

О ДОБРОТНОСТИ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

Изолированный объем V произвольной формы, ограниченный замкнутой проводящей поверхностью площади S , в случае существования в нем электромагнитных колебаний может рассматриваться как объемный резонатор. При этом средняя электрическая энергия в области V

$$\overline{W}^e = \frac{1}{4} \int_V \epsilon E_m^2 dV \quad (1)$$

и средняя магнитная энергия

$$\overline{W}^m = \frac{1}{4} \int_V \mu H_m^2 dV, \quad (2)$$

где ϵ , μ — параметры среды, заполняющей объем; E_m , H_m — амплитудные значения напряженностей электрического и магнитного полей.

Колебания в резонаторе сопровождаются соответствующими изменениями направления и сил токов, текущих в стенках. И если материал, из которого выполнены стенки, не идеально проводящий, а обладает конечным значением поверхностного сопротивления R_ξ , то энергия колебаний в резонаторе постепенно расходуется на потери в стенках, т.е. имеет место затухание колебаний. Среда, заполняющая резонатор, также может обладать диэлектрическими и магнитными потерями, служащими второй причиной затухания колебаний.

Для характеристики свойств объемных резонаторов весьма важен параметр, называемый добротностью и определяемый по формуле [1]

$$Q = \frac{\omega \overline{W}}{P_n}, \quad (3)$$

где $\overline{W} = \overline{W}^a + \overline{W}^m$; \overline{P}_n — средняя мощность потерь; ω — частота колебаний. Так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то

$$Q = 2\pi \frac{\overline{W}}{\overline{P}_n T} = 2\pi \frac{\overline{W}}{\Delta W},$$

где ΔW — изменение энергии в резонаторе за период колебаний.
Отсюда

$$W = W_0 e^{-\frac{\omega t}{Q}}.$$

Если диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, а также проводимость σ материала стенок резонатора не зависят от напряженности электромагнитного поля, то добротность Q не зависит от амплитуды колебаний и для данного резонатора и определенного вида существующих в нем колебаний является величиной постоянной.

Энергия, запасенная в объеме резонатора, весьма мало зависит от потерь в стенках. Однако наличие потерь, обуславливающих затухание, приводит к тому, что частота колебаний [2]

$$\omega' = \omega + i \frac{\omega}{2Q},$$

т.е. зависит от добротности.

Данная формула верна для случая малых потерь, который обычно имеет место на практике.

Если резонатор выполнен из идеального проводника, а в среде, его заполняющей, также нет потерь, добротность резонатора будет бесконечно большой.

При расчете объемных резонаторов потери в стенках и в заполняющей среде обычно учитываются, но при этом считается, что они не влияют на структуру электромагнитного поля, т.е. она такая же, как и в резонаторе без потерь.

Общие сведения о добротности как о параметре объемных резонаторов, подобные приведенным выше, даются практически во всех монографиях и учебниках по электродинамике сверхвысоких частот.

Однако переход к конкретным формулам, необходимым для практических расчетов и сравнения полученных результатов с экспериментальными данными, делается, как правило, лишь в научных статьях. Здесь обычно рассматриваются варианты конструкций, разработанные для тех или иных применений и имеющие не обязательно

самую простую геометрическую форму. В связи с последним обстоятельством расчетные формулы, полученные подстановкой в общие выражения (1) — (3) напряженностей поля, существующего в конкретном резонаторе, приводят зачастую к достаточно сложным и громоздким выражениям.

Примером может служить предложенная в работе [3] формула для добротности объемного резонатора, представляющего собой секторообразное расширение (под углом 2θ) прямоугольного волновода в плоскости Н:

$$Q = \frac{4 \cdot \theta \cdot v \cdot \pi^3 \cdot \rho \cdot J_1}{R_s \lambda_0^2 \left[v \cdot \chi_\eta^2 \cdot J_2 + \frac{\theta \cdot v}{2} (k_2 + k_1) + \theta \cdot J_3 + \theta \cdot \chi_\eta^2 \cdot J_4 \right]}$$

Здесь v — высота резонатора; $\rho = 120\pi$; R_s — удельное поверхностное сопротивление материала стенок; λ_0 — резонансная длина волны;

