

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ СВЧ РЕЗОНАТОРНЫХ ДАТЧИКОВ АПЕРТУРНОГО ТИПА

ГОРДИЕНКО Ю.Е., РЯБУХИН А.А.

Обосновывается численно-аналитический алгоритм определения резонансных частот и характеристик преобразования резонаторных датчиков апертурного типа, применяемых в СВЧ диагностике полупроводниковых и диэлектрических материалов. Алгоритм базируется на использовании аппарата функций Грина и полуобращении интегрального оператора задачи.

В СВЧ диагностике полупроводников, диэлектриков и высокотемпературных сверхпроводников, включая и микроволновую микроскопию, широко используются резонаторные датчики апертурного типа [1, 2], предполагающие наружное расположение объекта исследования и, следовательно, обеспечивающие возможность сканирования его свойств. Теоретическое моделирование таких датчиков, как правило, базируется на приближенных математических подходах, что практически приводит к необходимости их градуировки по эталонным образцам.

Предпринятые в [3, 4] попытки более строгого моделирования приводят к численным процедурам, требующим отдельной оценки сходимости решения и большого объема подготовительных вычислений. Заметим, что объем и длительность вычислений существенно ограничивают возможности постановки обратных задач в процессе обработки результатов измерений и оптимального синтеза указанных датчиков. Строгая теория таких датчиков не должна обязательно включать определение полей в различных областях исследуемой электродинамической структуры, а может ограничиваться численной оценкой первых корней ее дисперсионного уравнения. Однако эти корни должны оцениваться в комплексной плоскости, так как диагностируемые объекты имеют существенное поглощение СВЧ энергии, и связанные с ним свойства входят в план диагностики.

Строгую теорию СВЧ датчиков апертурного типа удобно строить по методу функций Грина. При этом магнитные и электрические поля в исследуемой электродинамической системе «датчик — образец» представляются через эквивалентные тангенциальной составляющей электрического поля магнитные токи и соответствующие тензорные функции Грина для уравнений Максвелла. Целесо-

образно представлять поле в отдельных условно выделенных регулярных областях системы через эквивалентные магнитные токи на границах раздела этих областей. Неизвестные токи в свою очередь выражаются через собственные функции сечения, являющиеся решениями однородного двумерного уравнения Гельмгольца при соответствующих граничных условиях.

Из условий непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границах раздела получается система интегральных уравнений первого рода относительно неизвестных функций распределения токов в сечениях. Число интегральных уравнений в системе при этом равно числу границ раздела областей.

Решение системы интегральных уравнений будем искать методом Галеркина. В результате задача сводится к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) первого рода. Однако вследствие наличия у ядер интегральных уравнений логарифмической особенности при их численном решении возникает трудность, проявляющаяся в крайне медленной сходимости рядов, через которые выражаются матричные элементы СЛАУ. Эта трудность может быть преодолена применением метода полуобращения.

Интегральный оператор разделяется на сингулярную часть и часть, не содержащую особенности. Выделение логарифмической особенности ядра интегрального уравнения значительно улучшает сходимость алгоритма. Неизвестное поле представляется в виде ряда по собственным функциям сингулярной части интегрального оператора, что позволяет обратить его часть, содержащую особенность.

Применим метод полуобращения к задаче нахождения собственных комплексных частот коаксиального резонаторного датчика с емкостной измерительной апертурой, нагруженной на образец с потерями (рис.1). Задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода [5]

$$\int_a^b [\tilde{\varepsilon}^I \cdot G^I(g, g, r, r') + \tilde{\varepsilon}^{II} \cdot G^{II}(g, g, r, r')] \cdot \varphi(r') dr' = 0, \quad (1)$$

$$a < r < b,$$

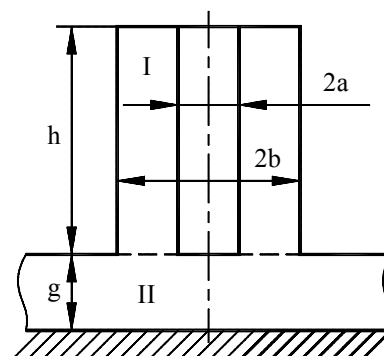


Рис.1. Резонаторный СВЧ датчик с емкостной апертурой

где  $G^I(g, g, r, r')$  и  $G^{II}(g, g, r, r')$  – функции Грина соответствующих областей;  $\tilde{\varepsilon}^I$  и  $\tilde{\varepsilon}^{II}$  – комплексные диэлектрические проницаемости сред в областях I и II. В случае воздушного заполнения объема резонатора  $\tilde{\varepsilon}^I = 1$ .

