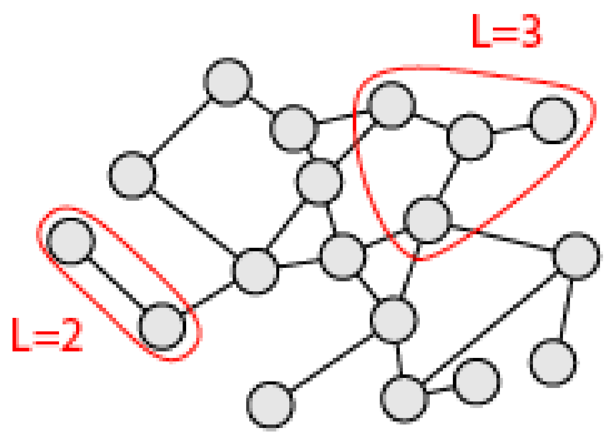


Рисунок 2.7 – Приклади плям на фрагменті мережі

При збільшенні розміру плям, якими ми покриваємо граф, нам їх потрібно все менше, щоб покрити всі вузли графа. При цьому якщо граф є фракталом, то виявиться, що

$$D_G = \lim_{L\to\infty} \frac{\ln \dfrac{M}{N(L)}}{\ln(L)}, \tag{2.16}$$

де M – загальна кількість вузлів в графі;

L – розмір плями;

$N(L)$ – кількість плям розміру L, які повністю покривають граф.

Це і є друге визначення фрактальної розмірності графа і воно, як легко бачити, дійсно дещо схоже на визначення розмірності просторових фракталів.

2.5 Оцінювання меж коефіцієнта асортативності БА-мереж

Коефіцієнт асортативності визначається як коефіцієнт кореляції між поєднаними вузлами за кількістю зв'язків. Його можна обчислити як [15]:

$$r = \frac{S_1 N_3 - S_2^2}{S_1 S_3 - S_2^2}, \tag{2.17}$$

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} d_i^k \;\; N_3 = d^T A d = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} d_i d_j, \tag{2.18}$$

де A – матриця суміжності графа;

d_i – ступені вузлів.

У масштабно-інваріантній мережі ранговий розподіл вузлів за їхнім ступенем є асимптотично ступеневим, тобто математичне очікування ступені вузла з порядковим номером (рангом) i дорівнює [14]:

$$d_i = c i^{-\beta} \tag{2.19}$$

з показником розподілу $0 < \beta < 1$.

Для найбільш поширеної моделі SF-мереж – BA-моделі цей показник дорівнює ½. Якщо при цьому кожен новий вузол з'єднується з існуючими $m = 2$ ребрами, то розподіл (2.19) має вигляд

$$d_1 = d_2 \approx \sqrt{\pi n}, \quad d_i = 2\frac{\Gamma(n-1)\cdot\Gamma(i-\frac{3}{2})}{\Gamma(n-\frac{3}{2})\cdot\Gamma(i-1)} \approx 2\sqrt{\frac{n-1}{i-1}},\ i > 2. \qquad (2.20)$$

Легко бачити, що єдиний параметр у (2.17), який залежить від конфігурації мережі, тобто від матриці суміжності A її графа – це N_3. Тому граничні значення коефіцієнту асортативності відповідають таким матрицям суміжності A, які забезпечують екстремальні значення N_3:

$$N_3 = d^T Ad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} d_i d_j \to extr \qquad (2.21)$$

з обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = d_i \ A_{ij} \in \{0,1\} \ A_{ij} = A_{ji} \ A_{ii} = 0\,. \qquad (2.22)$$

Для мереж загального вигляду коефіцієнт асортативності знаходиться у межах $-1 \le r \le 1$, але наявність обмежень (2.22) має призводити до звуження меж припустимих значень коефіцієнту асортативності.

2.5.1 Оцінювання нижньої межі коефіцієнта асортативності

Оскільки цільова функція (2.21) є монотонною, до для розв’язку задачі (2.21)-(2.22) можна застосувати наступний жадібний алгоритм [16]: у зовнішньому циклі вузли проглядаються послідовно, починаючи з першого. У вкладеному циклі поточний вузол i з’єднується з d_i вузлами j, які обираються послідовно серед таких, які ще мають вільні зв’язки. У випадку мінімізації цільової функції (2.21) вкладений цикл алгоритма є зворотнім, тобто поточний вузол (i) намагається з'єднуватись з найбіднішими на зв'язки вузлами. Якщо ж критерій (2.21) максимізується, то вкладений цикл є прямим.

Для оцінювання мінімального значення критерію позначимо $\bar{j} = \varphi(i)$ – середній номер вузлів, інцидентних до i-го. Оскільки такі вузли обираються послідовно, а їхня кількість становить d_i, то згідно з теоремою про середнє

$$N_3^{\min} = \sum_{i=1}^{k} d_i^2 d_{\bar{j}} . \tag{2.23}$$

Оцінити значення $\bar{j}$ можна наступним чином: припустимо, що вузли з номерами, меншими за i, «захоплюють» всі зв'язки у вузлів, що мають номери, більші за $\bar{j}$. Таке припущення відповідає рівнянню

$$\sum_{j<i} d_j = \sum_{j>\bar{j}} d_j . \tag{2.24}$$

Абстрагуючись від цілочисельності ступенів вузлів та їхніх індексів, на підставі рівняння розподілу d_i (2.20) маємо:

$$\sqrt{i} + \sqrt{\bar{j}} = \sqrt{n} . \tag{2.25}$$

З (2.24)-(2.25) також випливає, що межа сумування у (2.23) визначається умовою $k = \varphi(k)$, тобто $k = 1 + \lfloor n/4 \rfloor$.

Апроксимуючі суму (2.23) інтегралом, та враховуючи (2.20) та (2.25), отримаємо:

$$N_3^{\min} \approx 2\sum_{i=1}^{k} \frac{(4n)^{3/2}}{i(\sqrt{n}-\sqrt{i})} \approx 16n \cdot (\ln(n)+a), \tag{2.26}$$

де $a = 1+\gamma$, $\gamma \approx 0.5772$ – константа Ейлера-Машероні.