$\chi_\eta = \frac{m\pi}{2\theta}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$ — количество полуволн, укладываемых по длине резонатора);

$$J_1 = \frac{U_E}{\varepsilon},$$

где U_E — энергия, запасаемая электрическим полем в объеме резонатора, заполненного средой с диэлектрической проницаемостью ε ;

$$J_2 = P_{1,2} \left/ \frac{2R_s \chi_\eta^2}{\theta \omega^2 \mu^2} \right.,$$

где $P_{1,2}$ — мощность потерь в боковых стенках резонатора; ω — круговая частота; μ — магнитная проницаемость материала стенок;

$$J_3 = P_{\xi_{\text{вн}}} \left/ \frac{2R_s}{v \omega^2 \mu^2} \right., \quad J_4 = P_{\eta_{\text{вн}}} \left/ \frac{2R_s \chi_\eta^2}{v \omega^2 \mu^2} \right.,$$

где $P_{\xi\eta}$ — мощность потерь в верхней и нижней стенках резонатора за счет продольных (в направлении ξ) и поперечных (в направлении η) компонентов тока.

Расчет по подобным формулам даже резонаторов сравнительно простой конфигурации требует больших усилий и отнимает много времени. При этом нередко делаются упрощения, существенно снижающие точность вычислений и, по сути, сводящие на нет преимущества, обусловленные строгой начальной постановкой задачи.

В таком случае возникает вопрос: не следует ли с самого начала сделать максимально возможные упрощения, ориентируясь на заведомо приближенный результат? В частности, что касается добротности, здесь можно принять во внимание мнение С. Рамо и Дж. Уиннери [4, с. 502]: “По физическому смыслу следовало ожидать, что Q должно быть более или менее пропорционально отношению внутреннего объема резонатора к площади его поверхности, так как от объема зависит накопление энергии, а от поверхности — ее потери. Конечно, такое представление полезно только для грубой оценки, так как нужно также принимать во внимание и структуру поля”.

Рассмотрим некоторые формы объемных резонаторов, оценивая их добротность как отношение объема V к площади ограничивающей его поверхности S .

Как известно, из всех геометрических фигур максимальное отношение объема к площади поверхности имеет сфера, в связи с чем сферический объемный резонатор имеет максимальную добротность. Сравним ее с добротностью резонаторов других форм, например в виде куба и цилиндра, описанных вокруг сферы (рис. 1).

Для сферы диаметра a (рис. 1, а):

$$\left(\frac{V}{S}\right)_c = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{6}.$$

То же получается и для цилиндра диаметра a с высотой a (рис. 1, б):

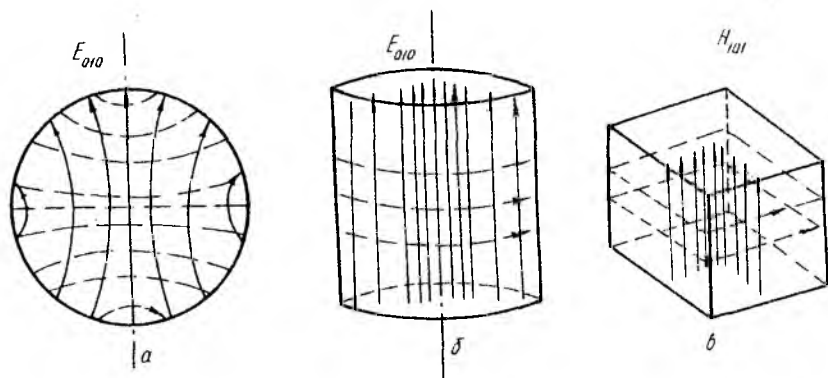


Рис. 1

$$\left(\frac{V}{S}\right)_y = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 a}{2\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{a}{2}+a\right)} = \frac{a}{6}.$$

Наконец, для куба со стороной a (рис. 1, в):

$$\left(\frac{V}{S}\right)_k = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}.$$

Итак, все эти фигуры имеют одинаковое отношение V/S , а следовательно, и одинаковую добротность. Естественно полагать, что конфигурация силовых линий поля во всех случаях подобна, т.е. в сфере существуют колебания вида E_{010} , в цилиндре — также вида E_{010} , а в кубе — H_{101} (см. рис. 1, a — $в$).