Неизвестная функция  $\varphi(r')$  для удовлетворения условий Мейкснера может быть представлена в виде

$$\varphi(r') = \frac{\tilde{\varphi}(r')}{\sqrt{(r'-a)(b-r')}} \quad (2)$$

здесь  $\tilde{\varphi}(r')$  – непрерывна по Гельдеру на замкнутом интервале  $[a, b]$ .

Функция Грина для коаксиальной области имеет вид [6-8]

$$G^I(g, g, r, r') = \frac{1}{r \cdot \ln(b/a)} \cdot \frac{\text{cth}(\gamma_0^I h)}{\gamma_0^I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n^I(r) \chi_n^I(r') r'}{\Delta_n^I} \cdot \frac{\text{cth}(\gamma_n^I h)}{\gamma_n^I} \quad (3)$$

где  $\chi_n^I(r) = Y_0(k_{0n}^I a) J_1(k_{0n}^I r) - Y_1(k_{0n}^I r) J_0(k_{0n}^I a)$ ;

$$\gamma_0^I = \sqrt{-\tilde{\varepsilon}^I k_0^2}; \quad \gamma_n^I = \sqrt{(k_{0n}^I)^2 - \tilde{\varepsilon}^I k_0^2}, \quad n = 1, 2;$$

$$\Delta_n^I = \frac{b^2}{2} [Y_0(k_{0n}^I a) J_1(k_{0n}^I b) - Y_1(k_{0n}^I b) J_0(k_{0n}^I a)]^2 - \frac{a^2}{2} [Y_0(k_{0n}^I a) J_1(k_{0n}^I a) - Y_1(k_{0n}^I a) J_0(k_{0n}^I a)]^2;$$

$k_{0n}^I$  – n-й корень уравнения

$$Y_0(k_{0n}^I b) J_0(k_{0n}^I a) - Y_0(k_{0n}^I a) J_0(k_{0n}^I b) = 0.$$

В области, занятой однородным образцом,

$$G^{II}(g, g, r, r') = r' \int_0^{\infty} J_1(\kappa r) J_1(\kappa r') \frac{\text{cth}(\gamma^{II} g)}{\gamma^{II}} \kappa d\kappa \quad (4)$$

где  $\gamma^{II} = \sqrt{\kappa^2 - \tilde{\varepsilon}^{II} k_0^2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Для резонатора, нагруженного многослойным образцом, функция Грина  $G^{II}$  определяется выражением

$$G^{II}(g, g, r, r') = r' \int_0^{\infty} J_1(\kappa r) J_1(\kappa r') \frac{\text{cth}(\gamma_1^{II} g_1) - \text{csc h}(\gamma_1^{II} g_1) \cdot R_2}{\gamma_1^{II}} \kappa d\kappa \quad (5)$$

Здесь  $\gamma_m^{II} = \sqrt{\kappa^2 - \tilde{\varepsilon}_m^{II} k_0^2}$  – постоянная распространения для m-го слоя;  $g_m$  – толщина m-го слоя;  $\tilde{\varepsilon}_m^{II}$  – комплексная относительная диэлектрическая проницаемость m-го слоя;  $R_m$  – рекуррентные коэффициенты, связывающие параметры m-го и (m-1)-го слоев:

$$R_m = \quad (6)$$

$$R_m = \frac{\frac{\tilde{\varepsilon}_{m-1}^{II}}{\gamma_{m-1}^{II}} \text{csc h}(\gamma_{m-1}^{II} g_{m-1})}{\frac{\tilde{\varepsilon}_{m-1}^{II}}{\gamma_{m-1}^{II}} \text{cth}(\gamma_{m-1}^{II} g_{m-1}) + \frac{\tilde{\varepsilon}_m^{II}}{\gamma_m^{II}} [\text{cth}(\gamma_m^{II} g_m) - \text{csc h}(\gamma_m^{II} g_m) R_{m+1}]}$$

Для последнего слоя, в случае образца, экранированного металлом,  $R_{M+1} = 0$ . Используя (6), действие многослойного образца можно свести к действию некоторого эквивалентного слоя в области II.