Як випливає з (2.18), параметри S_1, S_2, S_3 не залежать від конфігурації мережі, тобто від матриці суміжності A її графа, а залежать тільки від розподілу вузлів та розміру мережі. Можна довести, що асимптотичні (при $n \to \infty$) оцінки цих сум мають вигляд відповідно

$$S_1 = 4n-6, \quad S_2 \approx 4n\left(\ln(n)+c_2\right), \quad S_3 \approx 4c_3 \cdot n^{3/2}. \tag{2.27}$$

Числові значення параметрів c_2, c_3, можна знайти шляхом чисельного моделювання.

Згідно з (2.21) та (2.27) точна та асимптотична оцінки нижньої межі коефіцієнту асортативності (2.17) становлять

$$r_{\min} \approx \frac{4\left(\ln(n)+a\right) - \left(\ln(n)+c_2\right)^2}{c_3\sqrt{n} - \left(\ln(n)+c_2\right)^2}, \tag{2.28}$$

$$\lim_{n\to\infty} r_{\min} \approx \frac{-\ln^2(n)}{c_3\sqrt{n}}. \tag{2.29}$$

2.5.2 Оцінювання верхньої межі коефіцієнта асортативності

У випадку максимізації цільової функції (2.21) вузли з номерами $i = 1,\dots,d_1+1$ (тобто перші $d_1 = \sqrt{\pi(n-1)}$ вузлів) з’єднуються з d_i першими ж вузлами, тобто з $j = 1,\dots,d_i+1$, формуючи найбільший кластер. Внесок цього кластеру у цільову функцію (2.21) становить

$$N_{31} = \sum_{i=1}^{d_1+1} \sum_{j=1}^{d_i+1} d_i d_j \,. \tag{2.30}$$

Абстрагуючись від цілочисельності параметрів та апроксимуючі суму інтегралом, отримаємо наступну оцінку (2.30):

$$N_{31} \approx 4\sqrt{n} \sum_{i=1}^{d_1+1} (d_i)^{3/2} \approx 4\sqrt{n} \int_0^{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{4n}{x} \right)^{3/4} dx = 4b \cdot n^{11/8}. \tag{2.31}$$

Для отримання оцінки всієї цільової функції N_3 необхідно додати до (2.31) внески інших кластерів. Втім, можна довести, що ці внески у сумі становлять $O\left(n \log(n)\right)$, тому $N_3 \approx N_{31}$. Значення b можна знайти шляхом чисельного моделювання. Згідно з (2.17), (2.27) та (2.31) точна та асимптотична оцінки $r_{\max}$ становлять відповідно

$$r_{\max} \approx \frac{b \cdot n^{3/8} - \left(\ln(n) + c_2\right)^2}{c_3 \cdot n^{1/2} - \left(\ln(n) + c_2\right)^2}, \tag{2.32}$$

$$\lim_{n \to \infty} r_{\max} \approx \frac{b}{c_3} n^{-1/8} \,. \tag{2.33}$$

Експериментальне дослідження асортативності мереж БА та, зокрема, оцінок досяжних меж показника асортативності становить мету наступного розділу атестаційної роботи.

3 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕЖ ПОКАЗНИКА АСОРТАТИВНОСТІ МЕРЕЖ БАРАБАШІ-АЛЬБЕРТ

3.1 Вибір програмних засобів реалізації

У якості програмного засоба / середовища реалізації елементів системи моделювання еластичних мереж та оцінювання меж показника асортативності було обрано середовище MatLab [17], [18].

MatLab (скорочення від англ. «Matrix Laboratory – пакет прикладних програм для вирішення задач технічних обчислень, який має вбудовану мову програмування. MatLab використовують більше одного мільйона інженерних і наукових працівників, він працює на більшості сучасних операційних систем, включаючи Linux, Mac OS, Microsoft Windows.

MatLab як мова програмування був розроблений Клівом Моулером в кінці 1970-х років коли він був деканом факультету комп'ютерних наук в Університеті Нью-Мексико. Метою розробки було надати студентам факультету можливість використання програмних бібліотек Linpack і Eispack без необхідності вивчення Фортрана. Незабаром нова мова поширилася серед інших університетів і була з великим інтересом зустрінута вченими, які працюють в області прикладної математики. До сих пір в Інтернеті можна знайти версію 1982 року, написану на Фортрані, поширювану з відкритим вихідним кодом. Інженер Джон Літтл познайомився з цією мовою під час візиту Клива Моулера в Стенфордський університет в 1983 році. Зрозумівши, що нова мова має великий комерційний потенціал, він об'єднався з Клівом Моулером і Стівом Бангертом. Спільними зусиллями вони переписали MatLab на C і заснували в 1984 компанію The MathWorks для подальшого розвитку. Ці переписані на С бібліотеки довгий час були відомі під ім'ям JACKPAC. Спочатку MatLab призначався для проектування систем управління (основна спеціальність Джона Літтла), але швидко завоював популярність у багатьох інших наукових і інженерних областях. Він також широко використовувався і в освіті, зокрема, для викладання лінійної алгебри та чисельних методів.

Мова MatLab є високорівневою мовою програмування, яка інтерпретується. Середовище MatLab підтримує засновані на матрицях структури даних, широкий спектр функцій, інтегроване середовище розробки, об'єктно-орієнтовані можливості і інтерфейси до програм, написаних на інших мовах програмування.

Програми, написані на MatLab, бувають двох типів – функції і скрипти. Функції мають вхідні і вихідні аргументи, а також власний робочий простір для зберігання проміжних результатів обчислень і змінних. Скрипти ж використовують загальний робочий простір. Як скрипти, так і функції не компілюються в машинний код, а зберігаються у вигляді текстових файлів. Існує також можливість зберігати так звані pre-parsed програми – функції і скрипти, оброблені в вид, зручний для машинного виконання. У загальному випадку такі програми виконуються швидше звичайних, особливо якщо функція містить команди побудови графіків.

Основною особливістю мови MatLab є її широкі можливості щодо роботи з матрицями, які творці мови висловили в гаслі «думай векторно» (Think vectorized).