Согласно (1) энергия, запасенная в объеме резонатора как при наличии потерь на стенках, так и при их отсутствии практически одинакова. Таким образом, $Q \approx 1/S$. Сравним получаемые в таком случа

результаты с приведенными выше. У куба $S_k = 6a^2$, у цилиндра $S_{ц} = 4,71a^2$ и у сферы $S_c = 1,14a^2$. Отличие от приведенных ранее результатов весьма существенное. Сейчас имеем $Q_c = 0,318$; $Q_{ц} = 0,212$; $Q_k = 0,166$, откуда следует, что добротность сферы в 1,5 раза больше, чем у цилиндра, и почти в 2 раза больше, чем у кубического резонатора. Естественно, что это относится лишь к выбранному нами соотношению размеров геометрических фигур.

Представляется (хотя и требует дополнительной проверки), что последние данные более точны и, несмотря на определенное различие структур полей, описываемых с помощью полиномов Лежандра (сфера), функций Бесселя (цилиндр) и синусоидальных функций (куб), считааемых нами подобными, лучше отражают действительность.

Что же дают строгие электродинамические формулы?

Согласно [1, с. 511]

$$Q_c = \frac{\eta_1}{R_s}, \quad \text{где } \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Для цилиндра [1, с. 508]

$$Q_{ц} = \frac{P_{01}}{4} \cdot \frac{\eta_1}{R_s} = \frac{2,405}{4} \cdot \frac{\eta_1}{R_s} = 0,6 \frac{\eta_1}{R_s}$$

Для куба [1, с. 498]

$$Q_k = 0,742 \frac{\eta_1}{R_s}.$$

Отсюда вытекает, что добротность у сферы в 1,66 раза больше, чем у цилиндра, и в 1,35 раза больше, чем у куба.

Добротность куба в 1,22 раза больше, чем у цилиндра. Результаты существенно отличаются от полученных с учетом только потерь в стенках, причем не только количественно.

По данным [5]

$$Q_{\text{ц}} = 0,33a \cdot \frac{1}{\Delta^0} \cdot \frac{\mu}{\mu_{\text{нр}}};$$

$$Q_{\text{к}} = 0,33 \cdot \frac{1}{\Delta^0} \cdot \frac{\mu}{\mu_{\text{нр}}},$$

т.е. эти добротности равны. Результат тот же, что и при расчете по отношению V/S .

Согласно [1]:

$$Q_{\text{ц}} = \frac{a}{6} \cdot \frac{\omega_0 \mu_a}{R_s},$$

$$Q_{\text{к}} = \frac{a}{6} \cdot \frac{\omega_0 \mu_a}{R_s},$$

т.е. результат тот же.

В работе [2] общие формулы не конкретизированы. Но на с. 107-108 говорится: "Чтобы получить возможность быстро оценивать величину добротности резонаторов, примем во внимание, что для резонаторов простой (хотя бы и неправильной) выпуклой формы вблизи поверхности имеет место пучность магнитного поля (для квазистационарных резонаторов это, в частности не выполняется)¹. Тогда для таких резонаторов можно считать, что среднее значение квадрата магнитного поля на поверхности в два раза превышает значение данной величины в объеме резонатора. С учетом этого

$$Q \approx \frac{1}{\delta \mu} \cdot \frac{V}{S},$$

где δ — толщина скин-слоя.

Отношение V к $S/6$ можно назвать средним геометрическим размером $a_{\text{ср}}$ резонатора. Например, для куба $a_{\text{ср}}$ равно длине ребра, а для шара — диаметру. Тогда для ферромагнитных металлов

$$Q \approx \frac{1}{6} \cdot \frac{a_{\text{ср}}}{\delta}.$$

¹ Заметим, что максимум напряженности магнитного поля, находится у кубического резонатора на боковых стенках, у цилиндра отодвигается к оси, а у сферического резонатора смещается к центру в экваториальной плоскости примерно на 30 % радиуса.

Так как δ обратно пропорционально корню квадратному из частоты, то для одного и того же резонатора и разных видов колебаний в нем добротность приблизительно пропорциональна корню квадратному из частоты. Если же при разных частотах применяется один и тот же вид колебаний, для чего все размеры резонатора изменяются пропорционально частоте (именно этот случай представляет практический интерес), то добротность уменьшается с ростом частоты как $1/\sqrt{\omega}$.