Интегральный оператор уравнения (1) разделяется на сингулярную часть и часть, не содержащую особенности. Можно показать, что функции (3) и (4) при  $r \rightarrow r'$

$$G^I(g, g, r, r') \sim -\frac{1}{\pi} \ln|r-r'|, \quad G^{II}(g, g, r, r') \sim -\frac{1}{\pi} \ln|r-r'|.$$

С учетом этого функции Грина  $G^I$  и  $G^{II}$  можно представить в виде

$$G^I(g, g, r, r') = \tilde{G}^I(r, r') - \frac{1}{\pi} \ln|r-r'|, \quad (7)$$

$$G^{II}(g, g, r, r') = \tilde{G}^{II}(r, r') - \frac{1}{\pi} \ln|r-r'|. \quad (8)$$

Функции  $\tilde{G}^I(r, r')$  и  $\tilde{G}^{II}(r, r')$  являются непрерывно дифференцируемыми по  $r$  и  $r'$ :

$$\tilde{G}^I(r, r') = G^I(g, g, r, r') + \frac{1}{\pi} \ln|r-r'|, \quad (9)$$

$$\tilde{G}^{II}(r, r') = G^{II}(g, g, r, r') + \frac{1}{\pi} \ln|r-r'|. \quad (10)$$

Таким образом, с учетом (7) и (8)

$$-\frac{\tilde{\varepsilon}^I + \tilde{\varepsilon}^{II}}{\pi} \cdot \int_a^b \ln|r-r'| \cdot \varphi(r') dr' + \int_a^b [\tilde{\varepsilon}^I \cdot \tilde{G}^I(r, r') + \tilde{\varepsilon}^{II} \cdot \tilde{G}^{II}(r, r')] \cdot \varphi(r') dr' = 0. \quad (11)$$

Подставляя (2) в (11) и делая замену

$$r' = \frac{b-a}{2} (t+1) + a; \quad r = \frac{b-a}{2} (t+1) + a,$$

получаем

$$-\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{b-a}{2} (t-t') \right| \frac{\tilde{\varphi}(t') dt'}{\sqrt{(1+t')(1-t')}} + \int_{-1}^1 \frac{\tilde{K}(t,t') \cdot \tilde{\varphi}(t')}{\sqrt{(1+t')(1-t')}} dt' = 0, \quad (12)$$

где  $\tilde{K}(t,t') = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^I + \tilde{\varepsilon}^{\text{II}}} [\tilde{\varepsilon}^I \cdot \tilde{G}^I(t,t') + \tilde{\varepsilon}^{\text{II}} \cdot \tilde{G}^{\text{II}}(t,t')]$ .

Сингулярная часть оператора раскладывается в ряд по полиномам Чебышева:

$$\ln \left| \frac{b-a}{2} (t-t') \right| = \ln \frac{b-a}{2} - \ln 2 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{T}_n(t) \cdot \hat{T}_n(t')}{n}, \quad (13)$$

здесь  $\hat{T}_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot T_n(t)$ ,  $\hat{T}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot T_0(t)$  – полиномы Чебышева первого рода.

Так как  $\tilde{\varphi}(t')$  – непрерывна по Гельдеру, то ее также можно разложить в ряд по полиномам Чебышева:

$$\tilde{\varphi}(t') = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cdot \hat{T}_n(t'). \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в (12) и применяя метод Галеркина, получаем СЛАУ второго рода относительно неизвестных коэффициентов  $\varphi_n$ :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} d_{0n} \cdot \varphi_n - d \cdot \varphi_0 = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} d_{mn} \cdot \varphi_n + \frac{\varphi_m}{m} = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где  $d = \ln \frac{b-a}{4}$ ;  $d_{mn} = \int_{-1}^1 \frac{\hat{T}_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^1 \frac{\hat{T}_n(t')}{\sqrt{1-t'^2}} \tilde{K}(t,t') dt' dt$ .

Из равенства нулю определителя системы (15) вытекает характеристическое уравнение системы “датчик–образец”. При  $N \rightarrow \infty$  решение сходится к точному значению.

Численная реализация предложенного алгоритма осуществлена на языке C++ для персонального компьютера. Программа позволяет рассчитывать комплексные резонансные частоты и добротности коаксиального СВЧ датчика апертурного типа, нагруженного многослойным образцом с потерями.