MatLab надає користувачеві велику кількість (кілька сотень) функцій для аналізу даних, які покривають майже всі області математики, зокрема:

– матриці і лінійна алгебра – алгебра матриць, лінійні рівняння, власні значення і вектора, факторизація матриць та інші;

– багаточлени і інтерполяція – корені многочленів, операції над багаточленами і їх диференціювання, інтерполяція і екстраполяція кривих і інші;

– математична статистика і аналіз даних – статистичні функції, статистична регресія, цифрова фільтрація, швидке перетворення Фур'є та інші;

– обробка даних – набір спеціальних функцій, включаючи побудову графіків, оптимізацію, пошук нулів, чисельне інтегрування та інші;

– диференціальні рівняння – рішення диференціальних і диференціально-алгебраїчних рівнянь, диференціальних рівнянь із запізненням, рівнянь з обмеженнями, рівнянь в часткових похідних і інші;

– розріджені матриці – спеціальний клас даних пакету MatLab, що використовується в спеціалізованих додатках;

– цілочисельна арифметика – виконання операцій цілочисельний арифметики в середовищі MatLab.

MatLab надає зручні засоби для розробки алгоритмів, включаючи високорівневі з використанням концепцій об'єктно-орієнтованого та функціонального програмування. У ньому є всі необхідні засоби інтегрованого середовища розробки, включаючи відлагоджувач та профайлер.

У складі пакету MatLab є велика кількість функцій для побудови графіків, в тому числі тривимірних, візуального аналізу даних і створення анімованих роликів. Вбудована середовище розробки дозволяє створювати графічні інтерфейси користувача з різними елементами управління, такими як кнопки, поля введення і іншими.

Програми MatLab, як консольні, так і з графічним інтерфейсом користувача, можуть бути зібрані за допомогою компоненти MatLab Compiler в незалежні від MatLab виконувані програми або динамічні бібліотеки, для запуску яких на інших комп'ютерах, проте, потрібна установка вільно розповсюджуваного середовища MatLab Compiler Runtime (MCR).

Пакет MatLab включає різні інтерфейси для отримання доступу до зовнішніх підпрограм, написаним на інших мовах програмування, даних. Підтримуються технології Component Object Model (COM) та Dynamic Data Exchange (DDE). Багато з цих можливостей відомі під назвою MATLAB API.

Пакет MatLab в Microsoft Windows надає доступ до програмній платформі .NET Framework. Є можливість завантажувати .NET збірки (Assemblies) і працювати з об'єктами .NET класів з середовища MatLab. У версії MatLab 7 підтримується .NET Framework версій 2.0, 3.0, 3.5 і 4.0.

Пакет MatLab містить функції, які дозволяють йому отримувати доступ до інших додатків середовища Windows, так само як і цим програмам отримувати доступ до даних MatLab, за допомогою технології динамічного обміну даними (DDE).

В MatLab існує можливість викликати методи веб-сервісів. Спеціальна функція створює клас, грунтуючись на методах API веб-сервісу.

MatLab взаємодіє з клієнтом веб-сервісу за допомогою прийняття від нього посилок, їх обробки і посилок відповіді. Підтримуються наступні технології: Simple Object Access Protocol (SOAP) і Web Services Description Language (WSDL).

Пакет MatLab включає інтерфейс взаємодії з зовнішніми додатками, написаними на мовах С і Фортран. Здійснюється це взаємодія через MEX-файли. Існує можливість виклику підпрограм, написаних на С або Фортрані з MatLab, як ніби це вбудовані функції пакета. MEX-файли являють собою спільні бібліотеки, які можуть бути завантажені і виконані інтерпретатором, вбудованим в MatLab. MEX-процедури мають також можливість викликати вбудовані команди MatLab.

Інтерфейс середовища MatLab представлений на рисунку 3.1.

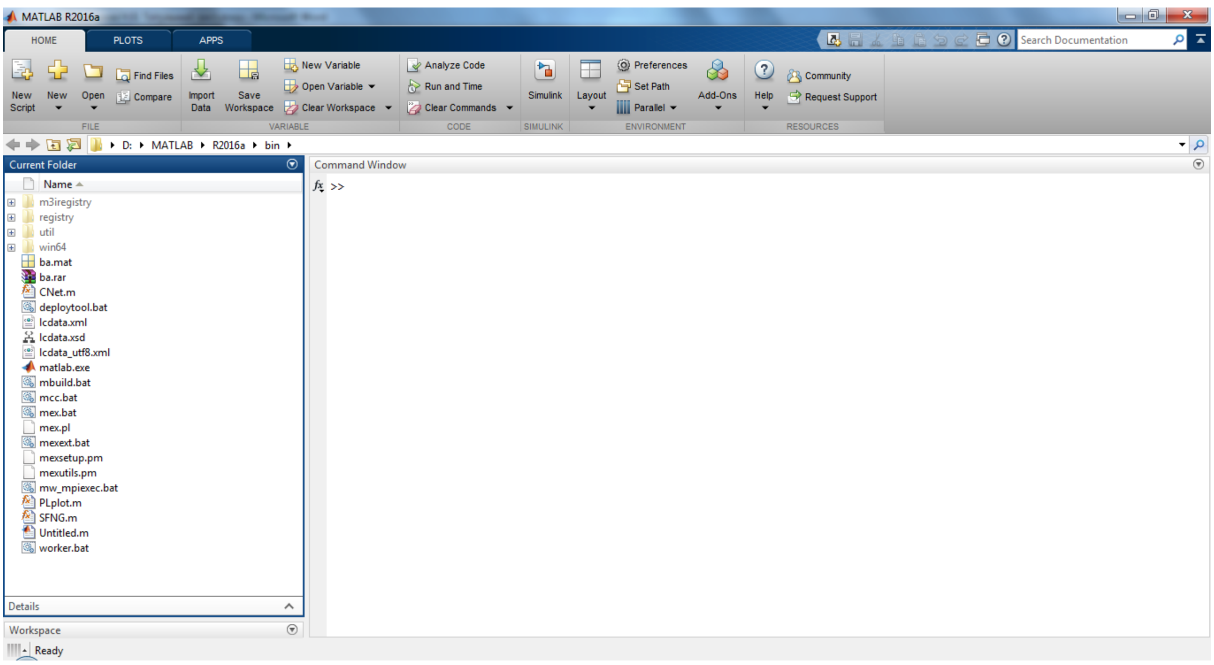


Рисунок 3.1 – Інтерфейс середовища MatLab

Інтерфейс MatLab дозволяє викликати функції, що знаходяться в звичайних DLL-бібліотеках, прямо з MatLab. Ці функції повинні мати С-інтерфейс.