В работе [6] $Q_u = 0,27 \frac{\lambda}{\delta} > Q_k = 0,24 \frac{\lambda}{\delta}$ в 1,13 раза. Сравнив результат с данными [1], отметим, что различие только количественное, но не качественное.

Наконец, согласно работе [7]

$$Q_u = \frac{\lambda}{\delta} \cdot \frac{2,405}{3\pi};$$

$$Q_k = \frac{\pi\delta\sigma}{\frac{\lambda}{a} \left[1 + \frac{\lambda^2}{2a^2} \right] + 4 \left[1 - \frac{\lambda^2}{4a^2} \right]^{3/2}}.$$

Не анализируя эти формулы и не сравнивая полученные с их помощью результаты с другими, обратим внимание только на непонятную сложность формулы для добротности куба.

Можно было бы привести из литературы, считающейся "классической", еще целый ряд формул для расчета добротности простейших фигур — цилиндра и куба (сфера обычно не рассматривается). Эти формулы резко различаются, несмотря на одинаковые исходные предпосылки. Но сопоставление и анализ причин расхождений в формулах, приводимых различными авторами, не входит в задачу данной работы.

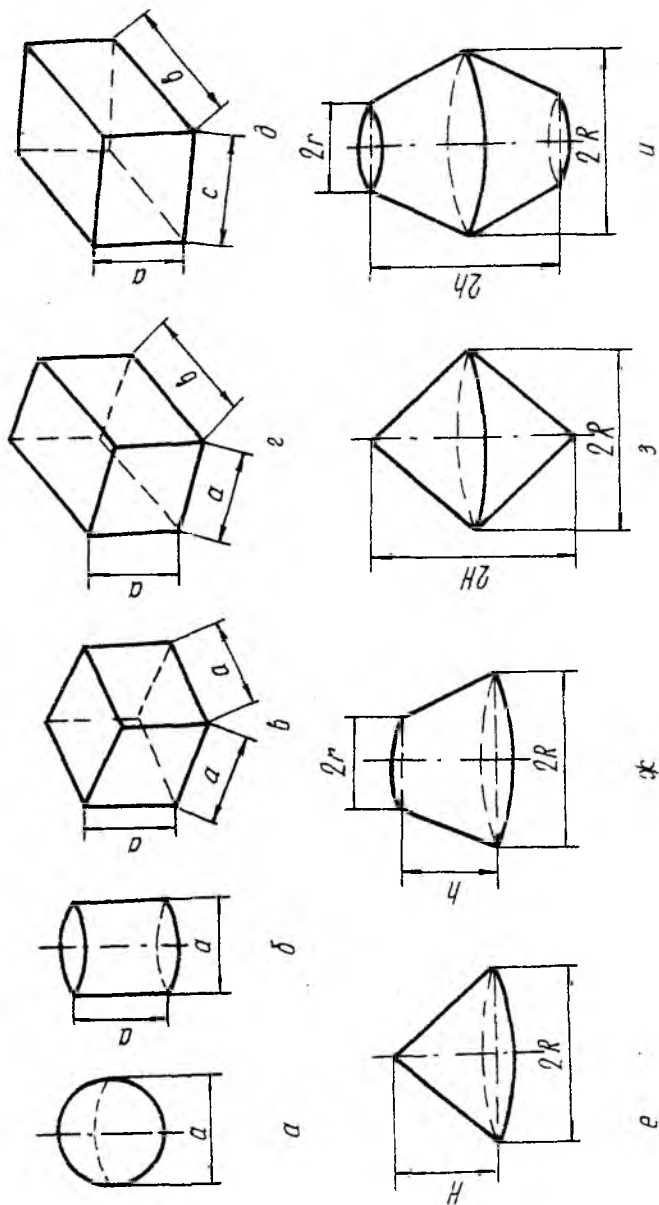


Рис. 2 (см. также с. 37)