СЛАУ (15) решалась методом редукции: учитывались  $N$  базисных функций в разложении неизвестной функции (14). В таблице представлены сведения, иллюстрирующие зависимость резонансной длины волны от  $N$  при различных значениях  $g/h$  для датчика со следующими геометрическими размерами:  $a=5 \cdot 10^{-3}$  м,  $b=2 \cdot 10^{-2}$  м,  $h=1 \cdot 10^{-1}$  м. Как

видно, в большом диапазоне значений  $g/h$  для расчета с погрешностью не более 0,1% достаточно принять  $N=8..10$ . В таблице приведены также результаты оценок по методу Галеркина при  $N=25$ . Очевидно, что при одинаковых точностях размерности СЛАУ, получаемые с использованием метода полуобращения, могут быть значительно ниже.

g/h	Число собственных функций N						Метод Галеркина
	2	4	6	8	10	12	
	Резонансная длина волны $\lambda_0$ , м						
0,01	0,1638	0,1625	0,1621	0,1620	0,1618	0,1618	0,1618
0,02	0,1530	0,1523	0,1521	0,1521	0,1520	0,1520	0,1520
0,05	0,1403	0,1401	0,1400	0,1400	0,1399	0,1399	0,1399
0,1	0,1302	0,1301	0,1300	0,1300	0,1300	0,1300	0,1300
0,2	0,1157	0,1156	0,1156	0,1155	0,1155	0,1155	0,1155

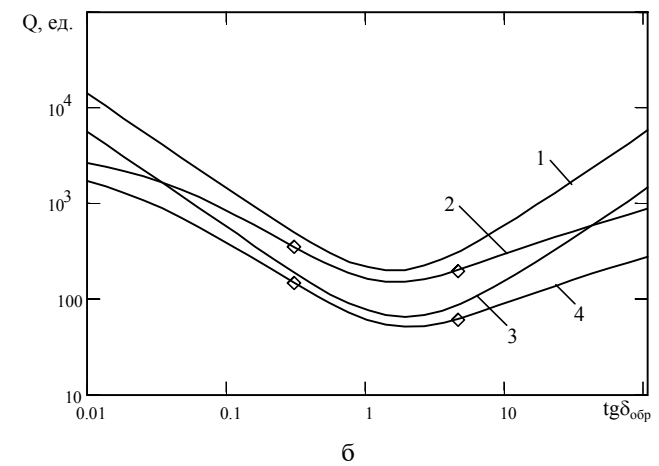
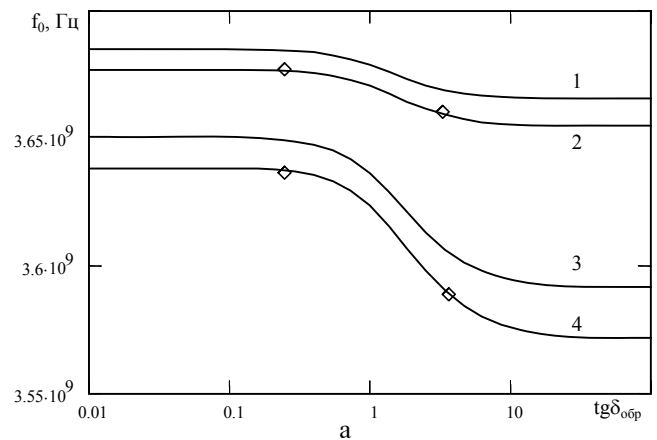


Рис.2. Зависимости резонансной частоты и добротности СВЧ датчика ( $h=2 \cdot 10^{-2}$  м,  $a=1 \cdot 10^{-3}$  м,  $b=2 \cdot 10^{-3}$  м,  $\varepsilon_2^{\text{II}} = 12$ ) от тангенса угла диэлектрических потерь образца при различных величинах зазоров  $g_1$  между исследуемым образцом и плоскостью апертуры: 1,2 –  $g_1=0,2$  мм, 3,4 –  $g_1=0,1$  мм, 2,4 – данные эксперимента.

На рис.2 показаны зависимости, образующие обычно характеристики преобразования датчиков при диагностике полупроводниковых материалов. Здесь включены данные численных оценок по обсуждаемому алгоритму (зависимости 2 и 4) и по алгоритму, базирующемуся на квазистатическом приближении [4] (зависимости 1 и 3). Очевидно, что существует систематическая погрешность после-

днего, зависящая от  $\text{tg} \delta$  образца и подтверждаемая отдельными точками экспериментальных исследований.

Рассмотренный алгоритм может оказаться достаточно универсальным для резонаторных датчиков с емкостным характером измерительной апертуры. Численный алгоритм хорошо сходится при значительно меньшем порядке СЛАУ, чем в алгоритме по методу Галеркина. Однако трудности вычисления элементов определителей сопоставимы для обоих методов. Сам подход к повороту интегрального оператора, по-видимому, будет справедлив и при других характерах апертур.