Крім того, в MatLab є можливість отримати доступ до його вбудованих функцій через С-інтерфейс, що дозволяє використовувати функції пакета в зовнішніх додатках, написаних на С. Ця технологія в MatLab називається С Engine.

Для MatLab є можливість створювати спеціальні набори інструментів (toolbox), що розширюють його функціональність. Набори інструментів є колекції функцій, написаних на мові MatLab для вирішення певного класу задач. Компанія Mathworks поставляє набори інструментів, які використовуються в багатьох областях, включаючи наступні:

– цифрова обробка сигналів, зображень та даних: DSP Toolbox, Image Processing Toolbox, Wavelet Toolbox, Communication Toolbox, Filter Design Toolbox – набори функцій, що дозволяють вирішувати широкий спектр завдань обробки сигналів, зображень, проектування цифрових фільтрів і систем зв'язку;

– системи управління: Control Systems Toolbox, μ-Analysis and Synthesis Toolbox, Robust Control Toolbox, System Identification Toolbox, LMI Control Toolbox, Model Predictive Control Toolbox, Model-Based Calibration Toolbox – набори функцій, що полегшують аналіз і синтез динамічних систем, проектування, моделювання та ідентифікацію систем управління, включаючи сучасні алгоритми управління, такі як Робастне управління, $H\infty$-управління, μ-синтез та інші;

– фінансовий аналіз: GARCH Toolbox, Fixed-Income Toolbox, Financial Time Series Toolbox, Financial Derivatives Toolbox, Financial Toolbox, Datafeed Toolbox – набори функцій, що дозволяють швидко і ефективно збирати, обробляти і передавати різну фінансову інформацію;

– аналіз і синтез географічних карт, включаючи тривимірні: Mapping Toolbox;

– збір і аналіз експериментальних даних: Data Acquisition Toolbox, Image Acquisition Toolbox, Instrument Control Toolbox, Link for Code Composer Studio – набори функцій, що дозволяють зберігати і обробляти дані, отримані в ході експериментів, в тому числі в реальному часі. Підтримується широкий спектр наукового і інженерного вимірювального обладнання;

– візуалізація і уявлення даних: Virtual Reality Toolbox позволя-ет створювати інтерактивні світи і візуалізувати наукову інформацію за допомогою технологій віртуальної реальності і мови VRML;

– засоби розробки: MatLab Builder for COM, MatLab Builder for Excel, MatLab Builder for NET, MatLab Compiler, Filter Design HDL Coder – набори функцій, що дозволяють створювати незалежні програми з середовища MatLab;

– взаємодія з зовнішніми програмними продуктами: MatLab Report Generator, Excel Link, Database Toolbox, MatLab Web Server, Link for ModelSim – набори функцій, що дозволяють зберігати дані в різних видів таким чином, щоб інші програми могли з ними працювати;

– бази даних: Database Toolbox - інструменти роботи з базами даних;

– наукові та математичні пакети: Bioinformatics Toolbox, Curve Fitting Toolbox, Fixed-Point Toolbox, Fuzzy Logic Toolbox, Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox, OPC Toolbox, Optimization Toolbox, Partial Differential Equation Toolbox, Spline Toolbox, Statistic Toolbox, RF Toolbox – набори спеціалізованих математичних функцій, що дозволяють вирішувати широкий спектр наукових і інженерних задач, включаючи розробку генетичних алгоритмів, вирішення завдань в приватних похідних, цілочисельні проблеми, оптимізацію систем та інші;

– нейронні мережі: Neural Network Toolbox – інструменти для синтезу та аналізу нейронних мереж;

– нечітка логіка: Fuzzy Logic Toolbox – інструменти для побудови і аналізу нечітких множин;

– символьні обчислення: Symbolic Math Toolbox – інструменти для символьних обчислень з можливістю взаємодії з символьним процесором програми Maple.

Крім перерахованих вище, існують тисячі інших наборів інструментів для MatLab, написаних іншими (сторонніми) розробниками.

І все-таки в першу чергу MatLab – це засіб математичного моделювання, який забезпечує проведення досліджень практично у всіх відомих областях науки і техніки. При цьому структура пакету дозволяє ефективно поєднувати обидва основні підходи до створення моделі: аналітичний і імітаційний.

Саме в сфері математичного моделювання MatLab дозволяє найбільш повно використовувати всі сучасні досягнення комп'ютерних технологій, в тому числі засоби візуалізації і аудіфікації (озвучування) даних, а також можливості обміну даними через Інтернет. Крім того, користувач має можливість створювати засобами MatLab власний графічний інтерфейс, який відповідає як його смакам, так і вимогам розв'язуваної задачі. Як випливає з назви пакета, він орієнтований в першу чергу на обробку масивів даних (матриць і векторів). Це дозволило його розробникам істотно підвищити ефективність процедур, що працюють із зазначеними типами даних, в порівнянні з мовами програмування «загального призначення».

З точки зору користувача, MatLab являє собою багатющу бібліотеку функцій (в MatLab 2015 їх більше 1000), єдина проблема при роботі з якою полягає в умінні швидко відшукати ті з них, які потрібні для вирішення даного завдання [12].

3.2 Генерація мереж Барабаші-Альберт

Модель БА являє собою випадковий динамічний граф, який вирощується з невеликого графа-затравки шляхом необмежено повторюваних кроків додавання до графа нової вершини з n ребрами. Таким чином, вузол тим швидше накопичує нові зв'язки, ніж їх у нього більше

На підставі проведеного аналізу був розроблений алгоритм генерації мережі Барабаш-Альберт, представлений на рисунку 3.2.