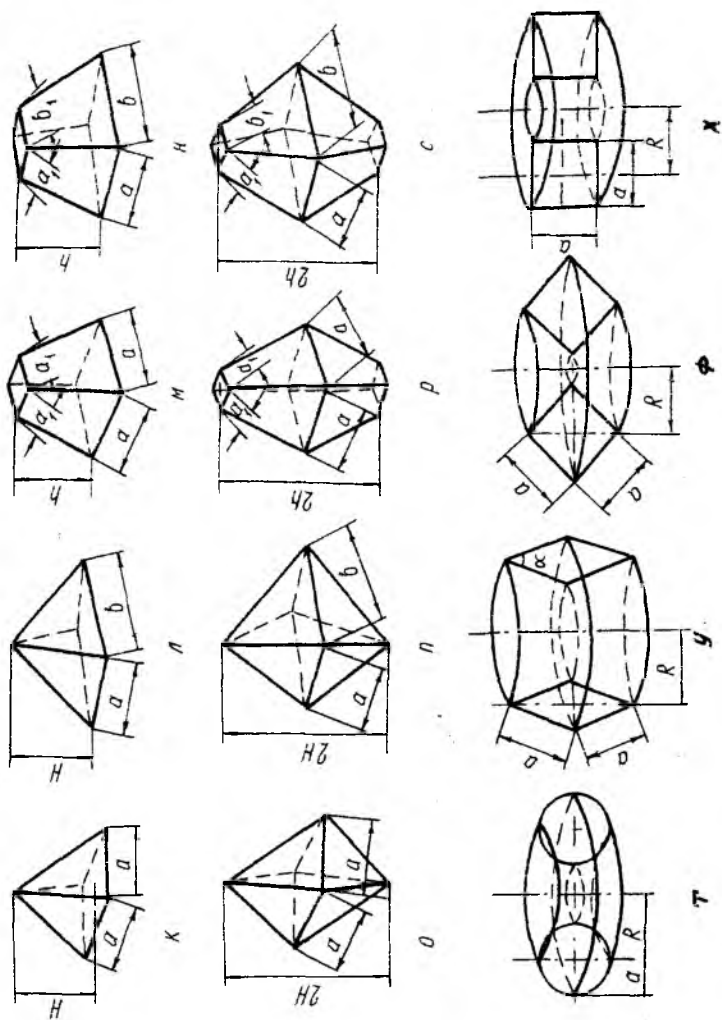


Рис. 2. Окончание

№ п/п	Форма резонатора	Позиция рис. 2	Формула для расчета Q
1	Сфера диаметра a	a	$a/6$
2	Цилиндр диаметра a с высотой a	b	$a/6$
3	Куб со стороной a	$в$	$a/6$
4	Прямоугольный параллелепипед со сторонами a, a, c	z	$\frac{ac}{2(a+c)}$
5	То же со сторонами $a, в, c$	d	$\frac{авс}{2(ав+вс+са)}$
6	Конус высоты H с радиусом основания R	e	$\frac{HR}{3(R+\sqrt{R^2+H^2})}$
7	Усеченный конус высоты h с радиусами оснований R и r	$ж$	$\frac{h(R^2+r^2+Rr)}{3[R^2+r^2+(R+r)\sqrt{R^2+r^2}]}$
8	Биконус высоты $2H$ с радиусом основания R	$з$	$\frac{RH}{3\sqrt{R^2+H^2}}$
9	Усеченный биконус высоты $2h$ с радиусами оснований R и r	$и$	$\frac{h(R^2+r^2+Rr)}{3[r^2+(R+r)\sqrt{R^2+h^2}]}$
10	Пирамида высоты H со сторонами основания a	$к$	$\frac{aH}{3(a+2\sqrt{\frac{a^2}{4}+H^2})}$
11	Пирамида высоты H со сторонами основания $a, в$	$л$	$\frac{авH}{3(ав+a\sqrt{\frac{в^2}{4}+H^2}+в\sqrt{\frac{a^2}{4}+H^2})}$
12	Усеченная пирамида высотой $2h$ со сторонами оснований a, a_1	$м$	$\frac{h(a_1+a_1^2+a a_1)}{3[a_1+a_1^2+2(a+a_1)\alpha]}$ где $\alpha = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}(a-a_1)^2}$