**Литература:** 1. *Anlage S.M., Steinhauer D.E., Vlahacos C.P. et al.* Superconducting Material Diagnostics using a Scanning Near-Field Microwave Microscope // IEEE Trans. on Applied Superconductivity. 1999. Vol. 9, N 2. P. 4127-4132. 2. *Неразрушающие бесконтактные СВЧ - резонаторные методы локального контроля полупроводниковых материалов: Обзор / Ахманов В.Б., Детинко В.М., Медведев Н.В. и др.* // Дефектоскопия. 1986. №1. С.23-35. 3. *Гордиенко Ю.Е.* Резонансные измерительные преобразователи в диагностике микрослоистых структур // Радиотехника. 1996. Вып. 100. С. 253-266. 4. *Данилов Г.Н., Детинко М.В., Медведев Ю.В. и др.* СВЧ резонаторный метод измерения удельного сопротив-

ления и толщины эпитаксиальных пленок // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ, Вып. 6(342), 1982. С. 16-19. 5. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 543 с. 6. *Панченко Б.А.* Тензорные функции Грина уравнений Максвелла для цилиндрических областей // Радиотехника. 1970. Вып. 15. С. 82-91. 7. *Chen-To Tai.* Dyadic Green's functions for a coaxial line // IEEE Transactions on antennas and propagation. 1983. Vol. AP-31, N2. P. 355-358. 8. *Kisliuk M.* The dyadic Green's functions for cylindrical waveguides and cavities // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. 1980. Vol. MTT-28, N8. P. 894-898.

Поступила в редколлегию 06.04.2001

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Айзацкий Н.И.

**Гордиенко Юрий Емельянович**, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой микроэлектроники, электронных приборов и устройств ХТУРЭ. Научные интересы: микроэлектроника, неразрушающий контроль материалов и изделий. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (0572) 40-93-62.

**Рябухин Алексей Александрович**, аспирант кафедры микроэлектроники, электронных приборов и устройств ХТУРЭ. Научные интересы: неразрушающий контроль материалов и изделий. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (0572) 40-93-62.

УДК 621.317.799

## АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ПОТЕРЯМИ

*ПАНЧЕНКО А.Ю.*

Проводится обобщение волновых уравнений в неоднородной среде с потерями. Подробно рассматривается случай малых возмущений среды и малых потерь. Учитываются прямые и релаксационные потери. Представляется сравнительный анализ всех составляющих волновых уравнений для электромагнитных и акустических волн.

Постоянное совершенствование технических средств заставляет все более углубленно подходить к анализу известных физических явлений. В частности, развитие средств неразрушающего контроля вызвало практическую потребность более тщательного анализа волновых процессов в неоднородных средах с потерями.

Диагностика и неразрушающий контроль осуществляется с помощью электромагнитных и акустических волн. Целью данной работы является систематизация общих свойств и отличий между волновыми уравнениями для электромагнитных и акустических полей в материальных средах.

Для анализа электромагнитных процессов чаще используются уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Применяя к первому уравнению операцию  $\text{rot}$ , для левой части получаем:

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}. \quad (1)$$

Величину  $\text{div } \vec{H}$  получим из четвертого уравнения:

$$\text{div } \vec{H} = - \left( \frac{\text{grad } \mu}{\mu} \cdot \vec{H} \right). \quad (2)$$

Можно сразу отметить, что за исключением ряда задач, например распространения электромагнитных волн в плазме, скорость изменения параметров среды существенно меньше периода электромагнитных колебаний. Поэтому для тока смещения можно записать:

$$\text{rot} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \left[ \text{grad } \varepsilon \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] + \varepsilon \text{rot} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (3)$$

Слагаемые, описывающие омические потери, в этом случае принимают вид:

$$\text{rot } \vec{j} = \left[ \text{grad } \sigma \times \vec{E} \right] + \sigma \text{rot } \vec{E}. \quad (4)$$

Для того чтобы выразить в (3) и (4) поле  $\vec{E}$  через  $\vec{H}$ , необходимо сделать допустимые приближения, в противном случае конечное выражение будет чрезмерно громоздким. Структура волновых уравнений сохраняется при малых потерях. Поэтому, ограничиваясь этим случаем, учтем релаксационные составляющие для полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , а также омические потери для электрического поля. Релаксационные составляющие можно представить так:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} - \varepsilon''' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5)$$