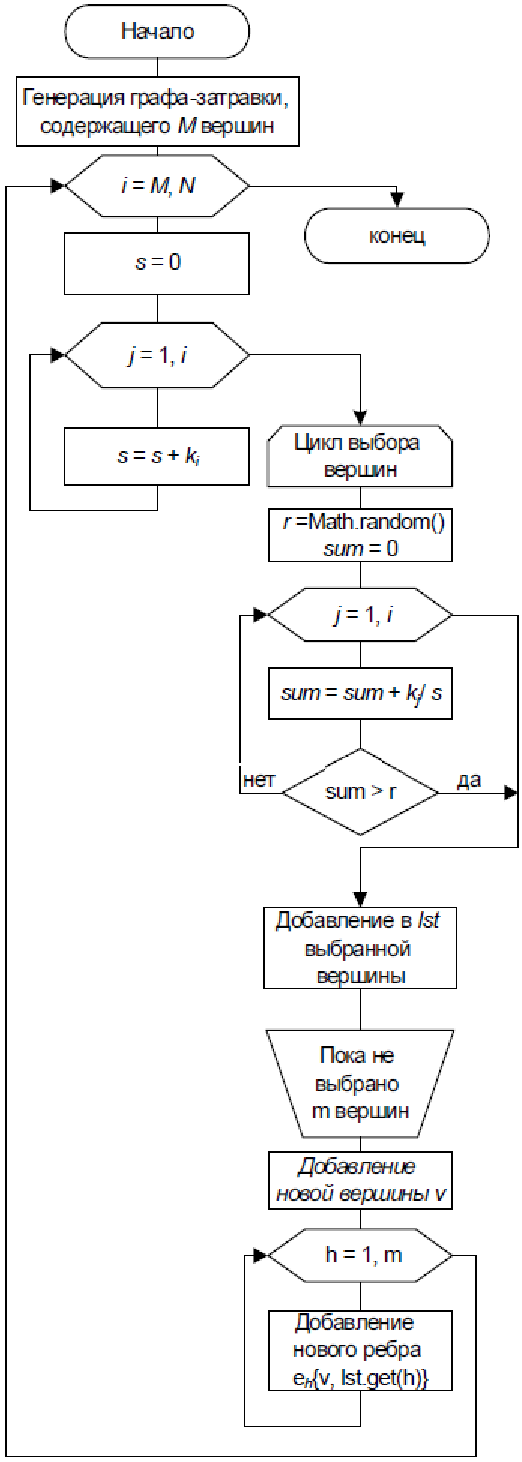


Рисунок 3.2 – Блок-схема алгоритма генерації моделі Барабаші-Альберт

Розроблена програма реалізує генерацію і візуалізацію моделі безмасштабної мережі Барабаш-Альберт. Вона складається з трьох функцій.

Функція SFNG використовується для імітації алгоритму БА і повертає безпосередньо БА-мережу заданого розміру. Цей код був розроблений таким чином, що можна створити мережу малого розміру, а потім використовувати цю мережу в якості графа-затравки для створення мережі більшого розміру, продовжуючи цей процес до тих пір, поки не буде досягнутий фактичний бажаний розмір мережі. Необхідно розуміти, що початковий граф-затравка не зобов'язаний мати властивостей безмасштабної мережі, в той час як з ростом розміру граф наближається до масштабно-інваріантного. Тому розумно не робити розмір початкового графа набагато більше, ніж кілька вузлів (найчастіше 3-10 взаємопов'язаних вузлів).

Функція CNet створює мережевий графік, використовуючи функцію gplot з круговими координатами. Він дозволяє отримати просту, але інтуїтивно зрозумілу візуалізацію мережі (рис. 3.3).

Функція PLplot приймає безмасштабну мережу в форматі матриці суміжності, візуалізує розподіл вузлів та ступенями та лінію, що апроксимує його до ступеневого розподілу (рис. 3.4). Функція повертає рівняння апроксимуючої лінії в змінній cfit.

Під час завдання графа-затравки (seed) необхідно враховувати, що граф задається матрицею суміжності, яка повинна бути симетричною.

Приклад виклику описаних функцій (якому відповідають рис.3.3 та рис. 3.4) наведений на рисунку 3.5.

Числові результати роботи програми (скріншот з значеннями розрахованих змінних) представлені на рисунку 3.6.