№ п/п	Форма резонатора	Позиция рис. 2	Формула для расчета Q
13	Усеченная пирамида высоты $2h$ со сторонами оснований a, b . a_1, b_1	<i>n</i>	$\frac{h(av + a_1b_1 + \sqrt{a_1b_1})}{av + a_1b_1 + (a + a_1)\alpha_a + (b + b_1)\alpha_b}$ <p>где</p> $\alpha_a = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}(b - b_1)^2}$ $\alpha_b = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}(a - a_1)^2}$
14	Бипирамида высоты $2H$ со сторонами основания a	<i>o</i>	$\frac{aH}{3\sqrt{\frac{a^2}{4} + H^2}}$
15	Бипирамида высоты $2H$ со сторонами основания a и b	<i>n</i>	$\frac{abH}{3(a\sqrt{\frac{b^2}{4} + H^2} + b\sqrt{\frac{a^2}{4} + H^2})}$
16	Усеченная бипирамида высоты $2H$ со сторонами основания a и a_1	<i>p</i>	$\frac{h(a^2 + a_1^2 + aa_1)}{3[a_1^2 + 2(a + a_1)\alpha]}$ <p>где</p> $\alpha = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}(a - a_1)^2}$
17	Усеченная бипирамида высоты $2H$ со сторонами основания a и b, a_1 и b_1	<i>c</i>	$\frac{h(av + a_1b_1 + \sqrt{a_1b_1})}{3\left[\frac{a_1b_1}{2} + (a + a_1)\alpha_a + (b + b_1)\alpha_b\right]}$ <p>где</p> $\alpha_a = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}(b - b_1)^2}$ $\alpha_b = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}(a - a_1)^2}$
18	Тор радиуса R кругового сечения радиуса r	<i>m</i>	$\frac{r}{2}$
19	Тор радиуса R ромбического сечения со сторонами a под углом 2α	<i>y</i>	$\frac{a \sin \alpha}{4}$
20	Тор радиуса R квадратного сечения со стороной a	<i>ф</i>	$\frac{a}{4}$

А теперь, анализируя изложенный выше материал, можно прийти к выводу, что расчет добротности объемных резонаторов по отношению V/S не столь уж неправилен, как это кажется на первый взгляд.

В таблице приведены полученные таким путем формулы для расчета добротности наиболее часто применяемых форм резонаторов, показанных на рис. 2.

Обратим внимание на интересный вывод, следующий из 18, 19, 20-й строк таблицы для фигур тороидальной формы: их добротность, определяемая весьма простыми формулами, не зависит от радиуса тора! Поскольку формулы, приведенные в таблице, не дают абсолютных значений добротности, непосредственное сравнение рассчитанных по отношению V/S значений с экспериментальными, имеющимися в некоторых литературных источниках, например в [3; 8 — 10], невозможно. Для такого сравнения необходимо было бы иметь измеренные значения для нескольких вариаций формы и (или) размеров резонатора. Кроме того, представляется целесообразным детальнее исследовать влияние на величину добротности перехода от одного вида колебаний в резонаторе к другому. Эти вопросы заслуживают отдельной публикации.

Список литературы: 1. Вольман В.И., Пименов Ю.В. Техническая электродинамика. М., 1971. 488 с. 2. Гуревич А.Г. Полые резонаторы и волноводы. М., 1952. 256 с. 3. Дмитриев В.М., Ляпунов Н.В., Седых В.М. Добротность резонаторов с переменным прямоугольным поперечным сечением // Теорет. электротехника. 1967. Вып. 4. С. 144 - 149. 4. Рамо С., Уиннери Дж. Поля и волны в современной радиотехнике: Пер. с англ. М.: Л., 1948. 632 с. 5. Никольский В.В. Теория электромагнитного поля. М., 1964. 384 с. 6. Лебедев И.В. Техника и приборы СВЧ. М., 1972. Т. 1. 440 с. 7. Фельдштейн А.Л., Явич П.Р., Смирнов В.П. Справочник по элементам волноводной техники. М., 1967. 652 с. 8. Привалов Е.Н. К расчету добротности нерегулярного резонатора конической формы // Некоторые проблемы современной физики. Днепропетровск, 1971. С. 109 - 111. 9. Бобрышев В.Д., Кравченко В.Ф., Каретников С.Н. Исследование высокодобротного предельного резонатора // Измер. техника. 1975. № 7. С. 70 - 71. 10. Дмитриев В.М. Волноводные резонаторы с переменным поперечным сечением: Дис... канд. физ.-мат. наук. Х., 1977. 240 с. Машиннопись.

Харьковский государственный технический
университет радиозлектроники

Поступила в редколлегию 15.05.97