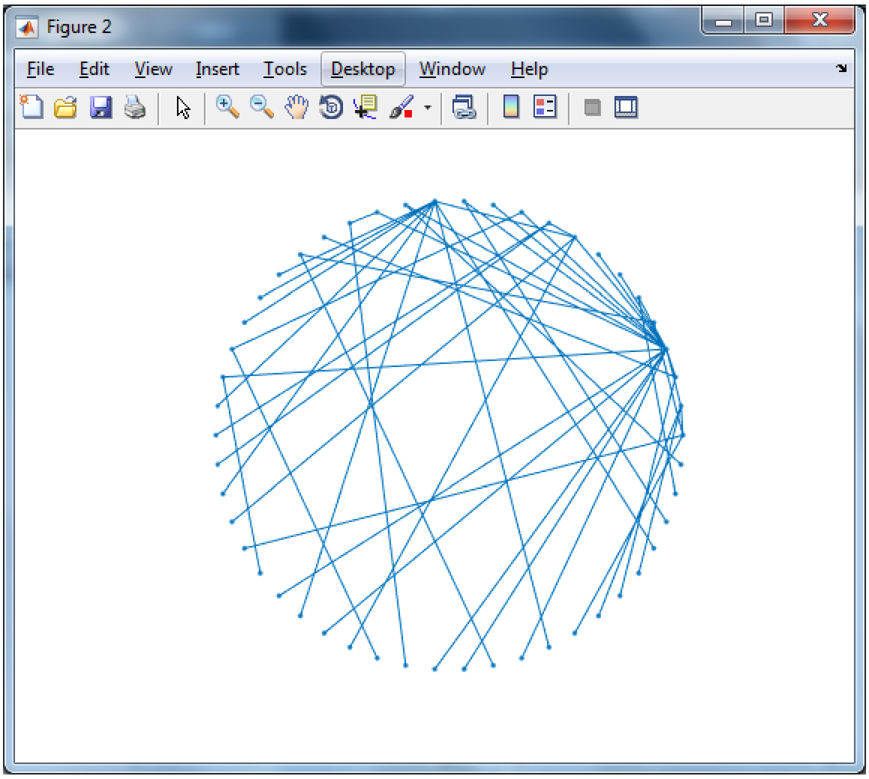


Рисунок 3.3 – Результат виклику CNet – візуалізація мережі

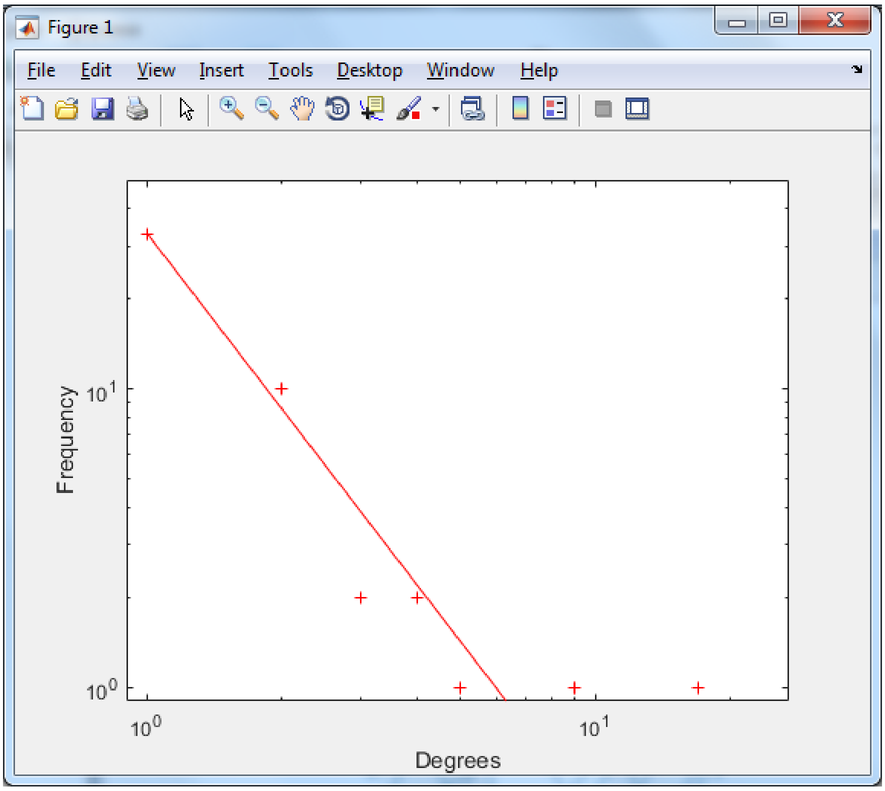
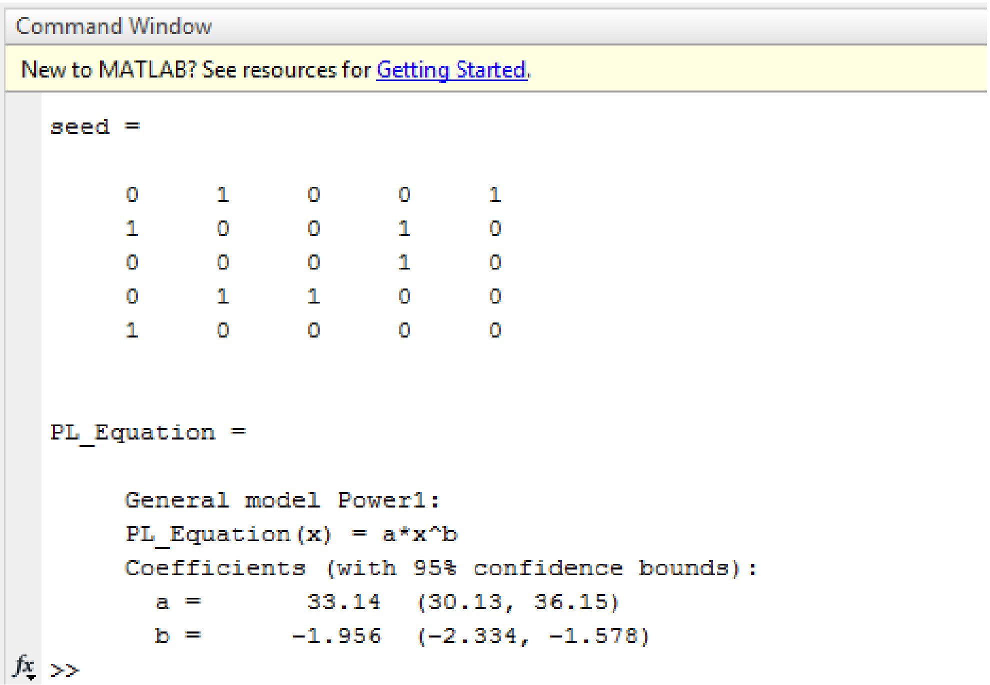


Рисунок 3.4 – Результат виклику PLplot – графік розподілу ступенів вузлів

```
seed=[0 1 0 0 1;1 0 0 1 0;0 0 0 1 0;0 1 1 0 0;1 0 0 0 0]
Net = SFNG(50, 1, seed);
PL_Equation = PLplot(Net)
CNet(Net)
```

Рисунок 3.5 – Приклад виклику функцій



```
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
seed =

     0     1     0     0     1
     1     0     0     1     0
     0     0     0     1     0
     0     1     1     0     0
     1     0     0     0     0


PL_Equation =

     General model Power1:
     PL_Equation(x) = a*x^b
     Coefficients (with 95% confidence bounds):
       a =       33.14  (30.13, 36.15)
       b =      -1.956  (-2.334, -1.578)
fx >>
```

Рисунок 3.6 – Числові результати роботи програми

3.3 Оцінювання фрактальної розмірности мереж Барабаші-Альберт

Для оцінки фрактальної розмірності графа використовувався метод зростаючого кластера. Цей метод має схожість з так званим хвильовим алгоритмом, або алгоритмом Лі [19].

Алгоритм хвильової трасування (хвильової алгоритм, алгоритм Лі) – це алгоритм пошуку найкоротшого шляху на планарном графі. Належить до алгоритмів, заснованим на методах пошуку в ширину. В основному використовується при комп'ютерної трасування (розводці) друкованих плат, з'єднувальних провідників на поверхні мікросхем. Інше застосування хвильового алгоритму – пошук найкоротшої відстані на карті в комп'ютерних стратегічних іграх.

Алгоритм працює на дискретному робочому полі (ДРП), що представляє собою обмежену замкнутою лінією фігуру, не обов'язково прямокутну, розбиту на прямокутні комірки, в окремому випадку – квадратні. Множина всіх комірків ДРП розбивається на підмножини: «прохідні» (вільні, тобто такі, які під час пошуку шляху можна проходити), «непрохідні» (перешкоди – шлях через них заборонений), стартова комірка (джерело) і фінішна (приймач).

Алгоритм призначений для пошуку найкоротшого шляху від стартової комірки до кінцевої комірки, якщо це можливо, або, за відсутності шляху, видати повідомлення про непрохідність [19].

Робота алгоритму включає в себе три етапи: ініціалізацію, поширення хвилі і відновлення шляху.

Під час ініціалізації будується образ множини комірок оброблюваного поля, кожній комірці приписуються атрибути прохідності / непрохідності, запам'ятовуються стартова і фінішна комірки.

Далі, від стартової комірки породжується крок до сусідньої, при цьому перевіряється, чи прохідна вона, та чи не є вона вже поміченою.

Сусідні комірки можна задавати двояко: в сенсі околиці Мура і околиці фон Неймана. Вони відрізняється між собою тим, що в околиці фон Неймана сусідніми комірками вважаються тільки чотири комірки (по вертикалі і горизонталі), а в околиці Мура – вісім комірок, тобто включаючи діагональні.

При виконанні умов прохідності комірки, що аналізується, та неналежності її до раніше позначених, в атрибут комірки записується число, яке дорівнює кількості кроків від стартової комірки. Кожна комірка, мічена числом кроків від стартової комірки, стає стартовою і з неї породжуються чергові кроки в сусідні комірки. Очевидно, що при такому переборі буде знайдено шлях від початкової комірки до кінцевої, або черговий крок з породженої в дорозі комірки буде неможливий.

Відновлення найкоротшого шляху відбувається в зворотному напрямку: при виборі комірки від фінішної до стартової на кожному кроці вибирається комірка, що має атрибут відстані від стартової на одиницю менше, ніж у поточній комірці.

У випадку з проходженням графів в ролі комірок виступають вузли мережі. Прохідність ж виражається пов'язаністю вузла з іншими вузлами.

Розроблена програма складається з двох функцій.

findDist проводить розрахунок відстаней від кореня (вершини з найбільшою ступінню) до інших вузлів.

fracDim для всіх можливих значень відстані (R) підраховує кількість вузлів в радіусі R та розраховує шукану фрактальну розмірність.

Нижче наведено приклад виклику описаних функцій (рис. 3.7) та результат роботи програми (рис. 3.8).

```
seed = [0 1 0 0 1;1 0 0 1 0;0 0 0 1 0;0 1 1 0 0;1 0 0 0
0];
Net = SFNG(5000, 1, seed);
S = fracDim(Net);
hold on;
k = 6;
dim = [log(1:k)', ones(k,1)]\log(S(1:k)');
loglog(exp(dim(2))*(1:k).^dim(1),'--r','LineWidth',2);
grid on; hold off;
```

Рисунок 3.7 – Приклад коду виклику функцій генерації мережі і розрахунку її фрактальної розмірності

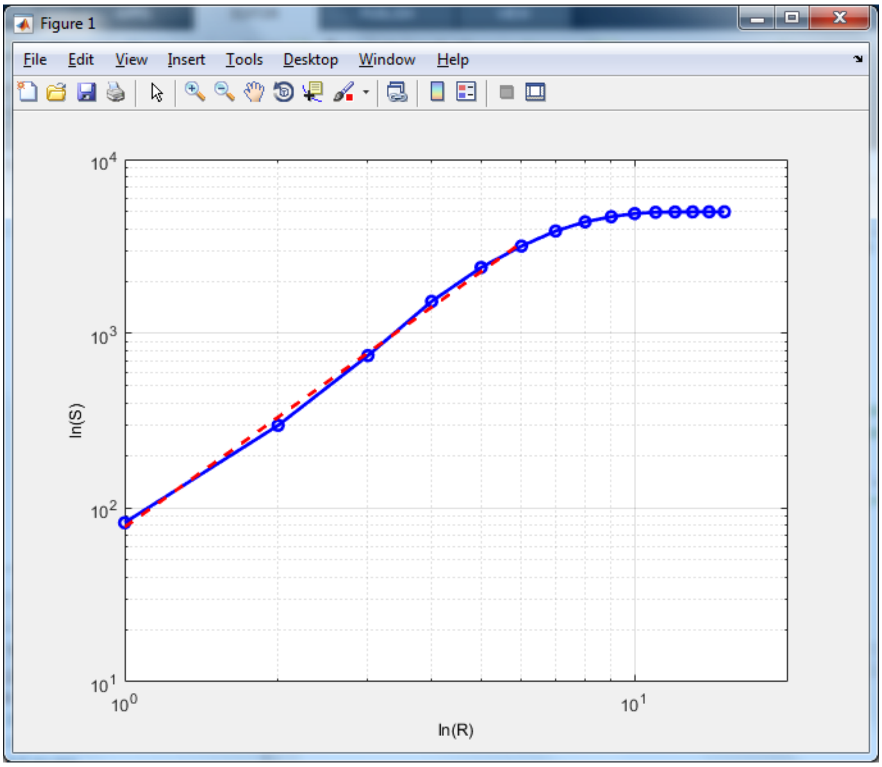


Рисунок 3.8 – Графік залежності $\ln(S)$ від $\ln(R)$

В результаті роботи програми було отримано значення фрактальної розмірності 2.0983.

Теоретичне значення для MIM вказаного розміру ($N = 5000$), розраховане за (2.14), дорівнює 2.0666, що є близьким до значення, розрахованого програмою.

3.4 Експериментальне оцінювання граничних значень показника асортативності мереж Барабаші-Альберт

Першим кроком експериментальних досліджень асортативності БА-мереж було оцінювання числових значень коефіцієнтів, які входять до формул мінімальної (нижньої) (2.28)-(2.29) та максимальної (верхньої) (2.32)-(2.33) меж показника асортативності БА-мереж. Числові значення параметрів оцінок, знайдені шляхом чисельного моделювання, наведені у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Числові значення параметрів оцінок

Параметр	a	b	c_2	c_3
Формула	(2.26)	(2.31)	(2.27)	(2.27)
Значення	1.577	10.026	1.779	7.160

На рисунку 3.9 наведено графики оцінок мінімального (2.28)-(2.29) та максимального (2.32)-(2.33) значень коефіцієнту асортативності. Можна побачити, що межі припустимих значень коефіцієнту асортативності (2.17) звужуються з ростом розміру мережі.

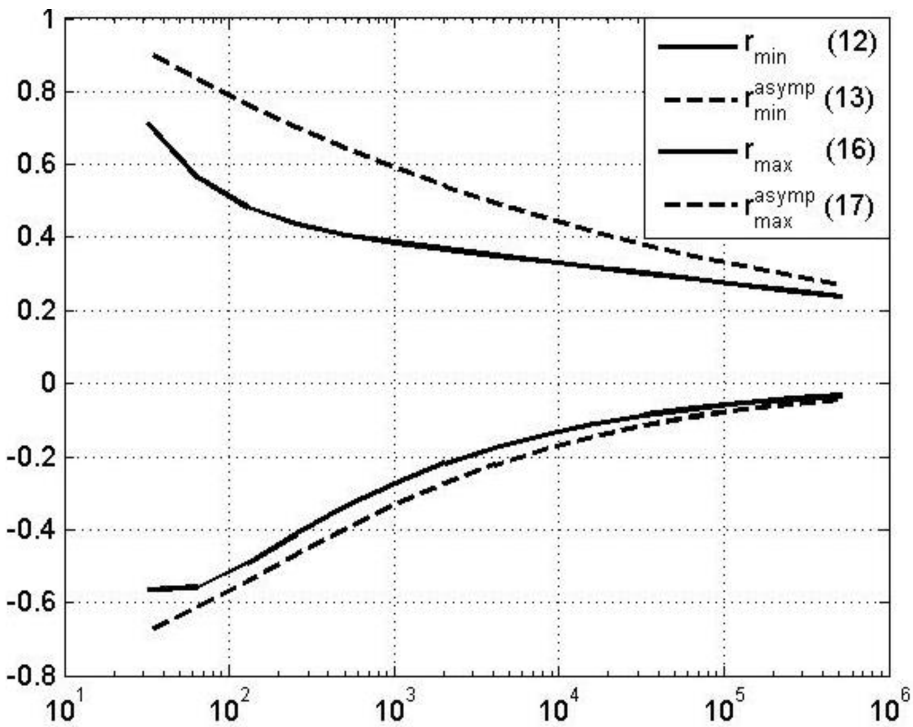


Рисунок 3.9 – Граничні значення коефіцієнту асортативності в залежності від розміру БА-мережі

Як можна побачити на рисунку 3.9, точні та асимптотичні межі коефіцієнту асортативності досить близькі одна до одної. Точність асимптотичної оцінки зростає з ростом розміру БА-мережі.

ВИСНОВКИ

Проведено аналіз об'єкту досліджень – мереж Барабаші-Альберт. Проведена порівняльна характеристика існуючих мереж і їх характеристик. На основі існуючих досліджень була спроектована і змодельована імітаційна модель мережі Барабаші-Альберт.

Досліджено поняття асортативності, його числові характеристики, взаємозв'язок між структурою мережі та асортативністю.

Сформовано постановку задачі пошуку граничних значень коефіцієнта асортативності для мережі Барабаші-Альберт.

Розроблено алгоритм формування мережі Барабаші-Альберт з максимальною/ мінімальною асортативністю.

Для мережі Барабаші-Альберт знайдено оцінки меж припустимих значень коефіцієнту асортативності. Виявлено, що ці межі значно вужчі, ніж для мереж загального вигляду та звужуються з ростом розміру мережі.

Проведено моделювання мереж Барабаші-Альберт з екстремальною асортативністю.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Ландэ Д.В., Снарский А.А. Моделирование сложных сетей: учебное пособие. К. : НТУУ «КПИ», 2015. 212 с.
2. Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F. Evolution of Networks: From Biological Networks to the Internet and WWW. Oxford, USA : Oxford University Press, 2003. 280 p.
3. Newman M., Barabasi A.-L., Watts D.J. The Structure and Dynamics of Networks. Princeton, USA : Princeton university press, 2006. 624 p.
4. Евин И.А. Введение с теорию сложных сетей : учеб. пособие. М. : Университет, 2010. Том 2. С. 121-141.
5. Albert R., Barabasi A.- L. Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 42-97.
6. Олемской А.И. Статистика сложных сетей (обзор). «Вісник СумДУ». 2006. №6 (90). С.21-47.
7. Структуры последовательной активности в нейронных сетях со случайными связями / Т.А. Леванова, М.А. Комаров, Е.Ю. Кадина, Г.В. Осипов. Н. : Университет, 2010. 131-139.
8. Безмасштабные сети URL : http://wiki.witology.com/index.php/Безмасштабные_сети (дата звернення 13.11.2019).
9. Масштабно-инвариантные сети. URL : http://www.cognitivist.ru/er/kernel/prologi_11_scale_free_network.xml (дата звернення 14.11.2019).
10. Модель Барабаши-Альберт. URL : http https://ru.wikipedia.org/wiki/Модель_Барабаши-Альберт (дата звернення 19.11.2019).
11. Barabási A.L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. 286 (5439). P. 509–512.

12. Райгородский А. М. Модели случайных графов и их применения : учеб. пособие. Киев, 2009. 117 с.

13. Newman M. Networks. An Introduction. Oxford : Oxford University Press, 2010.

14. Newman M. Mixing patterns in networks // Phys. Rev. E. 2003. vol. 67.

15. Noldus R., Van Mieghem P. Assortativity in complex networks // J. Complex Networks. 2015. vol. 3. P.507-542.

16. Шергін В.Л., Удовенко С.Г., Загребельна М.Ф. Структура екстремально асортативних масштабно-інваріантних мереж // Фізико-технологічні проблеми передавання, оброблення та зберігання інформації в інфокомунікаційних системах. Чернівці, 2018.

17. MATLAB. URL : https://ru.wikipedia.org/wiki/MATLAB (дата звернення 25.11.2019).

18. Matlab. URL : http://matlab.ru/products/matlab (дата звернення 25.11.2019).

19. Алгоритм Ли. URL : https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгоритм_Ли (дата звернення 25.11.2019).